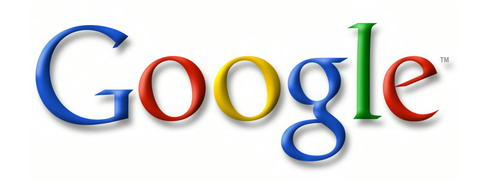
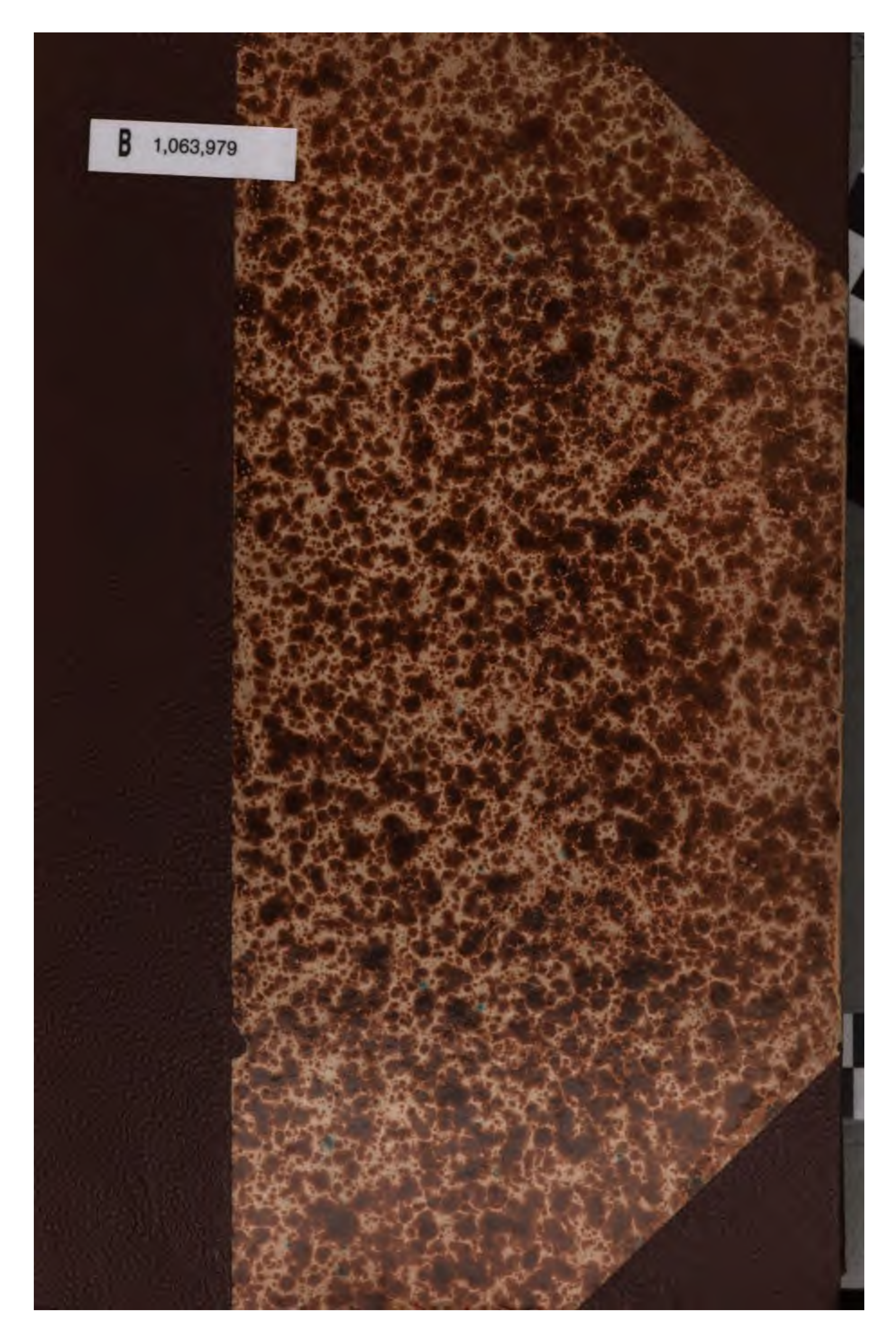



B 1,063,979

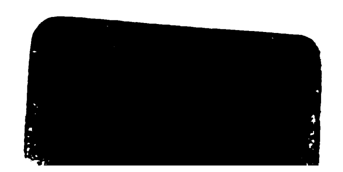








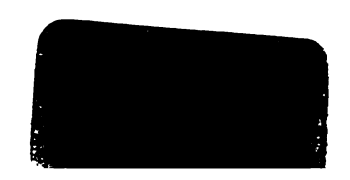






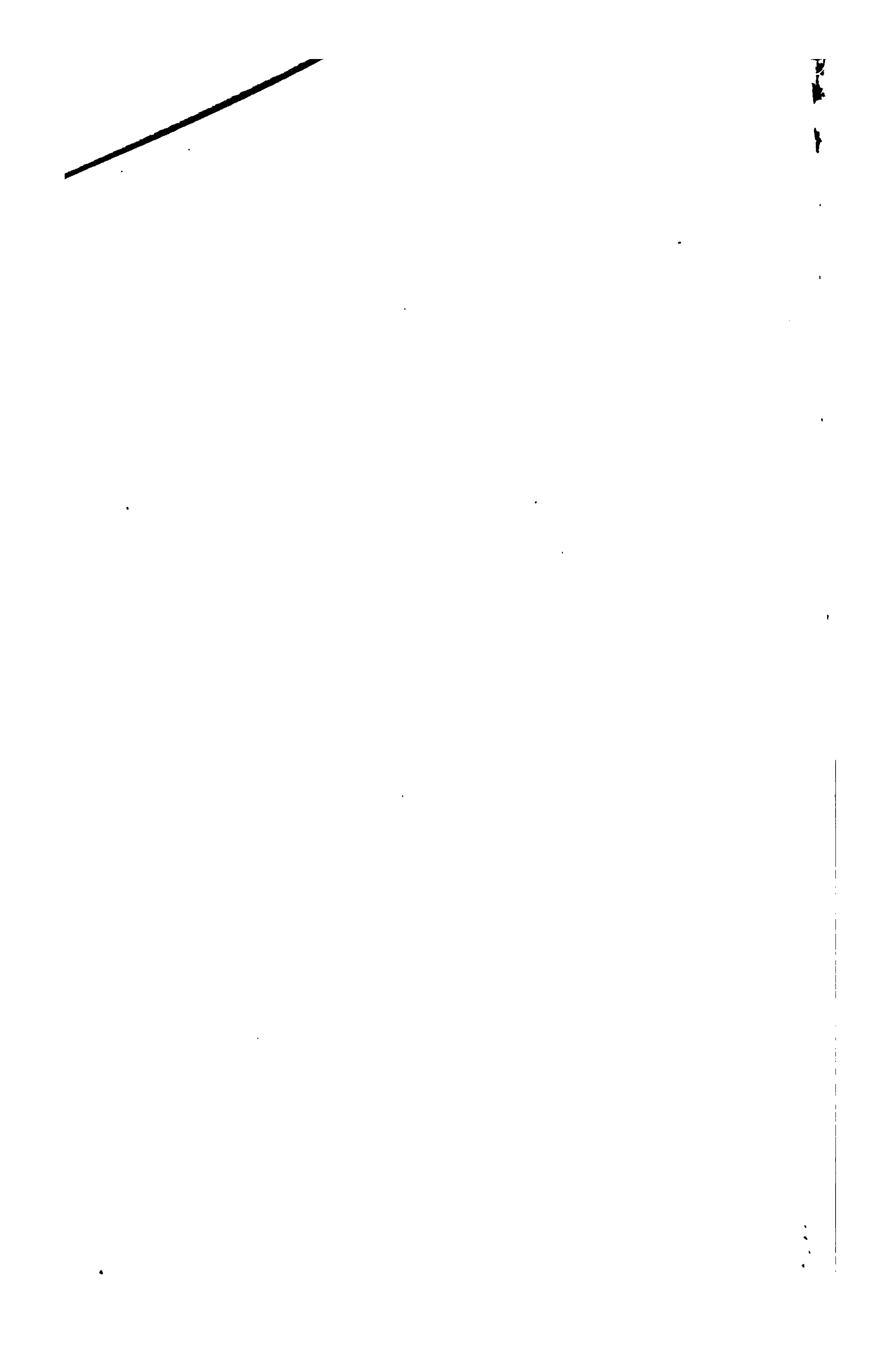






SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES.



ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.

CONST. DE FID. CATH., c. IV.

SEIZIÈME ANNÉE, 1891-1892

BRUXELLES
SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE
OSCAR SCHEPENS, Directeur
16, RUE TREURENBERG, 16

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

BRUXELLES, IMPRIMERIE F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 112, RUE DE LOUVAIN.

1892

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES.

CONFÉRENCES.

AUTEURS.

SECONDE PARTIE

—

MÉMOIRES

AUTEURS.

PLANCHES.

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *On demande des recherches nouvelles sur des combinaisons renfermant le noyau* $C_n — C_3H_3$.

2° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

3° *Trouver les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables* f (x, y, z) *dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre dans le développement de*

$$f(a+h, b+k, c+l) — f(a, b, c)$$

peut s'annuler sans changer de signe.

4° *Étudier la fixation de l'azote par le sol et par la plante, au point de vue biologique et agricole.*

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise: « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (1).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des pubications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tout les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique, ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une

manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

NOTE. — Le tirage au sort, ordonné par l'article 3, a rangé les sections dans l'ordre suivant : 2e, 4e, 3e, 5e et 1re.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse*; quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IVª de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15. Ianuarii 1879. Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO PP. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant

à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

ANNÉE 1893.

Liste des membres fondateurs.

S. É. le cardinal DECHAMPS ([1]), archevêque de. .	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE ([1]).	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE ([1])	Anvers.
Le chanoine MAES ([1])	Bruges.
Le chanoine DE LEYN	Bruges
LEIRENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS ([1])	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Chᵉʳ DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL.	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le duc D'URSEL, sénateur ([1])	Bruxelles.
Le Pᶜᵉ Gustave DE CROY ([1])	Le Rœulx.
Le Cᵗᵉ DE T'SERCLAES ([1])	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART ([1])	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE-CONCEPTION. . . .	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS.	Liège.
Le Cᵗᵉ DE BERGEYCK	Beveren-Waes.
L'Institut SAINT-IGNACE	Anvers.
Philippe GILBERT ([1]), correspondant de l'Institut.	Louvain.

([1]) Décédé.

Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège Saint-Joseph.	Alost.
Le chanoine de Wouters	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (¹), archevêque de Kalocsa et Bàcs.	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli . . .	Rome.
S. G. Mgr Du Rousseaux, évêque de	Tournay.
S. É. le cardinal Goossens, archevêque de . . .	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin (¹), évêque de.	Namur.
Eugène Pecher.	Bruxelles.
S. Exc. Mgr Ferrata, archevêque de Thessalonique, nonce apostolique	Paris.
S. Exc. Mgr Nava di Bontifè, archevêque d'Héraclée, nonce apostolique	Bruxelles.

Liste des membres honoraires.

Le Pce B. Boncompagni, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei	Rome.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
Charles Hermite, membre de l'Institut	Paris.
Le général Newton	New-York.
Le docteur Foerster	Aix-la-Chapelle.
A. de Lapparent	Paris.
A. Béchamp	Lille.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières, membre de l'Institut.	Paris.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
L. de Bussy, membre de l'Institut	Paris.
Louis Pasteur, membre de l'Institut.	Paris.
Aug. Daubrée, membre de l'Institut	Paris.

(¹) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

---

d'ABBADIE (Antoine), membre de l'Institut, 120, rue du Bac. — Paris; ou Abbadia par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

ABBELOOS (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique de l'Université, 3, montagne du Collège. — Louvain.

d'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.

ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).

AGUILAR Y SANTILLÁN (Rafael), secretario general de la Sociedad « Antonio Alzate », 13, calle de la Palma. — México (Mexique, vià New-York).

ALEXIS, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.

ALFAGEME (José), catedrático, calle de la Princesa, 37, cuaderno pral, dra. — Madrid (Espagne).

ALLARD (François), industriel. — Châtelineau.

ANDRÉ (J.-B.), inspecteur au ministère des travaux publics, 111, avenue Brugmann. — Uccle.

ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).

ARDUIN (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

BAILLON, 8, place de la Calandre. — Gand.

BARCIA CABALLERO (Juan), catedratico de diseccion en la Universidad, Puerta de la Peña, 10. — Santiago (Espagne).

BARDIN (abbé Louis), professeur de géologie à la Faculté, 21, rue Brault. — Angers (Maine-et-Loire — France).

DI BARTOLO (Canonico Salvatore), via della Libertà, 1. — Palermo (Sicile).

BAULE (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas. — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).

BAYET (Adrien), 33, nouveau marché aux Grains. — Bruxelles.

BAYET (Ernest), 58, rue Joseph II. — Bruxelles.

BEAUCOURT (abbé Léopold), curé des Écaussinnes d'Enghien.

BÉCHAMP, doyen de la Faculté catholique de médecine, 56, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).

[illegible] (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire. — Aix (Bouches-du-Rhône) — France.

[illegible] François, ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.

[illegible] Théodore, directeur du service [illegible], 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.

de [illegible] (Cte), château de [illegible] (Flandre-Orientale).

[illegible] Amédée, ingénieur, 17, faubourg Saint-Laurent. — Liége.

[illegible] Médard, directeur des [illegible] de la Vieille-Montagne. — [illegible] (Aveyron) — France.

[illegible] Léon, 3, rue Crespel. — Bruxelles.

[illegible]-[illegible] (B^{on}), sénateur, rue du Pont. — Alost.

[illegible] (Mgr Félix), rue d'Argent. — Bruges.

[illegible] (Alfred), ingénieur, 16, rue de la Madeleine. — Tournay.

[illegible] Auguste. — [illegible] de Namur.

[illegible] (abbé), 23, avenue de Messine. — Paris.

de la [illegible]-T[illegible] (Mme), 23, rue aux Laines. — Bruxelles, ou [illegible] de [illegible] par [illegible].

[illegible], S. J. (R. P. [illegible]), [illegible] A 16. — [illegible] (Pays-Bas).

[illegible] [illegible], ingénieur. — [illegible] Namur.

[illegible] (D^{on} J. [illegible]), [illegible] des Nuovi Lincei, [illegible], [illegible]. — Rome.

[illegible], directeur au [illegible], 88, rue [illegible]. — Bruxelles.

[illegible] (abbé L.), professeur à l'Université, 88, rue de [illegible]. — Louvain.

[illegible] (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 127, boulevard [illegible]. — Lille (Nord) — France.

[illegible], professeur à l'Université, [illegible], rue des [illegible]. — Gand.

[illegible] (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington [illegible], D. C. — États-Unis d'Amérique.

[illegible] (abbé), [illegible] de [illegible] de l'[illegible]. École des [illegible] de [illegible]. — Alost.

[illegible] (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 13, rue Charles de [illegible]. — Lille (Nord) — France.

[illegible], [illegible] de l'[illegible], [illegible], rue [illegible]-Bernard. — Paris.

de [illegible] Paul, ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Amiens (Somme) — France.

VAN DEN BRANDEN DE REETH (Mgr), évêque d'Érythrée, au Collège Belge. — Rome.

BRANLY (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.

BRASSINE (J.-J.), général commandant la 2e division d'infanterie. — Anvers.

BREITHOF (N.), professeur à l'Université, 85, rue de Bruxelles. — Louvain.

BRIBOSIA, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine, 16, rue Neuve. — Namur.

BROCKMAN (Guillermo), hijo. — Pachuca (Estado de Hidalgo — Mexique).

VAN DER BRUGGEN (Bon Maurice), 20, rue du Gouvernement. — Gand.

BRUYLANTS, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, 28, rue des Récollets. — Louvain.

BUISSERET (Anatole), préfet des études au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.

BUISSERET (Joseph), professeur au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.

DE BUSSY (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.

CAMBIER (Vital), industriel. — Morlanwelz (Hainaut).

CAMBOUÉ (R. P. Paul), missionnaire. — Tananarive (Madagascar, vià Suez).

CANFYN (Albert), 3, place du Lion d'Or. — Gand; ou Evergem près Gand.

CAPPELLEN (Guillaume), avocat, 4, place Marguerite. — Louvain.

CARNOY (Joseph), professeur à l'Université, 13, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

CARTUYVELS (Jules), directeur au ministère de l'agriculture, 40, rue Breydel. — Bruxelles.

CASARÉS (Firmino), en la Coruña. — (Espagne).

CHARLIER (Ernest), docteur en médecine, 4, rue de la Cuiller. — Bruxelles.

DU CHASTEL (Cte Henri), 55, rue de Trèves. — Bruxelles.

CHAUTARD, doyen de la Faculté catholique des sciences de Lille, château de la Chapelle, par Croissanville (Calvados — France).

CLASEN (abbé B.-I.), curé doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).

CLOQUET (L.), professeur à l'Université, 36, plaine St-Pierre. — Gand.
COGELS (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.
COLLANTES (Dr Juan de Dios), calle de las Moras, nº 18. — México (Mexique, vià New-York).
COLLANTES (Pedro), licenciado, calle del Esclavo, nº 10. — México (Mexique, vià New-York).
COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX, 39, rue de Bruxelles. — Namur.
COLLÈGE SAINT-JOSEPH, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
COLLÈGE SAINT-MICHEL, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
COLLÈGE SAINT-SERVAIS, 88, rue Saint-Gilles. — Liège.
COOLS (Auguste), ingénieur. — Lierre.
COPPIETERS DE STOCKHOVE (abbé Ch.), curé à Sysseele, lez-Bruges.
COUSIN (L.), directeur de l'École polytechnique, conseiller technique du gouvernement chilien, 208, calle Cathedral (casilla 952). — Santiago (Chili).
CRANINCX (Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.
DE CROY (Pce Juste), 63, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.
CUYLITS (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DANIËLS (Dr Fr.), professeur au Séminaire. — Rolduc (Limbourg hollandais)
DAUBRÉE (Aug.), membre de l'Institut, professeur de géologie au Muséum, 254, boulevard Saint-Germain. — Paris.
DAUBRESSE (Paul), ingénieur. — Niel près Boom (Anvers).
DAVIGNON (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
DE BAETS (Herman), 16, rue du Bélier. — Gand.
DE BAETS (abbé Maurice), secrétariat de l'évêché. — Gand.
DEBAISIEUX, professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.
DE BECKER (chan. Jules), professeur à l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.
DE BIEN (Fernand), ingénieur, 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.
DE BLOO (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
DE BROUWER (chan.), supérieur du Petit-Séminaire. — Roulers.
DE BRUYN (Jules), 175, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
DE BUCK (Dr D.), 28, rue Basse. — Gand.
DEGIVE (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — Cureghem-lez-Bruxelles.

DE GREEFF, S. J. (R. P. Henri), 11, rue des Récollets. — Louvain.
DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DE JAER (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes.—Mons.
DELACRE (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, chaussée de Tournay. — Gand.
DELAIRE (A), secrétaire général de la Société d'Économie sociale, 238, boulevard St-Germain. — Paris.
DE LANTSHEERE (Dr J.), oculiste, 10, avenue des Arts. — Bruxelles.
DE LANTSHEERE (Léon), avocat, 216, rue du Trône. — Bruxelles.
DELESTRE, ancien directeur des manufactures de l'État, 56, rue Nollet. — Paris.
DELÉTREZ (Dr A.), 5, rue de la Charité. — Bruxelles.
DE LEYN (chan. A.), 52, rue du Marécage. — Bruges.
DELVIGNE (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
DEMANET (abbé), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du St-Esprit.— Louvain.
DE MARBAIX (Alph.), professeur à l'Université de Louvain, conseiller provincial. — Meerhout.
DE MEESTER (Augustin), propriétaire. — Saint-Nicolas.
DEPLOIGE (Simon), docteur en droit. — Tongres.
DE PRETER (Herman), ingénieur, 28, boulevard du Jardin Botanique. — Bruxelles.
DE PRINS, place du Peuple. — Louvain.
DESPLATS (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 52, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
DESSAIN (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
DE TILLY (colonel J.), de l'Académie royale de Belgique, commandant de l'École militaire. — Bruxelles.
DEWALQUE (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
DEWALQUE (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liège.
DIERCKX, S. J. (R. P. François), professeur de sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.
DIERCKX (P.), membre de la Chambre des Représentants. — Turnhout.

Doret (Ferdinand), avocat, membre de la Chambre des Représentants, place St-Aubin. — Namur.

Dollo (Louis), conservateur au Musée d'histoire naturelle de Belgique, 28, rue du Cornet. — Etterbeek (Bruxelles).

de Dorlodot (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université catholique, 10, rue au Vent. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux, par Floreffe (Namur).

Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure. — Gand.

Duhem (Pierre), chargé de cours à la Faculté des sciences, 78, rue Caumartin. — Lille (Nord — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier, France).

Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Dumont (André), professeur à l'Université, 13, rue de la Laie. — Louvain.

Dumont (Henri), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Du Rousseaux (S. G. Mgr), évêque de Tournay.

Dusausoy (Clément), chargé de cours à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dutordoir (Hector), ingénieur provincial, 373, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard, Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue Lhomond. — Paris.

[illegible] (Dr J.), 32, rue Verte. — Bruxelles.

de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — Hamont, par Neerpelt (Limbourg).

[illegible] (L.), ingénieur de la marine, directeur des constructions navales, 2, place de l'Alma. — Cherbourg (Manche — France).

[illegible] (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée royal, 72, rue Charles-Quint. — Gand.

[illegible] (A.), docteur en médecine. — Le Roeulx.

[illegible] (Mauro), [illegible] de Patología y Clínica en la Universidad. — Santiago (Espagne).

[illegible] (Maurice), [illegible] général des [illegible]. — Grammont.

[illegible] y [illegible] (Ra[illegible]), profesor en la Universidad, calle del Bruch, 31. — Barcelona (Espagne).

Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

Ferrata (S. G. Mgr), archevêque de Thessalonique, nonce du Saint-Siége, 58, rue de Varennes. — Paris.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), calle de Isabel la Católica, 12. — Madrid (Espagne).

Foerster (Dr), professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.

Folie (F.), membre de l'Académie royale et directeur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle.

Fontaine (Théodore), professeur à l'Université, 14, rue des Orphelins. — Louvain.

Forget (abbé J.), professeur à l'Université, Collège du Saint-Esprit. — Louvain.

Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).

de Foville (abbé), professeur à l'Université, au Séminaire. — Montréal (Canada).

François, S. J. (R. P. Alexis), professeur au Collège N.-D. de la Paix, 39, rue de Bruxelles. — Namur.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université. 15, quai de l'Industrie. — Liège.

Gallez (Louis), docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine. — Châtelet.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — Paris.

Gautier (chanoine), 79, rue Notre-Dame. — Malines.

George, S. J. (R. P. Charles), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Giannuzzi (Mgr Venceslao), viâ Ufficii del Vicario, 30. — Rome.

Gilbert (Paul), ingénieur, rue Gambetta. — Givet (Ardennes — France).

Gilson, professeur à l'Université, 1, avenue de la Place d'Armes. — Gand.

Glorieux (Dr), 5a, rue du Congrès. — Bruxelles.

Godard, ingénieur des ponts et chaussées. — Honfleur (Calvados — France).

Goedseels (Édouard), lieutenant, répétiteur à l'École militaire, chargé des cours de géométrie descriptive et d'analyse infinitésimale à l'École de guerre, 8, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

GOIX (Alph.), docteur en médecine, 40, rue de Joinville. — Paris.
GOOSSENS (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.
GORIS (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.
GRANDMONT (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile).
GRANERO, S. J. (R. P. Juan), colegio de N Sra del Recuerdo, Chamartin de la Rosa. — Madrid (Espagne).
GREDILLA (Apolinar Federico), docteur en sciences naturelles, aide-naturaliste au Musée de Madrid, rue de Leganitos, n° 25, 3°. — Madrid (Espagne).
GRENIER (Gustave), propriétaire, 78, rue de la Station. — Louvain.
GRINDA (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Valverde, 22, 2°. — Madrid (Espagne).
GRISAR (Armand), docteur en sciences physiques et mathématiques, 5, rue Hoboken. — Anvers.
DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur des mines. — Bourges (Cher — France).
DE GRUNNE (Cte François), capitaine d'artillerie, 65, rue Belliard. — Bruxelles.
GUYÉTAND, directeur de l'École libre de Mont-Roland. — Dôle (Jura — France).
• HAGEN, S. J. (R. P.), Georgetown College Observatory. — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
HAHN, S. J. (R. P. Guillaume), Collège N.-D. de la Paix, 59, rue de Bruxelles. — Namur.
DE HARLEZ (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.
DE LA HAYE (Auguste), ancien capitaine commandant à Kessel-Loo. — Lierre.
HELLEPUTTE (G.), membre de la Chambre des représentants, professeur à l'Université catholique, rue des Récollets. — Louvain.
DE HEMPTINNE (Alexandre), 52, rue des Meuniers. — Gand.
DE HEMPTINNE (Cte Joseph), fils, 31, rue Charles-Quint. — Gand; ou Tamise (Flandre Orientale).
HENRY (Hector). — Dinant.
HENRY (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), docteur en sciences naturelles, 2, rue du Manège. — Louvain.

Hermite (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.

Hervier (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heymans (J.-F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 35, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Houtart (Bon Jules). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

Houze (Octave), docteur en médecine. — Binche.

Humbert, ingénieur des mines, répétiteur à l'École polytechnique, 16, boulevard Malesherbes. — Paris.

Huybrechts (D^r Th.), 61, rue des Fabriques. — Bruxelles.

Icazbalceta (Joaquín García), apartado del correo 366. — México (Mexique, viâ New-York).

Illescas (Juan), calle de San Agustin, 2. — México (Mexique, viâ New-York).

Imperiali (Mis), des P^ces de Francavilla, 10, rue Montoyer. — Bruxelles; ou château d'Ilamal par Tongres.

Iñiguez é Iñiguez (Francisco), catedratico de Astronomia en la Universidad, calle de Isabel la Católica, 4, bajo. — Madrid (Espagne).

Institut Saint-Ignace. — Anvers.

Jacmart, lieutenant général, 21, rue Geefs. — Schaerbeek.

Jacobs (Mgr), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

Jacopssen, S. J. (R. P. Raymond), 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Jannet (Claudio), professeur aux Facultés catholiques, 11, rue las Cases. — Paris.

Jenner (Ch. I.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, directeur des travaux hydrauliques de la marine, 38, rue de la Rampe. — Brest (Finistère — France).

Jimeno (Joaquin), ingeniero de caminos. — Castellon de la Plana (Espagne).

Joly (Léon), avocat, 18, rue Caroly. — Bruxelles.

de Jonquières, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.

Jourdain (Louis), ingénieur, 19, rue Léopold. — Bruxelles.

KENNIS (Guillaume), ingénieur, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek.
KIRSCH (R. P. Alexandre M.), C. S. C. — Notre-Dame (Indiana — États-Unis).
DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des forêts, 7, rue de l'Orangerie. — Versailles (Seine-et-Oise — France).
KURTH (Godefroid), professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy. — Liège.
LABEYE (abbé R.), curé de Blegny-Trembleur, par Visé.
LACOR (E.), professeur de mathématiques à l'École Sainte-Geneviève, 96, boulevard Montparnasse. — Paris.
LAGASSE (Alexandre), 4, rue Saint-Maurice. — Nivelles.
LAGASSE (Charles), ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, membre du Conseil supérieur du Travail, 61, rue du Conseil. — Bruxelles.
LAHOUSSE (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.
LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liège.
LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État, 65, avenue Brugmann. — Bruxelles.
LAMBIOTTE (Victor), ingénieur, directeur-gérant aux charbonnages d'Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).
LAMY (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, directeur de la Classe des sciences, professeur à l'Université catholique, 149, rue des Moutons. — Louvain.
LAPORTE, ingénieur hydrographe de la marine, 11, rue Royale. — Versailles (Seine-et-Oise — France).
DE LAPPARENT (A.), membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.
LAVAUD DE LESTRADE, prêtre de Saint-Sulpice, professeur de sciences au Séminaire. — Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).
LEBON, docteur en médecine, place Saint-Paul. — Nivelles.
LECOMTE (Félix), 10, rue du Lac. — Gand.
LEDRESSEUR (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 73, voer des Capucins. — Louvain.
LEFEBVRE, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (chan. Ferdinand), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

Leirens-Éliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune-Simonis, château de Sohan par Pepinster (Liège).

Lemoine (Georges), ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie pour la chimie à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.

Lemonnier (abbé Th.), professeur au Petit-Séminaire de Mont-aux-Malades, par Rouen (Seine-Inférieure — France).

Le Paige (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 21, rue des Anges. — Liège.

de Lichtervelde (Cte Gontran), conseiller de légation, château de la Folie. — Écaussines.

de Liedekerke (Cte Charles), 50, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

de Limburg-Stirum (Cte Samuel), 30, rue du Luxembourg.— Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat, place Impériale. — Alost.

de Locht (Léon), ingénieur, Mont-Saint-Martin. — Liége.

Lohest (Paul), ingénieur civil, président de la Fédération des œuvres ouvrières, 2, rue Rouvroy. — Liége.

Lucas, S. J. (R. P. Désiré), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Macias y del Real (Antonio), ex-secrétaire du Collège des pharmaciens, pharmacien du Corps de santé militaire et de l'armée, calle de San Andrés, n° 1 duplº pral. — Madrid (Espagne).

Maertens (chan.), professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Nicolas.

Malcorps (Ernest), avocat, 20, rue des Chariots. — Louvain.

Malisoux (Émile), ingénieur principal de 1re classe des mines, 11, rempart ad aquam. — Namur.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

de Maret (Adhémar). — Stavelot.

Martens (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

MARTINEZ Y SAEZ (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, plaza de Ministerios, 5, 3°, izq. — Madrid (Espagne).

MAS, S. J. (R. P. Bartolomé), colegio de S. Ignacio. — Manresa.

MAS, S. J. (R. P. Tomás), Rector del Seminario Conciliar. — San Luis Potosí (Mexique).

MASOIN (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, Marché-aux-Poissons. — Louvain.

MATAGNE (Henri), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

MATAGNE (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

DE MAUPEOU (Cte), ingénieur de la marine, 50, rue Vital — Passy-Paris.

MEESSEN (Wilhelm), 28, place Jourdan. — Bruxelles.

DE MEEUS (Cte Henri), ingénieur, 72, rue du Vertbois. — Liège.

DE MENDIZABAL TAMBORREL (Joaquin), ingeniero geógrafo, profesor de astronomía y geodesía en el Colegio militar, Observatorio meteorologico central. — México (Mexique, viâ New-York).

MERCIER (Mgr D.), professeur à l'Université, 19, rue des Flamands. — Louvain.

MERCIER (D^r^), rue de l'Arbre-Bénit. — Bruxelles.

MEUNIER (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse. — Louvain.

MICHA, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

MIOT (Léopold), docteur en médecine, de l'Académie royale de médecine, 15, rue de Beaumont. — Charleroi.

MIR (Michel), membre de l'Académie royale d'Espagne, calle de Valverde, 26. — Madrid (Espagne).

MIRANDA Y BISTUER (Julian), canónigo magistral de la catedral, canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).

MESONNE (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).

MOELLER, docteur en médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

MONCHAMP (abbé Georges), docteur en théologie et en philosophie, professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Trond.

MONSERRAT (G.), 14, rue des Capucines. — Paris.

DE MOREAU D'ANDOY (Ch^er^), 186, avenue Louise. — Bruxelles.

MORETUS (René), place de Meir. — Anvers.

MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin. — Liège.

DE NADAILLAC (M[is]), 18, rue Duphot. — Paris.

NAVA DI BONTIFÈ (S. Exc. Mgr), archevêque d'Héraclée, Nonce du S. Siège en Belgique. — Bruxelles.

NÈVE (Félix), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 52, rue des Orphelins. — Louvain.

NEWTON (Général John), 279, Adelphi Street. — Brooklyn, New-York.

NICOTRA (Mgr Sébastien), secrétaire du Nonce apostolique, 214, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

NISOT (Victor), ingénieur, docteur en sciences physiques et mathématiques, 44, rue de la Loi. — Bruxelles.

NOLLÉE DE NODUWEZ, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, 146, rue Royale. — Bruxelles.

NYSSENS (Albert), professeur à l'Université, 114, rue de la Station. — Louvain.

NYSSENS (Julien), ingénieur des ponts et chaussées, 44, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 19, rue Sainte-Marguerite. — Gand.

OBESO S. J. (R. P. Juan Manuel), profesor de matemáticas en el Colégio de Estúdios superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

D'OCAGNE (Maurice), ingénieur des ponts et chaussées, adjoint à l'ingénieur en chef du service du nivellement général, 5, rue de Vienne. — Paris.

OLAVARRIA (Marcial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la Commission de la carte géologique d'Espagne, rue de las Huertas, 82. — Madrid (Espagne).

ORBAN DE XIVRY, gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.

OTTO (Jean), 36, Marché-aux-Herbes. — Bruxelles.

PARDON (Gustave), ingénieur. — Frameries (Hainaut).

PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

PASTEUR (L.), membre de l'Institut, rue Dutot. — Paris.

PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.

PECHER (Eugène), 64, avenue Louise. — Bruxelles.

PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournay.

Pepin, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).

Perez (Miguel), director del Observatorio central, 1ª calle de la Merced, nº 27. — México (Mexique, vià New-York).

Petit (chan.), rue de l'Arsenal. — Namur.

de Pillon de S. Philbert (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).

Pirard (chan.), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.

Poisot (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

de Pontbière (Albert), propriétaire-agriculteur, château des Cortils, par Visé (Liège).

Proost (Alphonse), inspecteur général de l'agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 36A, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale extérieure. — Bruxelles.

Prudham (abbé), directeur du collège Stanislas, rue N.-D. des Champs. — Paris.

Puga (Guillermo B. y), ingeniero topógrafo, profesor de Geologia en la Escuela nacional de Agricultura, calle del Tompeate, 2. — México (Mexique, vià New-York).

Quairier, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

Rachon (abbé Prosper), curé de Ham et Saint-Jean, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne, — France).

Ramirez (Santiago), ingeniero de minas, calle de Buenavista, 13 ½ — México (Mexique, vià New-York).

Ravain (abbé J.-R.), 14, rue Bernier. — Angers (Maine-et-Loire — France).

Rector (R. P.) del Colegio. — Carrion (Palencia, Espagne).

Rector (R. P.) del Colegio. — Orduña (Vizcaya, Espagne).

Rector (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

Renard (abbé Alphonse), conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre-Orientale).

REYNAERT, docteur en médecine, rue du Progrès. — Saint-Nicolas.

DE RIBAUCOURT (Cte), sénateur, 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde.

RISUEÑO (Emiliano Rodriguez), catedratico de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16 pral. — Valladolid (Espagne).

DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile). — Harvengt par Harmignies (Hainaut).

DE ROUILLÉ (Cte), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.

ROUSSEL (Lucien), professeur à l'École forestière, 11, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

DE LA ROYÈRE (W.), ingénieur, 56, Pêcherie. – Gand.

DE RUBEMPRÉ (Pce), rue aux Laines. — Bruxelles; ou à Westerloo.

SAEY (Henri), notaire. — Renaix.

DE SALVERT (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loire — France).

DE SANTA CRUZ (Ivan Armada Hernandez de Cordova, Mis), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).

SANZ (Pelegrin), ingeniero de caminos, Oficina de Obras públicas. — Tarragona (Espagne).

SANZ Y LOPEZ (Cesareo), profesor de matemáticas, calle del Colegio de Doncellas. — Toledo (Espagne).

DE SAUVAGE (Cte), 22, avenue de Friedland. — Paris.

SCARSEZ DE LOCQUENEUILLE (Anatole), château de St-François — Farciennes (Hainaut); ou 84, rue de Stassart. — Ixelles.

SCHMITZ, S. J. (R. P. Gaspar), 11, rue des Récollets. — Louvain.

SCHOBBENS, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers

SCHOEMAKER (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).

SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École polytechnique, 70, rue Miromesnil. — Paris.

SIMONIS (Alfred), sénateur. — Verviers.

SIMONIS (Louis), industriel. — Verviers.

SIRET (Henri), ingénieur, 49, rue du Grand-Chien. — Anvers.

SIRET (Louis), ingénieur, Aguilas (provce Murcia — Espagne).

[illegible] (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

[illegible] (abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Hasselt.

[illegible] (José Maria Solano, Mis), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).

[illegible] (Albert), 7, avenue de la Place-d'Armes. — Gand.

[illegible], ingénieur [illegible] Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).

[illegible] (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière [illegible] Saint Georges-de-Reneins (Rhône — France).

[illegible] (R. P. Pedro), Colegio católico del Sagrado Corazón de Jesús, sacristía de Capucinas, núm. 5. — Puebla (Mexique).

[illegible] (Auguste), ingénieur, 82, rue Washington. — Bruxelles.

[illegible] (Achille), professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de la Commission géologique de Belgique, [illegible] avenue de Wavre. — Bruxelles.

[illegible]

[illegible], 51, rue des Minimes. — Bruxelles.

[illegible] boulevard [illegible]

[illegible] Brabant.

[illegible] — Bruxelles.

[illegible] — Bruxelles.

[illegible] — Bruxelles.

[illegible] Hôtel-des-[illegible] — Bruxelles.

[illegible]

[illegible] Namur.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).

THIERRY (Armand), 68, rue de la Consolation. — Bruxelles.

THIRION, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 24, rue de Fragnée. — Liége.

TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, nos 13 y 15, cto 3o dra. — Madrid (Espagne).

TRAS, S. J. (R. P.), professeur au collège N.-D. de la Paix. — Namur

DE TRAZEGNIES (Mis). — Corroy-le-Château, par Gembloux.

DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

DE T'SERCLAES (Cte Jacques), capitaine au 1er rég. d'artillerie, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

T'SERSTEVENS (Léon), 52, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.

TYKORT (Émile), ingénieur civil, professeur de chimie agricole et d'agronomie à l'Université de Louvain. — Perck, par Vilvorde.

D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant).

DE LA VALLÉE POUSSIN, de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Charles), professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

VAN AERTSELAER (chan.), directeur de l'Institut St-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.

VAN DEN BERG (Charles), notaire, place Saint-Paul. — Liége.

VAN DEN BOSSCHE (A.), ingénieur, rue des Orphelins. — Louvain.

VAN DEN GHEYN (abbé Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

VAN DEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

VAN DEN PEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

VAN DEN PEEREBOOM (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Bruxelles.

VANDERLINDEN (Dr O.), assistant à l'Université, 37, rempart des Chaudronniers. — Gand.

VAN DER MENSBRUGGHE, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.

VAN DER SMISSEN (Édouard), avocat, 16, rue du Gouvernement-Provisoire. — Bruxelles.

VAN DER VOORDT (Jules), ingénieur, 83, marché aux Chevaux. — Anvers

VAN DE WOESTYNE (chan.), professeur au Grand-Séminaire. — Bruges.

VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.

VAN ERMENGEM, docteur en médecine, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre orientale).

VAN HOECK (Dr Ém.), 2, rue Van Bemmel. — Bruxelles.

VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 167, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.

VANNUTELLI (S. É. le cardinal Serafino). — Rome.

VAN ORTROY (Fernand), aide-de-camp du général L'Olivier, 37, quai des Moines. — Gand.

VAN OVERLOOP (Eugène), sénateur, 58, rue Royale. — Bruxelles.

VAN SEGVELT (Edmond), 9, place Ragheno. — Malines.

VAN TRICHT, S. J. (R. P. Victor), 11, rue des Récollets. — Louvain.

VAN ZEEBROECK (abbé), directeur à l'Établissement des Sœurs-Grises. — Diest.

VAN ZUYLEN-ORBAN (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liège.

VAULTRIN, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

VEGAS (Miguel), catedratico de Geometria analitica en la Universidad, calle de Valverde, n° 3, 3° dra. — Madrid (Espagne).

VÉLAIN (Ch.), chargé de cours à la Sorbonne, 9, rue Thénard. — Paris.

VENNEMAN, docteur en médecine, professeur à l'Université, 35, rue du Canal. — Louvain.

VERCRUYSSE (Victor), 61, rue de France. — Courtrai.

VERHELST (abbé F.), professeur au collège Saint-Jean-Berchmans, 36, place de Meir. — Anvers.

VERRIEST (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

VICAIRE (Eugène), ingénieur en chef des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.

VICENT, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).

VILAIN XIIII (Vte), sénateur, 11, rue du Trône. — Bruxelles.

VILLAFUERTE (Eliodoro), presbitero, 86, calle de las Delicias. — Santiago (Chili).

VILLIÉ, professeur aux Facultés catholiques, 78, boulevard Vauban — Lille (Nord — France).

VIÑES (R. P. Benito), director del Observatorio, colegio de Belen. — La Havane (Cuba).

VISART DE BOCARMÉ (Cte Amédée), bourgmestre de Bruges.

VOLLEN (E.), docteur en droit, rue de Paris. — Louvain.

DE VORGES (E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.

VUILSTEKE, professeur à l'Université, 22, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

WALRAVENS (abbé Adelson), directeur du collège d'Enghien.

WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 3e lanciers, 19, rue des Frères-Mineurs. — Bruges.

WAUTELET (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre orientale).

DE WECK (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (Canton de Fribourg — Suisse).

WÉRY (D^r^). — Sclayn par Namèche (Namur).

WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

WILMOTTE (abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe (Namur).

WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

WOLF, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.

DE WOUTERS (chan.). — Braine-le-Comte.

WOUTERS (abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

ZECH (Guillaume), négociant. — Braine-le-Comte.

Liste des membres décédés.

(Mars 1892 — mars 1893.)

Bichot	Paris.
Delebecque-Vergauwen	Gand.
de Lisleferme.	Taillebourg (France).
Mgr Namèche	Louvain.
Rodillon	Lyon.
Vanderhaegen	Bruxelles.
Van Drèche	Namur.
de Villers-Vergauwen (Mme)	Gand.

Listes des membres inscrits dans les sections.

1re Section.

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM d'Abbadie.
Adan de Yarza.
Aguilar.
Chan. di Bartolo.
Baule.
Belpaire.
Pce Boncompagni.
Boussinesq.
du Boys.
Breithof.
de Bussy.

MM. Carnoy.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
De Tilly.
Dusausoy.
Dutordoir.
Eynaud.
Fagnart.
Folie.
Gauthier-Villars.

MM. Godard.
Goedseels.
Grisar.
de Grossouvre
Cte François de Grunne.
Guyétand.
Hagen.
Haton de la Goupillière.
Hermite.
Humbert.
Iñiguez.
Général Jacmart.
Jenner.
Jimeno.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
Lacor.
Charles Lagasse.
Lambert.
Le Paige.
Cte Charles de Liedekerke.
R. P. Lucas, S. J.
Mansion.
Cte de Maupeou.
de Mendizabal.
Micha.
Nisot.
J. Nyssens.

MM. P. Nyssens.
d'Ocagne.
Olavarria.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
Perez.
Vte de Salvert.
Sanz y Lopez.
Pelegrin Sanz.
Simart.
Cte de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
Stoffaes.
Suttor.
Teixeira.
R. P. Thirion, S. J.
Timmermans.
Torroja.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Cte Aymard d'Ursel.
Ch. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Abbé Van Zeebroeck.
Vegas.
Vicaire.
Villafuerte.
Villié.

2e Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.

MM. Alfageme.
André.
Béchamp.

MM. Blondel.
Bonamis.
Branly.

MM. Bruylants
Chautard.
R. P. De Greeff, S. J.
Delacre.
Abbé Demanet
De Preter.
François Dewalque.
R. P. Dierckx, S. J.
Duhem.
Dumas-Primbault.
André Dumont.
Feliù y Perez.
R. P. François, S. J.
R. P. George, S. J.
R. P. Grauers, S. J.
Hector Henry
Louis Henry
Paul Henry
R. P. [illegible], S. J.
[illegible]

MM. Lambiotte.
Leconte.
Lemoine.
de Macias.
Malisoux.
Misonne.
Mullenders.
Chan. Pirard.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
Springael.
Theunis.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
Van der Mensbrugghe.
Van der Voordt.
R. P. Van Tricht, S. J.
R. P. Vibes, S. J.
Witz.

3e Section.

[illegible] — Anthropologie, [illegible] Géographie.

[illegible]

MM. [illegible]
[illegible]
R. P. [illegible], S. J.
[illegible]
Dollo.
[illegible]

MM. Fontaine
Abbé de Foville.
Gredilla.
Grinda.
Cte de Hemptinne.
Abbé Hervier.
R. P. Kirsch.
de Kirwan
Kürth.
A. de Lapparent.
Chan. Ferdinand Lefebvre.
Abbé Maurice Lefebvre.
Cte G. de Lichtervelde.
Cte Adolphe de Limburg-Stirum.
Édouard Martens.
Henri Matagne.
Abbé Mir.
Abbé Monchamp.
Mis de Nadaillac.
Puga.
Abbé Rachou.
Ramirez.
Abbé Renard.
Risueño
Ém. de la Roche.
Roussel

MM. De la Royère.
Scarsez de Locqueneuille.
R. P. Schmitz, S. J.
H. Siret.
L. Siret.
Abbé Smets.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
John Storms.
Raymond Storms.
Suchetet.
Chanoine Swolfs.
De la Vallée Poussin.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Abbé G. Van den Gheyn.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Van Segvelt.
Vaultrin.
Vélain.
Abbé Verhelst.
R. P. Vicent, S. J.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4e Section.

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Barcia Caballero.
Borginon.
Bourdeau.

MM. Bribosia.
Charlier.
Cuylits.

MM. Debaisieux.
De Buck.
Degive.
Dr De Lantsheere.
Delétrez.
Desplats.
Achille Dumont.
Eeckman.
Faucon.
Feijeiro.
Francotte.
Gallez.
Gilson.
Glorieux.
Goix.
Goris.
R. P. Hahn, S. J.
Heymans.
Houze.
Huyberechts.
Alexandre Lagasse.
Lahousse.

MM. Lebon.
Ledresseur.
Dr Lefebvre.
Masoin.
Jules Matagne.
Meessen.
Dr Mercier.
Miot.
Mœller.
Proost.
Reynaert.
Schobbens
Struelens.
Van Dromme.
Van Ermengem
Van Hoeck.
Van Keerberghen
Venneman.
Verriest.
Warlomont.
Dr Wéry.

5e Section.

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle.

MM. Berleur.
Cartuyvels.
Pce Juste de Croy.
Davignon.
De Baets.
Camille De Jaer.
Léon De Lantsheere.
De Marbaix.

MM. Dohet.
Grandmont.
Grenier.
Bon Houtart.
Claudio Jannet.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Cher de Moreau d'Andoy.

MM. Otto.
Pecher.
Peeters.
de Ponthière.
Pce de Rubempré.
Henri Saey.
Smekens.
Stinglhamber.

MM. Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
t'Serstevens.
Van der Smissen.
van Zuylen-Orban.
Vte Vilain XIIII.
Cte Amédée Visart.
Abbé Walravens.
Vincent Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL.

1891 - 1892.

—

Président, M. le Dr LEFEBVRE.
1er *Vice-Président,* M. le Mis DEL SOCORRO.
2e *Vice-Président,* M. le Mis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
Secrétaire, M. P. MANSION.
Trésorier, M. J. DE BRUYN.

MM. le Chanoine DELVIGNE.
Colonel DE TILLY.
Fr. DEWALQUE.
G. DEWALQUE.
André DUMONT.
Ph. GILBERT.
É. GOEDSEELS.
Général JACMART.
Ch. LAGASSE.
Dr MOELLER.
A. PROOST.
Cte Fr. VAN DER STRATEN-PONTHOZ.
Chanoine SWOLFS.
L. T'SERSTEVENS.
Ch. DE LA VALLÉE-POUSSIN

MEMBRES DU CONSEIL.

1892-1893.

Président, M. A. DE LAPPARENT.

1er *Vice-Président*, M. CH. LAGASSE.

2e *Vice-Président*, M. le chanoine SWOLFS.

Secrétaire, M. P. MANSION.

Trésorier, M. Jules DE BRUYN.

MM. le Mis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
Chanoine DELVIGNE.
Colonel DE TILLY.
Fr. DEWALQUE.
G. DEWALQUE.
André DUMONT.
É. GOEDSEELS.
Général JACMART.
Godefroid KURTH.
Dr LEFEBVRE.
Dr MOELLER.
A. PROOST.
Cte Fr. VAN DER STRATEN-PONTHOZ.
L. T'SERSTEVENS.
Ch. DE LA VALLÉE POUSSIN.

BUREAUX DES SECTIONS.

1891 - 1892.

—

1re Section.

Président, M. Le Paige.
Vice-Présidents, MM. Pasquier et Suttor.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. L. Henry.
Vice-Présidents, MM. Fr. Dewalque et Lemoine.
Secrétaire, M. A. Van Biervliet.

3e Section.

Président, M. le chan. Delvigne.
Vice-Présidents, M. le chan. Swolfs et le R. P. Van den Gheyn.
Secrétaire, M. Dollo.

4e Section.

Président, M. Moeller.
Vice-Présidents, MM. Cuylits et Borginon.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, M. de Gerlache.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Thiébauld.
Secrétaire, M. J. De Lantsheere.

BUREAUX DES SECTIONS.

1892-1893.

—

1re Section.

Président, M. Hermite.
Vice-Présidents, MM. J. Carnoy et E. Goedseels.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. Van der Mensbrugghe.
Vice-Présidents, MM. L. Henry et Demanet.
Secrétaire, M. F. Leconte

3e Section.

Président, M. le chan. Delvigne.
Vice-Présidents, M. le chan. Swolfs et le R. P. Van den Gheyn.
Secrétaire, M. Dollo.

4e Section.

Président, M. Moeller.
Vice-Présidents, MM. Cuylits et Borginon.
Secrétaire, M. A. Dumont.

5e Section.

Président, N.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et N.
Secrétaire, M. L. De Lantsheere.

SESSION DU JEUDI 29 OCTOBRE 1891

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

M. Gilbert présente un Mémoire de M. de Sparre, intitulé : *Sur le développement en série des formules du mouvement du pendule conique et sur quelques propriétés de ce mouvement,* et en fait l'analyse suivante :

La note de M. le comte de Sparre sur le pendule conique a pour but :

1° De donner la solution du problème du mouvement du pendule sous une forme nouvelle, par des séries convergentes, sans faire usage des fonctions elliptiques, de manière que cette solution peut sans difficulté entrer dans l'enseignement classique.

Les séries obtenues par M. de Sparre, lorsqu'on les borne aux premiers termes, mettent immédiatement en évidence le théorème de Puiseux, d'après lequel l'angle dont l'azimut du pendule varie dans l'intervalle compris entre un maximum et un minimum de l'écart du pendule sur la verticale, est toujours supérieur à un angle droit; elles démontrent aussi le théorème de Resal, d'après lequel la projection horizontale du mobile décrit une ellipse dont les axes sont mobiles, et elles font connaître la vitesse angulaire de la rotation de cette ellipse.

2° Dans la seconde partie de sa note, M. le comte de Sparre s'occupe des points d'inflexion de la trajectoire décrite par la

projection horizontale du pendule. Halphen a démontré que ces points correspondent à une tension nulle de la tige. M. de Sparre généralise ce théorème en prouvant, par l'analyse et par un raisonnement géométrique, que dans le mouvement d'un point sur une surface quelconque la pression ne peut devenir nulle que si la force motrice est comprise dans le plan osculateur de la trajectoire. S'appuyant sur ce principe, il cherche les conditions qui doivent être remplies pour que la projection horizontale de la trajectoire présente des points d'inflexion et détermine les coordonnées de ces points.

Sont désignés pour examiner ce mémoire : MM. Gilbert et De Tilly.

M. Mansion fait connaître une généralisation nouvelle de la formule approximative de Snell et d'Ozanam, dont il a antérieurement entretenu la section (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, p. 45). On a, avec une erreur toujours de même sens,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{X_1X_2\ldots X_n} = \frac{n\pi}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} \quad (n > 3)$$

si $X_i = 1 + a_i x^2$. Cette curieuse formule approximative est elle-même susceptible de diverses généralisations. L'erreur croît avec les paramètres a, pourvu que a_i soit inférieur à [illegible].

M. Gilbert fait ensuite une communication *Sur la formule de Stokes généralisée*, dont voici un extrait :

I. J'ai signalé dans une précédente séance l'emploi avantageux des cosinus directeurs X, Y, Z de la normale, dans l'étude de la courbure d'une surface, et surtout, lorsqu'on applique la belle formule de Stokes pour ramener une intégrale de surface à une intégrale de ligne. On a donné de cette formule diverses démonstrations ; la suivante, très simple, n'exige que des notions tout à fait classiques.

Soient S une portion de surface limitée par un contour fermé C; U, V, W des fonctions de x, y, z; p et q les dérivées partielles de z tirées de l'équation de la surface, en sorte que

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

On aura

$$\int_C (U\,dx + V\,dy + W\,dz) = \int_C \left[(U + pW)\,dx + (V + qW)\,dy\right].$$

Appelons C_1 la projection de C sur le plan XY; S_1 la portion de ce plan comprise dans le contour C_1; $d\sigma_1$ l'élément de S_1. On sait, par la formule de Green dans le plan, que l'on a la relation

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} \left[(U + pW)\,dx + (V + qW)\,dy\right] \\
&= \int_{S_1} \left[\frac{\partial}{\partial x}(V + qW) - \frac{\partial}{\partial y}(U + pW)\right] d\sigma_1 \\
&= \int_{S_1} \left[\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} - q\frac{\partial U}{\partial z} + W\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\right. \\
&\left. + q\left(\frac{\partial W}{\partial x} + p\frac{\partial W}{\partial z}\right) - p\left(\frac{\partial W}{\partial y} + q\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right] d\sigma_1.
\end{aligned}$$

Mais on a $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$; $\frac{\partial W}{\partial z}$ disparaît. On a d'ailleurs

$$p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z}, \quad d\sigma_1 = Z\,d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément de la surface S. Substituant, il vient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_C (U\,dx + V\,dy + W\,dz) \\ &= \int_S \left[X\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] d\sigma, \end{aligned} \right.$$

ce qui est la formule de Stokes.

2. On obtient facilement la généralisation suivante de cette formule, qui est très utile. Soient L, M, N des fonctions déterminées des variables x, y, z. On trouve

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{c}(\mathrm{U}d\mathrm{L} + \mathrm{V}d\mathrm{M} + \mathrm{W}d\mathrm{N}) = \int_{s} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} \end{vmatrix} d\sigma \\
&+ \int_{s} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} \end{vmatrix} d\sigma + \int_{s} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} \end{vmatrix} d\sigma.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (1) et (2) se prêtent à des applications géométriques très intéressantes. Bornons-nous à en indiquer une. Si dans la formule (2) on pose $\mathrm{V} = 0$, $\mathrm{W} = 0$, $\mathrm{U} = \mathrm{X}$, $\mathrm{L} = \mathrm{Y}$, on a

$$
\int_{c} \mathrm{X}d\mathrm{Y} = \int_{s} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} & \frac{\mathrm{Y}\partial}{\partial z} \end{vmatrix} d\sigma.
$$

Le déterminant sous le signe $\int$, d'après une formule que j'ai donnée dans une séance précédente, représente la quantité

$$
\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}'\mathrm{R}''},
$$

R′, R″ étant les rayons de courbure principaux de l'élément $d\sigma$. Donc, si nous désignons par $d\sigma_1$ la projection de $d\sigma$ sur le plan XY, nous aurons la relation curieuse

$$
\int_{s} \frac{d\sigma_1}{\mathrm{R}'\mathrm{R}''} = \int_{c} \mathrm{X}d\mathrm{Y}.
$$

M. Goedseels résume un travail *Sur les fonctions sans dérivées en cinématique*, qu'il soumet à la section.

On admet généralement en mécanique rationnelle l'existence de toutes les dérivées qui interviennent dans les raisonnements, de manière que l'on range implicitement dans la catégorie des mouvements singuliers tous ceux où ces conditions ne sont pas réalisées. Il y aurait peu de chose à redire à cette manière de procéder si l'on n'employait jamais que le plus petit nombre possible de variables indépendantes, et si on laissait toujours aux systèmes d'axes rectangulaires employés une position arbitraire. Mais il n'en est pas ainsi : pour faciliter les démonstrations, on peut être amené à placer les axes dans des positions spéciales et à introduire des variables auxiliaires, par exemple, les neuf cosinus directeurs d'un système d'axes mobiles. Or, quand ces cosinus prennent certaines valeurs particulières, leurs dérivées ont une forme indéterminée, qui fait douter de l'existence même de ces fonctions. Si les dérivées cessaient vraiment d'exister dans ces cas, on pourrait en conclure qu'on ne peut pas rendre les axes mobiles parallèles aux axes fixes.

Comme cette position particulière des axes mobiles, dans bien des cas, facilite cependant les démonstrations, il importe d'établir, par une autre voie, que l'on n'est pas forcé de renoncer à cet artifice de calcul et de raisonnement. M. Goedseels indique comment il établit rigoureusement, d'une manière simple, qu'il n'y a pas d'indétermination réelle dans les cas cités plus haut, si la figure considérée se meut de manière que trois de ses points aient des vitesses et des accélérations déterminées. Il déduit, chemin faisant, de son mode d'exposition diverses propositions relatives à la représentation géométrique des vitesses d'un solide mobile.

M. Gilbert fait observer que l'on rencontre des difficultés du genre de celles que signale M. Goedseels, non seulement dans la question générale du mouvement d'un corps, mais aussi dans diverses questions spéciales. Ainsi, dans l'étude du pendule de Foucault et du pendule conique, on est amené à étudier la dérivée

d'une fonction toujours extrêmement petite, et il est difficile de voir si cette dérivée est aussi très petite.

M. Mansion pense que, dans les cas analogues à ceux qui ont été signalés par M. Goedseels, l'indétermination n'est qu'apparente et provient de l'emploi abusif de la règle de la dérivation des fonctions de fonction. Celle-ci peut n'être pas applicable, quand elle conduit à des résultats de la forme $0 \times \infty$. Dans les cas de ce genre, on trouve souvent la dérivée par l'emploi direct de la définition de cette fonction.

La section nomme MM. De Tilly et Gilbert commissaires pour examiner le travail de M. Goedseels.

M. Ch. de la Vallée Poussin communique une *Note sur des intégrales à limites infinies d'une forme particulière,* dont voici la partie essentielle :

L'intégrale définie

$$I = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

peut avoir une valeur finie et déterminée, quand $f(x)$ reste toujours de même signe, si cette fonction tend vers zéro en même temps que x vers l'infini. Mais, quoique certains auteurs aient pu dire le contraire, cette condition n'est pas nécessaire, et l'intégrale I peut avoir une valeur finie sans que $f(x)$ change de signe ou tende vers zéro. Les intégrales de cette nature ont récemment attiré l'attention de plusieurs géomètres distingués, qui ont signalé la remarque précédente comme nouvelle et digne d'intérêt. M. Thomæ, le premier (*Zeitschrift für Mathematik* de Schlömilch, 1877, t. XXIII, p. 68), a signalé un exemple d'une fonction $f(x)$ qui finit même par acquérir des valeurs aussi grandes qu'on le veut et dont cependant l'intégrale ne cesse pas d'exister. P. du Bois-Reymond (*Mathematische Annalen,* 1878, t. XIII, p. 251) en a indiqué de nouveaux exemples, entre autres l'intégrale très simple :

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^4 \sin^2 x}\,d\alpha.$$

Enfin, M. Ph. Gilbert, à qui nous empruntons ces renseignements, a complètement éclairci la question dans un travail communiqué d'abord à la *Société scientifique de Bruxelles* (1887, t. XII, 1re partie, pp. 46, 49) et publié dans le *Bulletin des sciences mathématiques* de M. Darboux (mars 1888, 2e série, t. XII, 1re partie, pp. 66-76), et il a démontré par une analyse ingénieuse et des exemples multipliés le résultat vraiment curieux que voici :

Il est possible, d'une infinité de manières, de déterminer la fonction $f(x)$ de telle façon que cette fonction, restant toujours positive, devienne infinie un nombre de fois aussi grand qu'on le veut dans le plus petit intervalle donné à partir d'une valeur donnée de x, *et que cependant l'intégrale* $\int_0^\infty f(x)dx$ *ait une valeur déterminée.*

Aucun des auteurs précités n'indique d'exemple satisfaisant à ces conditions parmi les intégrales anciennement connues, et aucun des exemples qu'ils ont trouvés ne peut s'exprimer exactement sous forme finie. Ces deux lacunes peuvent être comblées. En effet, nous avons trouvé, par une méthode qui fera peut-être l'objet d'un travail plus étendu, les quatre résultats ci-dessous :

$$\int_0^\infty \frac{l\ \sin^2 \alpha x}{1+x^2}dx = \pi l\,\frac{1-e^{-2\alpha}}{2},\qquad \int_0^\infty \frac{l.\cos^2 \alpha x}{1+x^2}dx = \pi l\,\frac{1+e^{-2\alpha}}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{l.\cos^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)}dx = -\pi l\,\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2},\qquad \int_0^\infty \frac{l.\cos^2 \alpha x}{x^2}dx = -\alpha\pi.$$

On y reconnaît, à première vue, quatre fonctions jouissant des propriétés dont il s'agit. Or, les deux premières sont connues depuis longtemps et sont signalées par Bierens de Haan à sa table 415. Les deux autres n'y sont pas et sont peut-être nouvelles.

La première de ces intégrales présente une anomalie singulière : sa valeur croît avec α et est, par conséquent, d'autant plus grande que la fonction sous le signe $\int$ passe plus souvent par l'infini négatif. La dernière est intéressante par sa grande sim-

plicité. On peut encore la simplifier davantage; en changeant x en $\frac{1}{z}$, il vient :

$$\int_0^\infty l \cos^2 \frac{\alpha}{z} dz = -\alpha\pi,$$

relation curieuse, car la fonction sous le signe passe un nombre illimité de fois par l'infini quand z tend vers zéro, et le résultat se présente sous une forme dont la simplicité est frappante.

M. Ch. de la Vallée Poussin communique ensuite à la section une *Note sur certaines inégalités et leur application au calcul intégral.*

1. Théorème I. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ deux suites de quantités positives et en nombre égal, p un nombre quelconque compris entre *zéro* et *un*; on a la relation

$$(1) \quad a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots \overline{\overline{<}} \left(a_1^{\frac{1}{p}} + a_2^{\frac{1}{p}} + \cdots\right)^p \left(b_1^{\frac{1}{1-p}} + b_2^{\frac{1}{1-p}} + \cdots\right)^{1-p}.$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, cette inégalité donne la suivante, qui est très connue et facile à vérifier,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots \overline{\overline{<}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots}$$

Nous allons en déduire la première.

2. Supposons d'abord que p soit l'inverse d'une puissance entière de *deux;* il suffit, pour établir la formule dans ce cas particulier, de démontrer que si elle est vraie pour $p = \frac{1}{n}$, elle l'est aussi pour $p = \frac{1}{2n}$.

On a identiquement, quel que soit q,

$$\Sigma ab = \Sigma(b^q . ab^{1-q}).$$

Mais pour $p = \frac{1}{2}$, puis pour $p = \frac{1}{n}$, on a successivement :

$$(\Sigma ab)^2 \overline{\overline{<}} \Sigma b^{2q} . \Sigma a^2 b^{2(1-q)},$$

$$\Sigma a^2 . b^{2(1-q)} \overline{\overline{<}} (\Sigma a^{2n})^{\frac{1}{n}} \left(\Sigma b^{2(1-q)\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Déterminons q par les relations compatibles

$$2q = 2(1-q)\frac{n}{n-1} = \frac{2n}{2n-1};$$

il viendra, en substituant,

$$\sum ab \leqq \left(\sum a^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\sum b^{\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}}\right)^{1-\frac{1}{2n}},$$

et c'est la formule qu'il s'agissait d'établir.

3. Considérons, en second lieu, le cas où p est une fraction dont le dénominateur est une puissance de *deux*. Il suffit, pour établir la formule dans cette nouvelle hypothèse, de démontrer que si elle est vraie pour $p = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, p = \frac{n-1}{n}$, elle le sera aussi pour $p = \frac{2k+1}{2n} (k \geqq 1)$

D'après la nature de la formule à démontrer, on peut toujours supposer $p < \frac{1}{2}$ et, par conséquent, $k < \frac{n}{2}$.

On a identiquement, quels que soient q et r,

$$\sum ab = \sum a^q b^r \,.\, a^{1-q} b^{1-r}.$$

Mais, pour $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{k}{n}$, $p = \frac{k+1}{n}$, on a successivement

$$\left(\sum ab\right)^2 \leq \sum a^{2q} b^{2r} \sum a^{2(1-q)} b^{2(1-r)},$$

$$\sum a^{2q} b^{2r} \leq \left(\sum a^{2q\frac{n}{k}}\right)^{\frac{k}{n}} \left(\sum b^{2r\frac{1}{1-\frac{k}{n}}}\right)^{1-\frac{k}{n}},$$

$$\sum a^{2(1-q)} b^{2(1-r)} \leq \left(\sum a^{2(1-q)\frac{n}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{n}} \left(\sum b^{2(1-r)\frac{1}{1-\frac{k+1}{n}}}\right)^{1-\frac{k+1}{n}}.$$

Déterminons q et r par les relations compatibles

$$2q\frac{n}{k} = 2(1-q)\frac{n}{k+1} = \frac{2n}{2k+1},$$

$$2r\frac{1}{1-\frac{k}{n}} = 2(1-r)\frac{1}{1-\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{1-\frac{2k+1}{2n}},$$

nous trouverons, en substituant,

$$\sum ab \leqq \left(\sum a^{\frac{2n}{2k+1}}\right)^{\frac{2k+1}{2n}} \left(\sum b^{\frac{1}{1-\frac{2k+1}{2n}}}\right)^{1-\frac{2k+1}{2n}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Passons au cas général. Quel que soit p, on peut le considérer comme la limite d'une fraction p' dont le dénominateur est une puissance de *deux* et dont les deux termes augmentent indéfiniment. L'inégalité (1) sera vérifiée pour toute valeur de p', et en passant à la limite, on en déduit sans peine qu'elle subsiste pour $p' = p$. Cette extension ne présentant aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

5. Théorème II. Soient, comme tantôt, $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$, deux suites des quantités positives en nombre égal, p un nombre positif quelconque; on a

$$\sum ab \geqq \frac{\left(a_1^{\frac{p}{p+1}} + a_2^{\frac{p}{p+1}} + \ldots\right)^{\frac{p+1}{p}}}{\left(\frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p} + \ldots\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

En effet, le théorème précédent nous donne

$$\sum a^{\frac{p}{p+1}} = \sum a^{\frac{p}{p+1}} b^{\frac{p}{p+1}} \cdot b^{-\frac{p}{p+1}} \leqq \left(\sum ab\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\sum \frac{1}{b^p}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

et, en élevant à la puissance $\frac{p+1}{p}$, on en déduit la formule en question.

6. Les théorèmes I et II peuvent être utiles dans la théorie des séries. Nous nous contenterons d'indiquer l'application suivante du premier :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs et convergentes; si $0 < p < 1$, la série $\sum u_n^{1-p} v_n^p$ sera également convergente.

Nous allons maintenant montrer quelles sont les applications de ces deux théorèmes au calcul intégral.

7. Théorème I. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions positives et intégrables dans un intervalle (a, b), p un nombre compris entre *zéro* et *un;* on a la relation

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq \left(\int_a^b \varphi(x)^{\frac{1}{p}}\,dx\right)^p \left(\int_a^b \psi(x)^{\frac{1}{1-p}}\,dx\right)^{1-p}.$$

Soient, en effet, L et L′ les limites supérieures respectives de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ dans l'intervalle Δx; on a

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq \Sigma \mathrm{L}\mathrm{L}'\Delta x \leqq \Sigma \mathrm{L}\Delta x^p \,.\, \mathrm{L}'\Delta x^{1-p},$$

et, en vertu de la formule (1),

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq \left(\Sigma \mathrm{L}^{\frac{1}{p}}\,\Delta x\right)^p \left(\Sigma \mathrm{L}'^{\frac{1}{1-p}}\,\Delta x\right)^{1-p}.$$

Passons à la limite; le théorème sera démontré.

8. Théorème II. Soient encore $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions positives et intégrables dans un intervalle (a, b), p un nombre positif quelconque; si le minimum de $\psi(x)$ est plus grand que *zéro*, on a l'inégalité

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq \frac{\left(\int_a^b \varphi(x)^{\frac{p}{p+1}}\,dx\right)^{\frac{p+1}{p}}}{\left(\int_a^b \frac{dx}{\psi(x)^p}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

≧

Ce théorème peut se déduire du précédent.

9. Comme application du premier théorème, soit p une quantité positive plus petite que *un;* on a

$$\Gamma(1+p) = \int_0^\infty e^{-x} x^p\,dx = \int_0^\infty e^{-(1-p)x} \,.\, e^{-px} x^p\,dx.$$

$$\Gamma(1+p) \leqq \left[\int_0^\infty e^{-x}\,dx\right]^{1-p} \left[\int_0^\infty e^{-x} x\,dx\right]^p \leqq 1$$

Enfin, M. Pasquier expose rapidement les derniers progrès réalisés dans la question de l'*unification de l'heure*.

Au *Canada*, le Parlement, dans ses séances des 21 et 24 août dernier, a voté une loi déclarant légales les heures *normales* adoptées depuis 1883 par les chemins de fer et plus tard par un grand nombre de villes. La loi n'entrera cependant en vigueur dans chaque province ou partie de province que sur proclamation faite en conseil par le gouverneur général.

Un projet de loi similaire a été déposé, le 16 janvier 1891, à la Chambre et au Sénat des *États-Unis*, mais il ne paraît pas avoir encore été voté.

En *Angleterre*, une commission a été nommée en vue d'étudier les avantages qui résulteraient éventuellement de l'introduction du système des fuseaux horaires dans les colonies ; le rapport de la commission ayant été favorable à ce système, le gouvernement l'a communiqué à chacune de ses colonies, et leur a fortement recommandé la réforme préconisée. Cette intervention officielle de l'Angleterre doit être considérée comme très importante à cause du nombre et de l'étendue de ses colonies.

En *France*, la loi du 14 mars 1891 a rendu légal le temps moyen de Paris pour tout le pays, y compris l'Algérie. Cette loi s'applique à tous les services, à la vie civile comme aux chemins de fer, postes et télégraphes.

En *Belgique*, M. le Ministre Vandenpeereboom avait consulté les bourgmestres de tous les chefs-lieux d'arrondissement au sujet des inconvénients que pourrait entraîner l'adoption éventuelle de l'heure de Greenwich pour la vie civile : tous, à l'exception du bourgmestre de Bruxelles, ont répondu qu'il n'en résulterait aucun inconvénient. Une commission technique, nommée par le même ministre, et les bureaux de tous les Départements ministériels — à l'exception d'un seul qui s'est abstenu — ont émis un avis favorable à l'introduction du système des fuseaux horaires, avec Greenwich comme méridien initial. A la Chambre des représentants, MM. Helleputte, Hanssens et Houzeau, à l'occasion de la discussion du budget des chemins de fer, en avril dernier, ont renouvelé leurs déclarations en faveur

de cette réforme : le bon accueil que la Chambre a paru faire à ces déclarations permet de prévoir la présentation et le vote prochains d'une loi rendant légale en Belgique l'heure de Greenwich.

Cette loi sera d'autant plus facile à mettre en pratique que la Société du Grand-Central belge, qui a déjà, depuis le 1er juin dernier, introduit l'heure de Greenwich pour le service intérieur de la partie de son réseau située en Allemagne, est disposée à en étendre l'usage, sur tout son réseau, aux horaires destinés au public, et que, comme nous allons le voir, la Hollande et l'Allemagne sont entrées dans la même voie.

En *Hollande,* en effet, il y a quelques jours seulement, le gouvernement, qui n'avait pris jusqu'ici aucune décision sur le sujet en question, a autorisé l'adoption de l'heure de Greenwich pour le service intérieur des chemins de fer sur le territoire hollandais.

En *Prusse,* la « Mitteleuropäische Zeit » (M. E. Z. = heure de Greenwich, plus un) remplace pour ce même service l'heure de Berlin depuis le 1er juin dernier. Mais il est probable que l'on réalisera prochainement, dans ce pays, une réforme radicale de l'heure. On sait, en effet, que si l'assemblée générale du « Verein » n'a pas adopté, l'année dernière, la proposition de la commission spéciale d'introduire la M. E. Z. tant dans le service extérieur que dans le service intérieur, c'est que les délégués des administrations prussiennes s'y étaient opposés. Aujourd'hui, c'est la Direction royale de Prusse elle-même qui propose au « Verein » l'application de la M. E. Z. au service extérieur. Ce revirement semble s'être produit à la suite du discours prononcé au Reichstag, le 16 mars dernier, par feu le feld-maréchal von Moltke. Il n'est pas douteux que, lors de la prochaine assemblée générale du « Verein », probablement en juillet 1892, la proposition de la Direction royale de Prusse sera adoptée; de plus, l'attitude nouvelle du gouvernement prussien exercera évidemment une grande influence sur les pays voisins, et mérite, à ce point de vue, d'être spécialement signalée. En Prusse même, le remplacement, par la M. E. Z., de l'heure locale, encore univer-

sellement en usage aujourd'hui pour le service extérieur des chemins de fer, entraînera probablement, à bref délai, l'adoption de l'heure nouvelle pour la vie civile elle-même.

Les gouvernements des États de l'Allemagne du Sud (*Bavière*, *Wurtemberg* et *Grand-Duché de Bade*) ont, de leur côté, décidé l'introduction de la M. E. Z., dès le 1er avril prochain, dans les services, tant extérieur qu'intérieur, de leurs chemins de fer. Cette introduction aura lieu aussi, à la même époque, en Alsace-Lorraine.

Si l'on fait abstraction de l'Angleterre et de la Suède, qui sont hors de cause, c'est l'*Autriche-Hongrie* qui, au point de vue qui nous occupe, marche à la tête des nations européennes dans la voie du progrès : depuis le 1er octobre courant, la M. E. Z. y est en usage dans tous les services des chemins de fer, postes et télégraphes; déjà plusieurs villes autrichiennes ont adopté la même heure, et le Dr Peez, membre de la Chambre, a présenté, dans la séance de cette assemblée du 11 mai dernier, au nom de vingt-neuf de ses collègues, une pétition tendant à obtenir législativement l'extension de la nouvelle heure à la vie civile pour tout l'empire.

En résumé, on peut prévoir que pour l'hiver de 1892 ou au plus tard pour l'été de 1893, l'unification horaire sera réalisée par l'adoption soit de l'heure de Greenwich, soit de cette heure augmentée d'une unité, pour tous les services concernant les voies ferrées de l'Autriche-Hongrie, de l'Allemagne, de la Hollande, du Grand-Central belge et (il y a lieu de l'espérer) de la Belgique entière.

Il est difficile de prévoir la solution qui prévaudra en Italie. Sur les instances de l'Académie des sciences de Bologne, qui patronne le méridien de Jérusalem, le gouvernement italien a conçu le projet, l'année dernière, de réunir à Rome un nouveau congrès et a sondé à ce sujet les intentions de divers gouvernements étrangers. Depuis, ce projet paraît avoir été abandonné. En Italie même, diverses chambres de commerce et des savants de grande valeur, parmi lesquels M. Porro, directeur de l'Observatoire de Turin, se sont déclarés chauds partisans du

système des fuseaux horaires avec méridien initial passant à Greenwich. De plus, le congrès géographique de Berne, réuni en août dernier, a, sur la proposition d'une commission dont faisait partie le R. P. Tondini, émis, à l'unanimité, le vœu de voir le prochain congrès de l'unification de l'heure se réunir à Berne même : le gouvernement fédéral suisse se chargerait de son organisation, après s'être entendu avec le gouvernement italien.

Sans vouloir jeter le moindre doute sur l'utilité de ce congrès, M. Pasquier estime que l'adhésion à peu près unanime des nations civilisées au méridien de Greenwich devrait amener les partisans d'autres méridiens à ne plus lutter sur ce terrain; d'après lui, tous les efforts devraient, dès maintenant, se porter sur les autres difficultés qui restent à résoudre pour arriver définitivement à une unification horaire à la fois simple, rationnelle et pratique.

Des communications de M. Gilbert, *Sur les accélérations des divers ordres*, et de M. Mansion, *Sur les principes de la mécanique rationnelle*, sont remises à une séance ultérieure.

Deuxième section.

M. Félix Leconte décrit des *appareils nouveaux proposés pour la mesure de la perméabilité magnétique des fers et des fontes.*

Pratiquement, dans les applications industrielles, où le maintien d'un champ magnétique correspond à une dépense, on peut dire que μ est un coefficient de rendement économique, puisqu'il exprime le rapport entre la quantité de lignes de force maintenues dans un milieu et le travail dépensé pour les maintenir (1).

(1) *Théorie élémentaire de l'électricité et du magnétisme*, par F. Van Rysselberghe, Lagrange et Royers, p. 152.

Cette phrase montre bien l'importance pratique de la connaissance de la perméabilité magnétique du fer pour la construction des dynamos.

A la liste des appareils actuellement employés pour la mesure industrielle de ce coefficient, je propose d'ajouter les suivants, qui pourront, dans certains cas, être d'une application utile.

Supposons que nous ayons percé, vers l'extrémité d'un prisme quadrangulaire en fer, une ouverture cylindrique. Aimantons le barreau en l'entourant d'un solénoïde, et plaçons au-dessus de l'ouverture du barreau une petite masse creuse de fer doux suspendue à un ressort (fig. 1).

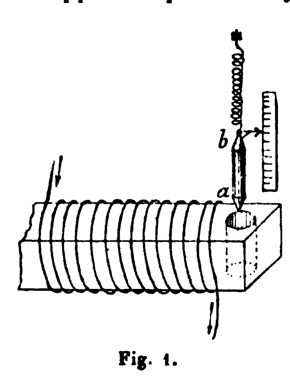


Fig. 1.

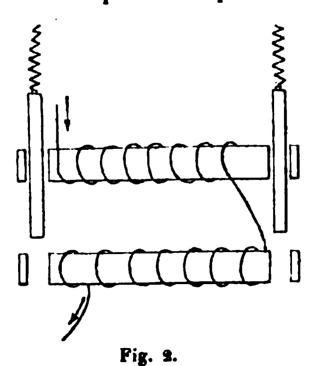
Cette masse a une tendance à se déplacer vers les parties du champ où l'intensité est maxima, donc elle sera aspirée dans l'ouverture cylindrique; on guidera *ab* au moyen d'une gaine en cuivre, comme dans les galvanomètres enregistreurs de Kohlrausch.

Dans cet appareil, le barreau percé d'une ouverture est la pièce à essayer; c'est le fer ou la fonte dont on veut connaître les propriétés magnétiques. Le flotteur *ab* sera muni d'un index se déplaçant sur une règle graduée empiriquement et donnant directement, en unités C. G. S., la valeur de μ ou de $\varkappa$ (susceptibilité magnétique). Les barreaux à comparer, faciles à construire, auront tous les mêmes dimensions, et l'ouverture cylindrique sera percée toujours à la même distance de l'extrémité; ils joueront, dans cet appareil, le même rôle que les éprouvettes dans les questions de résistance.

Peut-être devrons-nous, pour obtenir des résultats convenables, assimiler complètement notre appareil à un galvanomètre Kohlrausch; il nous suffira de disposer deux barreaux identiques, de telle façon que les ouvertures cylindriques se correspondent sur une même verticale, et de provoquer aux extrémités des pôles de noms contraires. L'appareil, sous cette forme, peut être double

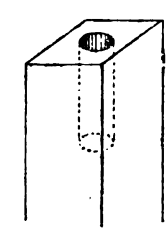
et permet de prendre la moyenne de deux observations (fig. 2).

Il sera peut-être plus avantageux de percer l'ouverture dans le sens de l'axe de la barre; on pourra remplir le creux cylindrique d'eau ou d'huile pour diminuer les frottements par collage, et y plonger un simple aréomètre en fer portant une graduation directe (fig. 3). L'appareil est analogue, dans ce cas, à l'aréomètre électrique de M. de Lalande.


Fig. 2.

Dans l'appareil représenté figure 2, on pourrait renverser les rôles; les éprouvettes seraient les cylindres verticaux attachés aux ressorts, tous les autres éléments demeurant constants.

Laquelle de ces dispositions sera la meilleure? Nous n'en savons rien. L'expérience seule peut nous éclairer sur ce point.


Fig. 3.

Voici encore un appareil qui pourrait, dans le même ordre d'idées, rendre quelques services. Il est représenté figure 4. C'est une simple roue de Barlow. Pour éviter d'amener le courant à l'axe de la roue par le coussinet C, qui généralement doit être huilé, je prolonge l'axe et je fixe à son extrémité un petit disque métallique tournant, comme la roue elle-même, dans un godet rempli de mercure. L'un des barreaux représenté dans la figure 4 serait fixe, l'autre serait le barreau à essayer; ou encore, les deux barreaux seraient construits avec le fer à expérimenter. Un compteur T, établi sur l'axe, permettrait de déterminer le nombre de tours de la roue dans un temps donné. Tous les éléments autres que la nature du fer à essayer étant les

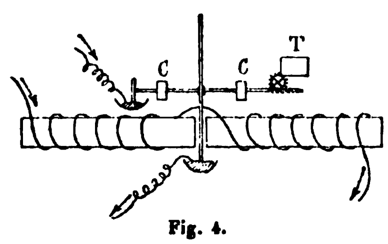


Fig. 4.

mêmes, on pourrait établir des tables donnant directement μ en fonction du nombre de tours.

Il est évident que les éprouvettes, dans ce cas comme dans les cas précédents, peuvent avoir la forme cylindrique.

M. Leconte se propose, sans rien préjuger de la valeur de ces appareils, de comparer au point de vue pratique les méthodes ci-dessus décrites avec les méthodes d'Ewing, de Rowland, d'Hopkinson, etc.

M. Delacre appelle l'attention de la section *sur quelques anomalies de la méthode cryoscopique*.

Il a décrit antérieurement les réactions qui permettent d'admettre que le corps connu depuis longtemps sous le nom de benzopinacoline α n'est autre que l'éther de la benzopinacone et répond donc à la formule

$$\begin{array}{ccccc} & & O & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ (C^6H^5)^2 = & C & & C & = (C^6H^5)^2 \\ & | & & | & \\ (C^6H^5)^2 = & C & & C & = (C^6H^5)^2 \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & O & & \end{array}$$

Cependant la détermination cryoscopique conduit au poids moléculaire 348. Ce chiffre correspond sensiblement à la moitié du poids moléculaire qui représenterait la formule donnée ci-dessus. Ce résultat a été confirmé par M. Paul Henry, qui a bien voulu déterminer la tension de vapeur de la solution sulfocarbonique et a déduit un poids moléculaire égal à environ 350.

On sait la facilité avec laquelle la benzopinacoline α se scinde en deux molécules de benzopinacoline β

$$\begin{array}{lcl} (C^6H^5)^2 = C & \diagdown & \\ \quad\quad\quad\quad | & & O. \\ (C^6H^5)^2 = C & \diagup & \end{array}$$

Si l'on voulait attribuer aux déterminations cryoscopiques l'importance directe qu'on leur donne généralement pour déduire la constitution des solutions, il faudrait donc admettre qu'une solution benzinique de benzopinacoline α agit comme si ce corps s'y trouvait réellement scindé en deux molécules de benzopinaco-

line β. M. Delacre ne veut tirer aucune conclusion de ce genre pour le moment. Il croit à peine nécessaire de mentionner que la solution de benzopinacoline α examinée abandonne par évaporation le produit primitif avec tous ses caractères.

L'auteur a confirmé ces résultats par de nouvelles recherches, sur lesquelles il compte revenir. Il signale dès maintenant que le dypnopinalcolène décrit récemment par lui, $C^{32}H^{26}$, et susceptible de se scinder en $C^{24}H^{18} + C^{8}H^{8}$, accuse un poids moléculaire qui se rapproche plus de $C^{24}H^{18}$ que de $C^{32}H^{26}$.

M. Fr. De Walque a eu dernièrement à constater des différences considérables entre les résultats d'analyses de divers chimistes qui avaient déterminé la teneur en matière grasse d'une même substance.

Pour rechercher la raison de ces divergences, il a examiné divers échantillons d'éther fournis tous comme purs; cinq échantillons ont été examinés et, sauf un seul indiqué comme ayant été redistillé sur du sodium, ils ont été trouvés renfermer un peu d'eau et de l'alcool.

Ces divers éthers ont été utilisés pour l'extraction de la matière grasse, et les résultats ont été tous différents. On le comprend, l'eau et l'alcool, quoique dissous dans l'éther, agissent eux-mêmes comme dissolvants de divers corps (acides divers, glycérine, etc.) qui peuvent se trouver dans la substance soumise à l'analyse.

La conclusion qui s'impose est donc que, pour le dosage des matières grasses, l'extraction au moyen de l'éther, en se servant des appareils de déplacement Soxhlet ou autres, ne doit se faire qu'en employant de l'éther purifié, déshydraté préalablement au moyen du sodium et redistillé. C'est cet éther que l'on emploie exclusivement dans les laboratoires des Stations agricoles de l'Allemagne, et l'on ne devrait jamais en employer d'autres.

Le même entretient ensuite la section de la rapidité de formation des précipités sous l'influence d'une agitation continue. Les précipités de phosphate ammoniaco-magnésique, de phosphomolybdate d'ammoniaque, etc., qui, d'après la plupart des auteurs,

demandent pour se former un repos à douce chaleur, pendant plusieurs heures, peuvent s'obtenir à froid, en 12 à 15 minutes, sous l'influence d'une agitation continue.

Pour cela, il faut évidemment des agitateurs mécaniques, que l'on peut installer, sans difficulté, dans les laboratoires disposant d'une conduite d'eau sous pression.

Nous avons pu vérifier le fait qui nous avait été annoncé dans une de nos dernières excursions en Allemagne. Un agitateur de J. Schaefer, de Bonn, est actuellement monté dans notre laboratoire, et nous en attendons les meilleurs résultats.

Enfin, M. Van der Mensbrugghe communique à la section les remarques suivantes, *Sur les variations d'éclat produites à la surface de certains corps par le dépôt d'une couche mouillante.*

Tout le monde sait que l'eau produit des taches plus ou moins foncées à la surface des pavés, des pierres de taille, du bois, de la terre, etc., mais peu de personnes se sont demandé sans doute la cause de ce phénomène, et pourtant n'est-il pas étonnant qu'une matière aussi transparente que l'eau pure, par exemple, soit capable de produire momentanément de vraies taches noires sur certains corps? Pour comprendre aisément ce singulier effet, il suffit de se rappeler que tous les corps qui n'ont pas reçu un haut degré de poli ont des surfaces rugueuses et présentent à la lumière mille et mille facettes microscopiques sans doute, mais suffisantes pour réfléchir les rayons lumineux et pour répandre sur le corps un éclat relativement considérable. Or, au moment où l'on mouille partiellement le corps, une partie de la surface rugueuse est remplacée par une couche liquide remplissant tous les creux et ayant une face libre douée d'un très grand pouvoir réflecteur; dès lors cette dernière, au lieu de pouvoir renvoyer à l'œil des rayons venus de toutes parts, ne sera plus capable de faire parvenir à l'observateur que de la lumière réfléchie régulièrement; il suit de là que si les plans passent : 1° par l'œil, 2° par une normale quelconque à la portion mouillée, ne renfermant pas une source lumineuse quelconque, cette portion paraîtra forcément noire.

Pour confirmer cette manière de voir, il suffit de disposer le corps de manière qu'un ou plusieurs des plans ci-dessus passent par la flamme d'une lampe, par une portion du ciel, pour qu'à l'endroit mouillé le corps paraisse plus éclatant qu'ailleurs. On comprend qu'on peut faire varier l'éclat à volonté en remplissant plus ou moins parfaitement la condition ci-dessus.

A cette explication se rattachent naturellement bien des faits isolés, dont on ne peut parler que dans une communication plus étendue.

M. Van der Mensbrugghe signale aussi l'avantage qu'il y a à faire raboter le bois de toutes les charpentes plutôt que de laisser les surfaces à l'état brut ou couvertes de sciure : en vertu d'une formule de sir W. Thomson, toute rugosité du bois provoque constamment la condensation de la vapeur d'eau à une température supérieure au point de rosée sur une surface plane; il suit de là que les germes destructeurs se déposent à la fois plus nombreux et plus humides sur le bois rugueux que sur le bois parfaitement raboté. — Bien d'autres faits peuvent être cités à l'appui de la formule de sir W. Thomson.

Troisième section.

—

Le R. P. Van den Gheyn résume sommairement l'ensemble des travaux présentés à la section d'anthropologie du deuxième Congrès international scientifique des catholiques, qui s'est tenu à Paris en avril 1891. Il le fait d'autant plus volontiers que ces travaux ont été, pour une large part, fournis par des membres de la Société scientifique : MM. de Nadaillac, d'Acy, Arcelin, de Kirwan, Henri de Beauffort, de Maricourt, De Lantsheere.

La section a eu six séances, du jeudi 2 avril au lundi 6 avril. C'est la grande question de l'évolution qui a d'abord occupé, pendant deux réunions consécutives, l'attention des anthropologistes du Congrès. Dans un magistral rapport, intitulé : *Les progrès de l'anthropologie*, M. le M[is] de Nadaillac a démontré que les faits le plus récemment observés et les dernières théories

de la science se posent comme de moins en moins favorables à la doctrine de l'évolution. Conclusion appuyée, à un point de vue plus général et plutôt philosophique, par un travail de M. le chanoine Duilhé de Saint-Projet sur *Les méthodes et la certitude en anthropologie*. D'autre part, les systèmes évolutionnistes, dans les limites toutefois de l'orthodoxie la plus stricte, ont trouvé un défenseur convaincu en M. le Dr Maisonneuve, professeur aux Facultés catholiques d'Angers, qui a exposé en détail et avec une érudition très étendue les nombreux arguments qui lui paraissent patronner l'hypothèse évolutionniste.

Ces trois rapports ont donné le signal d'une longue discussion, menée toutefois avec grande largeur de vues. Si les partisans de l'absolue fixité des espèces ont été brillamment représentés par MM. le Dr Jousset, Cte de Maricourt, Vte de Méré, Mis de Nadaillac et le R. P. Leray, les transformistes, d'autre part, ont été éloquemment défendus par MM. Maisonneuve, l'abbé Guillemet, l'abbé Boulay et M. Suchetet. En tout cas, Mgr Freppel, Mgr d'Hulst et le R. P. Poulain ont proclamé toute la liberté de la science, en demandant toutefois des faits mieux établis et ayant une portée plus convaincante.

Dans la troisième séance, M. Arcelin a présenté une étude sur *La période glaciaire*, que nous avons pu lire dans la *Revue des questions scientifiques* (1). M. d'Acy a cru devoir formuler quelques objections contre ce travail : il ne saurait se rallier à la théorie de Prestwich, admise par M. Arcelin, pour la classification chronologique des alluvions. Il ne pense pas non plus, avec M. Arcelin, que *tous* les dépôts où se rencontrent des espèces animales dites froides avec des espèces dites chaudes aient été remaniés. Ce mélange ne rajeunit pas non plus nécessairement les dépôts où il est constaté. Enfin, M. d'Acy déclare ne pouvoir admettre que la dernière extension des glaciers en Angleterre a coïncidé avec l'âge du renne en France.

On sait le retentissement qu'a eu en Belgique la découverte des silex mesviniens par M. Delvaux et celle des silex préqua-

(1) Livraisons de janvier et d'avril 1891.

ternaires des environs de Mons par M. Cels. M. d'Acy a voulu en avoir le cœur net. Le résultat d'un examen très approfondi de la question a été de lui faire voir que les « silex mesviniens sont simplement, les uns des cailloux naturels, et les autres des éclats appartenant au commencement de l'époque du moustier », et que « les silex taillés tertiaires ou préquaternaires de MM. Cels et Mourlon appartiennent en réalité à l'étage inférieur du quaternaire » (1).

L'ethnographie et l'anthropologie américaine ont fourni le travail de M. le Dr Jousset sur les *Origines asiatiques de la civilisation américaine avant Christophe Colomb*, puis une étude de M. le Mis de Nadaillac sur les *Premiers vestiges de l'homme en Amérique* (2), et une note adressée de Saint-Paul (Minnesota, États-Unis) par le Rév. Gmeiner, sur les *Chronomètres géologiques de l'Amérique septentrionale et l'antiquité de l'homme américain.* Ces données s'accordent pour ne point reculer l'apparition de l'homme en Amérique au delà de la fin de la période glaciaire, et entre celle-ci et l'époque actuelle les chronomètres fournis par les chutes du Niagara et de Saint-Antoine n'accusent pas plus de huit à dix mille ans.

Dans une quatrième séance, commune avec la section de philosophie, M. de Kirwan a donné lecture d'un mémoire très approfondi sur *L'Instinct et la Raison*. Il a discuté les théories émises notamment par MM. de Quatrefages et Émile Blanchard qui, tout en reconnaissant des différences spécifiques entre la constitution intellectuelle de l'homme et celle de l'animal, ne donnent pas à ces différences toute leur étendue et toute leur réalité. Une partie de ce travail a été reproduite par la *Revue des questions scientifiques* (3).

Là aussi (4) a été publié le mémoire lu par le P. Van den Gheyn sur *L'origine asiatique de la race noire*, présenté au Congrès dans

---

(1) Livraison de juillet 1891.
(2) *Ibid*, juillet 1891.
(3) *Ibid.*, octobre 1891.
(4) *Ibid.*, avril 1891.

la cinquième séance de la section d'anthropologie. A la même séance, M. le Cte Henri de Beauffort étudie à nouveau les rochers sculptés de Klang et d'Alt-Linster en Lorraine, dont s'étaient occupées déjà la Société des Antiquaires de France et la Société archéologique lorraine. M. de Beauffort incline à leur attribuer une antiquité assez reculée; mais, surtout en ce qui concerne Klang, M. le Vte de Méré a fait des réserves formelles. Après le travail de M. de Beauffort, on a entendu une curieuse étude de M. le Cte de Maricourt sur *Les superstitions du pays de Galles.*

A la sixième séance, M. Tardy a fait voir une hache en silex recueillie en France, sur la route de Bourg à Nantua, près du vieux château de Bohan : type chelléen, trouvé au-dessus des alluvions recouvrant le glaciaire. L'homme chelléen serait-il donc postérieur aux glaciers? M. d'Acy, tout en constatant l'intérêt de la découverte de M. Tardy, fait une restriction : la hache chelléenne de Bohan, postérieure à la grande extension glaciaire, est antérieure au dernier mouvement en avant des glaciers qui, cette fois, ne sont pas descendus jusqu'en Bresse. La hache de Bohan est contemporaine de celle que M. Boule a trouvée dans les alluvions interglaciaires d'Aurillac.

M. l'abbé Wosinski, l'anthropologiste hongrois bien connu par la découverte de la fameuse grotte de Lengyell, a envoyé à la section un travail très complet sur *L'attitude repliée des morts à l'époque préhistorique.* On lira certainement avec grand intérêt cette étude qui donne un relevé fort exact de toutes les sépultures où l'on a constaté ce genre de traitement des morts.

Deux mémoires sur *L'origine du bronze* ont été présentés : l'un par M. d'Acy, l'autre par M. le Chan. Scheuffgen, prévôt du chapitre de Trèves. M. d'Acy s'est attaché surtout à interpréter les plus anciens documents historiques qui signalent l'emploi de ce métal; M. Scheuffgen a fait plutôt l'histoire des diverses théories qui ont été émises. Dans la discussion qui a suivi la présentation et la lecture de ces mémoires, on a surtout combattu le système de M. Wilser, qui place le premier centre de fabrication et le point de départ du bronze en Scandinavie. Les conclusions de cette discussion ramènent ce point de départ aux régions asiatiques, et en particulier au Caucase.

Les travaux de la section ont été clos par une communication très importante de M. Léon De Lantsheere sur *La race hittite* ou Héthéens de la Bible, Khétos des monuments égyptiens.

Si nous cherchons à dégager l'impression qui doit rester des travaux d'anthropologie présentés au Congrès de Paris, il faut dire que ces travaux n'ont pas eu l'heureuse fortune de dénoncer de brillantes découvertes. Du moins ils laissent cette conviction que les principales questions à l'ordre du jour de l'anthropologie ont été abordées avec une réelle compétence.

M. l'abbé Renard, professeur à l'Université de Gand, expose les résultats des recherches qu'il a faites avec M. John Murray *sur les formations sédimentaires actuelles comparées aux sédiments géologiques.*

Les sédiments des océans actuels peuvent se diviser en deux grands groupes : les sédiments terrigènes et les sédiments pélagiques. La première subdivision comprend ceux qui se déposent dans les zones littorales, dans des eaux peu profondes, sur la terrasse continentale sous-marine. La limite de ces dépôts vers la haute mer est marquée en général par la courbe bathymétrique de 100 brasses. Ces sédiments terrigènes sont composés essentiellement de matériaux entraînés des terres émergées. Les éléments qui forment ces dépôts offrent des traces de l'action mécanique de la mer, et leur accumulation est relativement rapide. Au point de vue de la composition et du mode de formation, on peut trouver des analogies entre les sédiments terrigènes des mers actuelles et les schistes, les marnes, les calcaires glauconifères et phosphatiques, certaines craies, les quartzites, les grès et les tufs volcaniques des formations géologiques. Les dépôts pélagiques se forment sous les eaux profondes des régions centrales de l'océan. Ils comprennent des vases organiques et l'argile rouge. On peut résumer leur composition et leur mode de formation en disant qu'ils sont essentiellement constitués par les restes d'organismes calcaires et siliceux qui habitaient les eaux superficielles et dont les débris se sont accumulés sur le fond de l'océan en se mêlant à l'argile et à des produits volcaniques incohérents. On ne constate

pas dans les éléments des sédiments pélagiques de traces de l'action mécanique de la mer; leur accumulation est lente, et parmi les divers types que nous présentent ces sédiments, il en est très peu qu'on puisse considérer comme identiques aux roches sédimentaires marines des continents. — M. Renard indique ensuite sur la carte des sédiments océaniques la distribution géographique et bathymétrique de ces formations actuelles; il fait ressortir leur passage insensible de l'une à l'autre et les caractères qui les distinguent suivant la profondeur et la distance à la côte.

M. Dollo présente à ce sujet quelques observations sur la faune abyssale.

Le R. P. Bolsius transmet à la section une note *sur un curieux paradoxe visuel*, d'après lequel, dans certains cas, malgré la distance invariable à l'œil, certains objets paraissent tantôt plus minces, tantôt plus volumineux.

Voici un fait que j'ai observé il y a quelque temps et qui me paraît digne d'être signalé. Il s'agit de l'appréciation paradoxale de la grandeur d'un même objet placé à des distances *fictives* différentes, mais qui reste, en réalité, à la même distance de l'observateur.

Je me trouvais à 3 mètres environ d'une rangée de colonnettes qui bordait une plate-forme. Ces colonnettes étaient toutes exactement les mêmes, comme dans la figure 1.

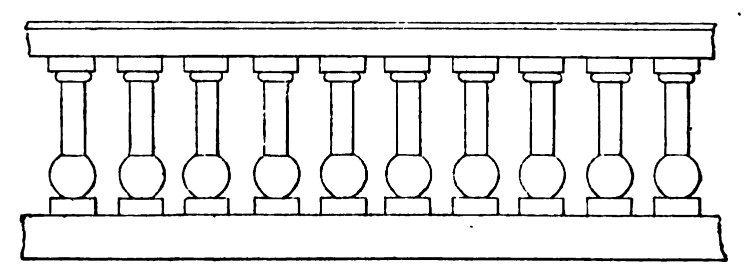


Fig. 1.

Je regardais un objet placé entre les colonnettes et moi. Par une action qui ne me demande aucun effort, tant j'en ai l'habitude, je portais mon attention sur les colonnettes sans changer

la direction des lignes visuelles. Nécessairement alors, l'image de la série des colonnettes, telle qu'elle est dans l'œil droit, dépasse *vers la droite* l'image de la série de l'œil gauche, et vice versa.

La représentation schématique de ce que je viens de dire nous donne la figure 2. Mais quand je fixais un objet placé *au delà* des colonnettes, l'image de l'œil droit dépassait *vers la gauche* l'image de l'œil gauche, et vice versa.

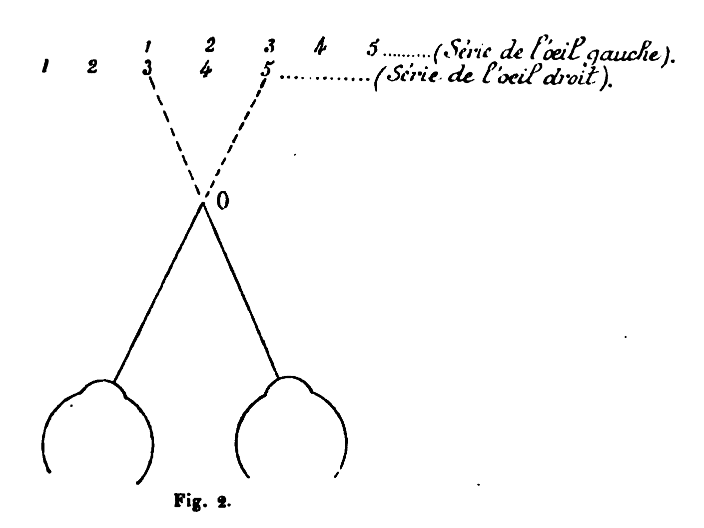


Fig. 2.

Dans les deux cas, les images sont à contours estompés.

Jusqu'ici rien n'est paradoxal, tout est très intelligible. Mais poursuivons.

Par l'éducation un peu inusitée de mes yeux, il m'est aisé de changer l'accommodation tout en conservant immobile la direction du regard, c'est-à-dire d'accommoder les yeux pour des objets qui ne sont pas situés sur l'horoptère. Ceci m'est surtout facile lorsque je choisis le moment où, dans le cas qui nous occupe, par exemple, deux images de colonnettes se superposent dans les deux champs visuels. Ce cas est obtenu immédiatement en avançant ou en reculant un peu soit la tête, soit l'objet sur lequel sont dirigées les lignes visuelles.

La figure 2 représente le cas où l'image 1 de l'œil gauche se superpose à l'image 3 de l'œil droit.

Comme les colonnettes sont identiques, j'obtiens la superposition de deux images stéréoscopiques, et l'impression totale est celle d'une colonnette en relief, comme dans la vision binoculaire habituelle.

Puisque les colonnettes sont aussi équidistantes, la superposition se fait en même temps pour 2 g. et 4 d., et 3 g. et 5 d.

On comprend déjà que, dans le cas de la figure 3, où l'entre-croisement des lignes visuelles se fait *derrière* les colonnettes, l'écart des images aura lieu en sens inverse. Mais puisqu'il y a de nouveau superposition des images (3 g., 1 d.), (4 g., 2 d.), (5 g., 3 d.), je n'ai qu'à accommoder les yeux pour la distance des colonnettes, les lignes visuelles restant dirigées sur l'objet *O*, pour obtenir des images à contours nets et l'impression de colonnettes réelles.

Le paradoxe consiste donc en ceci : lorsque les lignes visuelles se croisent *devant* les colonnettes, l'impression stéréoscopique me les fait juger *plus minces*, et ceci en raison de l'éloignement des objets dont les images se superposent; lorsque, au contraire, les lignes visuelles se croisent *derrière* les colonnettes, l'impression les fait juger beaucoup *plus volumineuses* qu'elles ne le sont en réalité pour la vision habituelle. Néanmoins, la distance des colonnettes à l'œil n'a pas changé.

Il y a plus encore. Helmholtz (*Optique physiol.*, p. 811, éd. franç., 1867) nous apprend que l'objet virtuel produit par la superposition des images stéréoscopiques se trouve à l'intersection des lignes visuelles, lorsque celles-ci s'entre-croisent entre l'observateur et l'objet réel. C'est le cas de notre figure 2. Et malgré ce rapprochement l'objet nous semble *plus petit!*

Dans le cas où l'intersection a lieu *derrière* les colonnettes, l'objet virtuel est placé au delà de l'objet réel, et nous le croyons *plus grand!*

Helmholtz n'indique pas en cet endroit la position de l'objet lorsque l'entre-croisement des lignes visuelles se fait derrière l'objet, comme dans le cas de notre figure 3. Aussi suppose-t-il

plutôt les lignes dirigées en parallélisme (*ibid.*, p. 810), ce qui donnerait une intersection à une distance infinie.

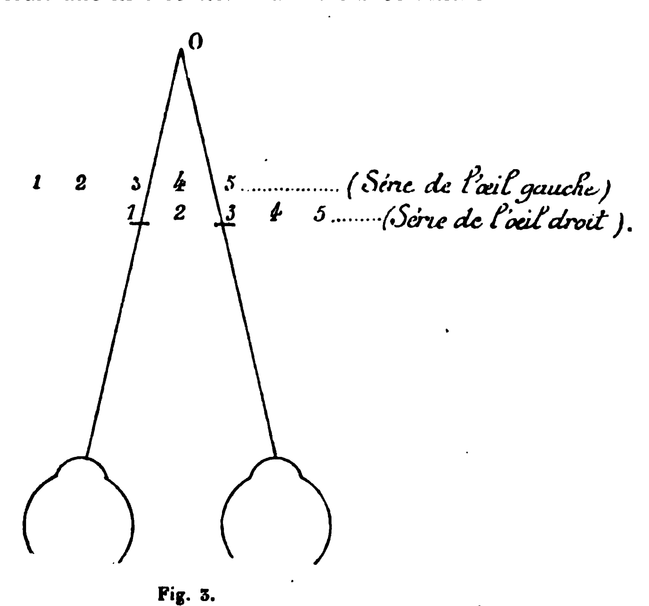


Fig. 3.

Lorsque l'auteur traite de l'appréciation de la distance absolue (*ibid.*, pp. 823 et suiv.), il indique les expériences de Wheatstone, de H. Meyer et de Wundt qui ont certains rapports avec notre paradoxe. L'explication n'est cependant pas aussi satisfaisante qu'on le désirerait.

La position *rapprochée* de l'objet virtuel et son apparence *rapetissée*, lors de l'entre-croisement des lignes visuelles *devant* l'objet réel, la position *éloignée* et l'apparence *agrandie* dans le cas de l'entre-croisement *derrière* l'objet réel, sont cependant les conséquences nécessaires de ce qui se passe dans l'un et l'autre phénomène.

L'objet virtuel le plus rapproché doit nécessairement paraître plus petit, le plus éloigné doit paraître plus grand.

Quelque paradoxale que paraisse cette affirmation, il faut néanmoins convenir de son exactitude.

Les images formées sur la rétine sont de même dimension

dans le cas de la vision habituelle et dans ceux de vision à lignes visuelles croisées devant ou derrière les objets.

Mais nous jugeons de la grandeur des objets par l'habitude et par la comparaison.

Si nous voyons deux objets identiques sous un angle égal et que l'un soit plus rapproché de nous que l'autre, c'est le plus rapproché qui nous fait l'impression d'être le plus petit, tandis que le plus éloigné nous semble plus grand.

Nos expériences n'ont pas pu nous convaincre de la vérité de ce que dit Helmholtz (p. 811). D'après lui, l'objet qui, dans le premier cas, semble être en relief doit nécessairement sembler creux dans le second. D'après nous, c'est là une illusion produite par la rondeur des colonnettes dont nous avons parlé, et qu'une lumière diffuse éclairait de telle façon que leurs ombres se prêtassent aussi bien au creux qu'au relief.

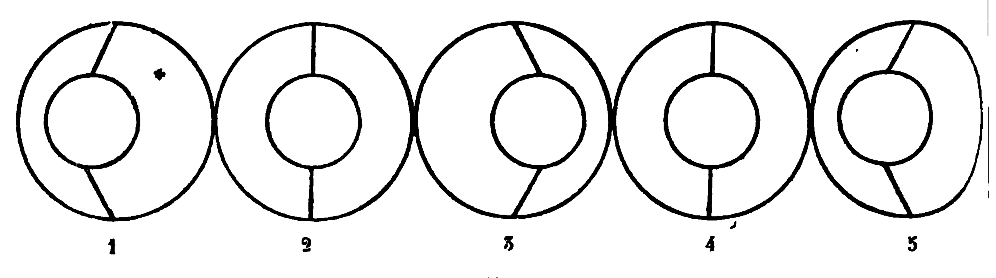


Fig. 4.

Nous avons cherché à composer une figure propre à reproduire tous les phénomènes possibles de cette vision paradoxale. La figure 4 s'y prête à merveille. Lorsqu'on fait entre-croiser les lignes visuelles un peu en arrière du papier, le n° 1 de l'œil gauche viendra se superposer au n° 2 de l'œil droit, le n° 2 g. au n° 3 d. et ainsi de suite. Le n° 1 de l'œil droit et le n° 5 de l'œil gauche dépassent chacun du côté qui lui est opposé la série des numéros superposés. On verra, par conséquent, *six* figures juxtaposées. Si l'accommodation de l'œil est faite pour la distance à laquelle se trouve le papier, on verra les quatre figures du milieu prendre du relief ou du creux. Le n° 1 g. superposé au n° 2 d.

donnera un cône tronqué *en relief,* ainsi que le même n° 2, mais de l'œil *gauche*, superposé au n° 3 de l'œil *droit.* Le n° 3 de l'œil *gauche* avec le n° 4 de l'œil *droit* produit le contraire, c'est-à-dire un cône *creux,* de même que le n° 4 g. avec le n° 5 d.

Le n° 1 d. et le n° 5 g., n'étant superposés à rien, ne donnent qu'une figure plane.

Si ensuite l'entre-croisement se fait à une distance plus grande — ce qu'on obtient facilement avec un peu d'exercice, — nous arrivons à superposer le n° 1 g. au n° 3 d. Dans ce cas, il n'y a que *trois* images de l'œil gauche qui se superposent à *trois* images de l'œil droit, c'est-à-dire les nos 1 g. et 3 d., les nos 2 g. et 4 d., et les nos 3 g. et 5 d. Toute la série nous paraît composée de *sept* figures, dont les deux extrêmes sont simples. Les nos 1 g. et 3 d. donnent encore un cône *en relief,* mais proportionnellement plus haut que dans le premier cas ; de même les nos 3 g. et 5 d. produisent un cône *creux* proportionnellement plus profond. Les nos 2 g. et 4 d. ne donnent évidemment aucune perspective.

Notons toutefois que, dans les deux cas, les bases des cônes paraissent *plus grandes* qu'à la vue ordinaire ; et dans le deuxième cas encore plus grandes que dans le premier.

Les phénomènes sont produits en sens inverse si, au lieu d'entre-croiser les lignes visuelles derrière le plan du papier, nous les entre-croisons *devant* ce plan.

L'écart des séries se fait alors inversement : les images de l'œil gauche dépassent *à gauche* celles de l'œil droit, et la superposition se produit de droite à gauche.

Maintenant les nos 1 d. et 2 g. et les nos 2 d. et 3 g. produisent un cône *creux,* tandis que les nos 3 d. et 4 g. et les nos 4 d. et 5 g. donnent un cône *en relief.* Si l'intersection des lignes visuelles se rapproche davantage de nous, nous obtenons les nos 1 d. et 3 g., 2 d. et 4 g., 3 d. et 5 g. Le premier donne encore un cône, mais proportionnellement plus creux ; le dernier, un cône *en relief* relativement plus marqué. La superposition de n° 2 d. à n° 4 g. ne donne de nouveau aucun relief. Les nos 1 et 2 à gauche et les nos 4 et 5 à droite, n'étant superposés à rien, font l'effet de simples figures vues à la vision monoculaire.

Pour l'appréciation de la grandeur des cônes, c'est aussi le contraire du premier cas : les bases des cônes paraissent plus petites, et ce rapetissement croît avec l'augmentation de l'écart.

Remarquons, pour terminer, que ces intéressantes expériences ne sauraient être faites à l'aide d'un stéréoscope comme elles se font à l'œil nu. L'œil un peu exercé parvient facilement à superposer successivement à gauche ou à droite les figures, et ceci avec un écart plus ou moins grand à volonté. Le stéréoscope, à moins de renverser les prismes, ne donne que l'écart à droite pour l'image de l'œil gauche, et sa disposition ordinaire ne permet pas d'augmenter ou de diminuer cet écart.

Quatrième section.

Les membres de la quatrième section se sont d'abord rendus au laboratoire d'hygiène et de bactériologie de M. le professeur Van Ermengem, où de nombreuses cultures de microbes leur ont été soumises. Pour n'en citer que deux ou trois, mentionnons *a*) la culture du bacille du choléra, remarquable par la bulle que l'on voit toujours à la partie supérieure de la masse gélatineuse; *b*) la culture du microbe du rouget du porc, et *c*) celle du bacille de la fièvre typhoïde. Signalons en passant la tendance des micrographes à identifier le microbe qui existe normalement dans l'intestin avec le bacille de la fièvre typhoïde. Toutefois, l'observation n'a pu découvrir jusqu'ici chez le premier de ces microbes la chevelure de cils qui rend le second si remarquable.

Le laboratoire de M. Van Ermengem renferme des appareils servant à photographier les microbes, et l'on peut dire, d'une manière générale, que son installation est en rapport avec les exigences actuelles de la microbiologie.

Pendant la visite du laboratoire par les membres de la section, M. le professeur Heymans a exposé trois procédés pratiques pour rendre l'eau aseptique. Rapportons-les sommairement :

1° Il fait bouillir pendant cinq minutes une eau quelconque,

à laquelle il a ajouté 10 à 15 grammes pour mille de carbonate de soude. Il neutralise alors cette eau par l'acide chlorhydrique. Le papier de tournesol renseignera la réaction de l'eau. Il est bon de continuer quelques instants l'ébullition après l'addition d'acide chlorhydrique, afin de chasser l'acide carbonique qui, restant en solution dans le liquide, pourrait en modifier la réaction ;

2° Un gramme de nitrate d'argent dissous dans un litre d'eau quelconque en tue tous les micro-organismes en vingt-quatre heures. M. Heymans ajoute alors 7 grammes de chlorure de sodium à la solution. Il se forme au fond du vase une couche de chlorure d'argent (un demi-gramme), et 6 grammes pour mille de chlorure de sodium restent en solution ;

3° L'eau oxygénée à la dose de 1 gramme pour mille désinfecte une eau quelconque en vingt-quatre heures. M. Heymans fait alors bouillir le mélange, et l'ébullition décomposant l'eau oxygénée, il ne reste plus qu'une eau aseptique sans eau oxygénée.

Du laboratoire de M. Van Ermengem les membres de la quatrième section se sont rendus au laboratoire de physiologie de M. le professeur Lahousse. Ils ont pu y admirer de nombreux schémas relatifs aux différents centres nerveux et aux fibres qui s'y rendent ; des kymographes ou appareils enregistreurs ; l'œil artificiel avec la projection dans l'eau des flammes de formes et de situations différentes, d'après l'état de réfraction des yeux ; des appareils électriques ; des appareils pour l'analyse des gaz. M. le professeur Lahousse a montré une sonnerie électrique d'un genre tout nouveau et qui ne trouvera guère son emploi que dans le cabinet d'un physiologiste : c'est une sonnerie qui fonctionne d'une manière synchronique avec les battements du cœur d'une grenouille. Grâce à une tige métallique qui le transperce, ce cœur se trouve par intermittence dans le circuit qui fait vibrer le timbre.

Tous les visiteurs du laboratoire de M. Lahousse ont conservé de leur visite la meilleure impression. Ils ont admiré le zèle intelligent qu'a déployé le professeur de physiologie pour que son cours fût à la hauteur des plus récents progrès. Ceux d'entre eux qui ont visité les laboratoires des universités allemandes recon-

naissent que la physiologie peut être enseignée à l'Université de Gand avec autant d'intérêt et de succès que dans les plus grands centres scientifiques.

Faute de temps, la section n'a pu entendre les communications de MM. le Dr Huybrechts sur une hydrocèle congénitale du cordon avec hernie, sur un goitre subit, sur un phlegmon diffus profond de l'abdomen; le Dr Warlomont, sur le pansement des plaies de l'œil par l'iodoforme; le Dr Charlier, sur un cas d'œdème du pharynx et de l'isthme du gosier; enfin de M. le Dr Desplats, de l'Université catholique de Lille, sur le traitement mécanique de l'asystolie.

Voici le texte de quatre de ces communications :

Du traitement de certaines formes d'ulcères de la cornée par le traitement antiseptique occlusif, par M. le Dr Warlomont.

Cette communication peut se résumer ainsi :

I. Grâce à la méthode antiseptique, le traitement des affections externes de l'œil est devenu à la fois plus simple et plus efficace. On peut affirmer que la plupart d'entre elles réclament un traitement antiseptique (acide borique, sublimé, iodoforme, etc.).

II. Parmi ces affections, les ulcères de la cornée réclament une attention et des soins tout particuliers.

Exposés aux causes irritantes ou infectantes venant de l'extérieur, sans cesse tourmentés par les mouvements des paupières ou irrités par la lumière et par le contact des larmes, ayant à supporter la pression intra-oculaire qui nuit à leur réparation et qui, s'ils sont profonds, peut faire redouter une rupture cornéenne avec toutes ses conséquences, ces ulcères ne sauraient se contenter d'un traitement antiseptique ***intermittent*** et ***à ciel ouvert,*** comme celui auquel on se borne trop souvent [1].

Il leur faut, en effet, un milieu antiseptique permanent, une température convenable et constante, une compression modérée, en un mot, un pansement ***antiseptique occlusif.***

---

[1] On peut rarement se fier à un traitement antiseptique pratiqué par le malade lui-même, à domicile, avec des objets de pansement suspects, des mains suspectes, etc. La classe indigente surtout ne peut donner, à cet égard, aucune sécurité.

III. Ce mode de traitement est surtout *formellement indiqué* dans les cas d'ulcères dits *infectieux*, de ceux qui s'accompagnent d'infiltration purulente de la cornée ou d'épanchement purulent dans la chambre antérieure (ulcères à *hypopyon*, ulcères *serpigineux*), soit qu'ils surviennent à la suite d'un traumatisme compliqué d'infection, soit qu'ils s'établissent, sans cause bien définie, chez des sujets débilités ou atteints de diathèses, soit qu'ils compliquent une conjonctivite granuleuse [1].

Les moyens dirigés actuellement contre ces ulcères infectieux : lotions ou compresses chaudes antiseptiques, insufflations d'iodoforme, attouchements au sublimé, à l'eau chlorurée, à l'acide phénique pur, cautérisations au galvano-cautère, paracentèses, transfixions de Sœmisch, instillations d'ésérine, conservent, dans des cas déterminés, toute leur valeur (ulcères compliquant une conjonctivite purulente) ; peut-être pourront-ils, dans certains cas, être combinés utilement avec le pansement à demeure ; mais il est permis d'affirmer que le pansement occlusif dispensera souvent d'y avoir recours, et surtout que les interventions chirurgicales, trop souvent illusoires, pourront être généralement évitées [2].

IV. M. le Dr Valude, de Paris, qui a le premier, croyons-nous, recommandé la *méthode antiseptique occlusive* sous forme de pansement sec à demeure, emploie la technique suivante : « Après avoir lavé au sublimé à $^1/_{5000}$ la cavité oculaire, on » applique sur les paupières fermées une rondelle épaisse de » gaze au salol, puis d'ouate antiseptique; une bande de tarlatane mouillée et modérément serrée maintient le pansement. » Cette bande, en séchant, forme une sorte d'appareil inamovible qui assure la compression égale et l'occlusion; ce pansement est laissé en place trois à quatre jours, ce qui constitue » une énorme simplification du traitement pour les malades

(1) Le pansement occlusif serait, évidemment, contre-indiqué dans les cas de conjonctivite purulente ou de catarrhe abondant ou phlegmon du sac lacrymal.

(2) Nous partageons complètement, sur ce point, la manière de voir de M. le Dr Valude (*Semaine médicale* du 10 décembre 1891 : « Traitement des ulcères infectieux graves et étendus de la cornée, ainsi que de l'hypopyon concomitant »).

» de la classe ouvrière. Le pansement doit être réappliqué » jusqu'à parfaite guérison » ([1]).

Sans vouloir proposer un *modus faciendi* supérieur à celui de Valude, le principe étant le même (nous nous proposons, du reste, d'employer son procédé dans toute sa rigueur), nous croyons pouvoir recommander la méthode que voici : au moyen d'un filet d'une solution de sublimé à $^1/_2$ pour mille exprimé d'un tampon d'ouate antiseptique (ou en se servant d'une petite poire en caoutchouc à embout de même substance), on lave largement, à une ou deux reprises, le globe oculaire et les culs-de-sac conjonctivaux, les paupières étant préalablement retournées; on nettoie également la peau de la région palpébrale; puis on projette, avec un pinceau, de l'iodoforme finement pulvérisé sur la région de l'ulcère, et cela abondamment, sans appréhension; il est même bon qu'une assez forte quantité reste en contact avec la cavité conjonctivale. On applique ensuite un pansement formé de quelques rondelles de gaze iodoformée, d'un tampon d'ouate au sublimé et d'une bande en gaze ou en tarlatane légèrement compressive et bien assujettie.

Nous avons été amené à ce procédé par la merveilleuse tolérance, bien des fois constatée, de l'œil pour l'iodoforme ([2]); non seulement il n'exerce aucune action irritante, mais, dès la levée du premier pansement, on observe généralement une diminution des phénomènes aigus, tant subjectifs (douleur) qu'objectifs (injection, chémosis, etc.); il forme avec les sécrétions conjonctivales un magma qui se retrouve en partie dans les culs-de-sac, en partie dans le pansement. Ce dernier est laissé trois ou, au minimum, deux jours.

L'emploi de la tarlatane mouillée (Valude), que nous n'avons

([1]) Communication à l'Académie de médecine de Paris, séance du 10 février 1890 (*Sem. médic.* du 11 février 1891).

([2]) On sait l'excellent parti qu'on peut en tirer dans bien des cas de traumatismes du globe avec plaie. De Wecker a conseillé d'en appliquer directement sur la plaie cornéenne après l'opération de la cataracte, et Valude vient d'en proposer l'emploi comme agent prophylactique de l'ophtalmie des nouveau-nés (*Acad. de méd. de Paris*, 4 août 1891, et *Ann. d'Oculist.*, août 1891).

pas encore expérimentée, permet probablement de maintenir le pansement plus longtemps encore.

V. Sous l'influence de ce traitement, les symptômes aigus et infectieux tombent rapidement, l'hypopyon diminue puis disparaît, et cela, s'il est peu considérable, dès le troisième ou le quatrième jour; puis l'ulcère se comble, se déterge, et la guérison est complète après une ou plusieurs semaines, suivant la gravité du cas. Il reste naturellement un leucome plus ou moins prononcé, mais on évite, comme le fait observer Valude ([1]), la nécessité d'une intervention opératoire souvent funeste et la formation d'un staphylôme total cicatriciel.

VI. Dans les cas d'ulcère compliquant une conjonctivite granuleuse, le traitement de celle-ci ne doit pas être abandonné. Quelle que soit l'acuité des symptômes, les granulations doivent être cautérisées ou traitées par les moyens en usage (brossage au sublimé, etc.); on profitera, pour cela, du moment de la levée du pansement.

VII. Le pansement sec antiseptique et occlusif ne convient pas seulement aux cas les plus graves, pour lesquels Valude l'a plus spécialement recommandé, ceux « où la cornée tout entière à peu près est ulcérée, ramollie ou transformée en putrilage purulent » ([2]), mais aussi aux ulcères infectieux de moyenne ou même de minime profondeur, et de dimensions restreintes, avec ou sans hypopyon. Nous l'avons employé avec avantage dans des cas de kératite ulcéreuse d'origine scrofuleuse et dans les ulcérations superficielles, sans véritable aspect infectieux, consécutifs au pannus granuleux. On peut dire qu'en principe la méthode convient à tous les ulcères cornéens, quels qu'ils soient ([3]), sauf les cas de purulence de la conjonctive ou de catarrhe abondant et continu des voies lacrymales. Un simple état catarrhal modéré de la conjonctive n'est pas une contre-indication. La diathèse, s'il en existe une, ne doit pas être négligée (scrofule).

([1]) *Sem. médic.*, 10 décembre 1890. ([2]) *Loc. cit.*

([3]) « Ce pansement sec et occlusif, dit Valude (Commun. à l'Acad. de méd. de Paris,

Voici la relation de quelques cas d'ulcères cornéens traités par la méthode de Valude, modifiée comme il vient d'être dit. On y remarquera la coexistence fréquente de l'ophtalmie granuleuse; c'est que celle-ci fait à Bruges, où ces cas ont été relevés, des ravages considérables dans la classe indigente et ouvrière.

Première observation. — *Ulcère infectieux superficiel avec hypopyon* de moyenne abondance, chez un enfant de 7 ans, scrofuleux. Pansement iodoformé tous les deux jours, précédé d'un lavage au sublimé, comme il est dit ci-dessus. Huile de foie de morue à l'intérieur. L'hypopyon disparaît en quatre jours. L'ulcère, après huit jours, s'est transformé en une simple exfoliation à fond net, qui s'est mise peu à peu, dans la suite, de niveau avec le reste de la cornée.

Deuxième observation. — *Ulcère infectieux de moyenne profondeur avec hypopyon.* — R... G..., petite fille de 6 ans, tempérament scrofuleux. Ulcère plus étendu en largeur que dans le cas précédent (il occupe près du tiers de la cornée), à bords irréguliers, à fond blanc, crayeux; phénomènes réactionnels modérés. Hypopyon de 2 millimètres de hauteur environ. Pas de changement les quatre premiers jours (pansement journalier), puis diminution de l'hypopyon (pansement tous les deux jours). L'hypopyon a disparu le quatorzième jour.

L'ulcère, en tant qu'ulcère infectieux, était guéri le vingtième jour; restait une légère dépression qui disparut peu à peu [1]. Leucome consécutif central assez dense et étendu.

La lenteur de la réparation peut être attribuée ici d'abord aux pansements trop fréquents au début, puis à la coexistence d'une conjonctivite granuleuse traitée plus tard seulement.

---

séance du 10 février 1891), réussit dans les ulcères de la cornée, avec ou sans hypopyon, et aussi dans les ulcères scrofuleux des enfants; il est indiqué, à l'exclusion de tout autre traitement, dans toutes les kératites ulcéreuses. »

[1] A la suite de ces ulcères subsiste souvent une dépression très légère, en pente douce, recouverte d'épithélium, qui tarde quelque peu à se mettre de niveau avec le reste de la cornée. On peut, à ce moment, pour épargner au malade les ennuis d'un traitement occlusif trop prolongé et pour achever la cicatrisation, recourir aux insufflations de calomel, aux pulvérisations chaudes, etc. Tout état aigu ou infectieux a, du reste, pris fin à ce moment.

TROISIÈME OBSERVATION. — *Érosion cornéenne simple d'origine granuleuse.* — Marie L..., 48 ans, dentelière. Granulations anciennes avec traînées cicatricielles aux deux yeux; entropion et trichiasis; taies. En traitement depuis longtemps. Le 22 août, on constate une érosion simple, légèrement grisâtre, à l'une des cornées. Le traitement ordinaire n'amenant pas de résultat, on applique le traitement occlusif iodoformé : pansement tous les deux jours après lavage au sublimé. Guérison de l'exulcération en quatre jours.

QUATRIÈME OBSERVATION. — *Ulcères simples d'origine granuleuse.* — Charles S..., 18 ans, ouvrier relieur. Se présente le 8 septembre, atteint d'une conjonctivite granuleuse chronique à poussée aiguë; pannus à la partie supérieure des cornées. Irritation vive. Dépoli et exfoliations cornéennes nombreuses sans ulcère proprement dit. Traitement : lotions boriquées chaudes, cocaïne. Les jours suivants la situation s'aggrave : soit que la cautérisation des granulations ait été omise, soit négligence du malade, la cornée se creuse de deux ulcères ronds, peu étendus en diamètre (dimension d'une tête d'épingle), de profondeur moyenne, avec une très légère infiltration grisâtre.

Traitement : pansement iodoformé et lavages ; pansement tous les deux jours. *Cautérisation des granulations*, au moyen du crayon de sulfate de cuivre, à chaque levée de pansement.

Au bout de sept jours les ulcères ne sont plus représentés que par de simples dépressions ; le blépharospasme et les symptômes aigus ont disparu, et l'on n'a plus que l'ophtalmie granuleuse à combattre.

Phlegmon pré-péritonéal, par M. le Dr Huyberechts.

M. X..., atteint de pyélo-néphrite ascendante, venait de faire une cure à Vitel ; après quoi, ayant passé quelques jours à Blankenberghe, il y prit des bains. Il reçut un jour une violente lame sur la paroi abdominale; il en ressentit une forte douleur dans le moment, mais ne s'en soucia pas davantage.

Il vint me consulter en octobre; il présentait alors au niveau des muscles droits, particulièrement à gauche, un empâtement de

la grandeur d'une paume de main, douloureux, sans réaction locale ni générale. Je portai le diagnostic de phlegmon abdominal. Cet empâtement ne tarda pas à s'agrandir et à s'accompagner de phénomènes généraux et locaux, et je dus, au bout de quelque temps, l'ouvrir largement. Les lavages antiseptiques les plus rigoureux ne vinrent pas à bout de ce phlegmon qui prenait de plus en plus d'extension vers l'ombilic et vers les parois latérales de l'abdomen.

En présence de cette situation, je proposai au malade une opération radicale. Elle fut acceptée.

Après anesthésie et antisepsie complètes, je fis une large incision; je tombai sur un tissu tellement altéré, que je crus un moment avoir affaire à une tumeur de mauvaise nature. Toute la paroi abdominale était décollée; je dus faire des débridements jusqu'au-dessus de l'ombilic de chaque côté, et en bas jusqu'au niveau des canaux inguinaux. Une bonne cautérisation au thermo-cautère, précédée d'un raclage profond, termina cette opération qui fut accompagnée d'un incident grave, l'ouverture de l'artère épigastrique là où elle vient se perdre dans le muscle droit.

Étant donné l'état des tissus, il ne fut pas facile d'arrêter cette hémorragie très violente, et j'ai cru que le malade, déjà considérablement affaibli, nous resterait dans les mains. Le thermo-cautère avec le tamponnement nous sauva de cette situation.

Les suites immédiates furent très heureuses: le bourgeonnement se fit; le malade reprenait rapidement ses forces, lorsqu'un beau jour, malgré une antisepsie rigoureuse, de nouvelles travées se formèrent. Je ne parvins à les vaincre qu'en faisant plusieurs fois par jour des pulvérisations phéniquées à 5 °/₀ et des injections d'aristol dans les différents trajets qui se formèrent successivement. Enfin, après cinq mois de lutte énergique, j'eus le bonheur de voir mon malade guéri.

Deux choses m'ont frappé chez ce malade : d'abord la chance qu'il a eue de guérir, et cela grâce aux pansements antiseptiques unis aux pulvérisations et à l'aristol injecté dans les trajets.

Une seconde chose, c'est l'origine de ce phlegmon, et voici comment je me l'explique : le coup donné par la vague aura provoqué une contusion avec son cortège habituel, épanchement de

sang, etc. Le sang, chargé de microbes pathogènes recueillis dans le rein malade, en passant par la paroi abdominale, aura trouvé là un terrain propice pour leur développement.

Congestion du corps thyroïde, par M. le Dr Huyberechts.

Je fus appelé, il y a environ un an, à donner des soins à Mme X..., atteinte subitement d'une congestion de la glande thyroïdienne dans les circonstances suivantes :

Se trouvant sur le quai à Anvers, elle fut prise soudainement par un coup de vent tellement violent, qu'elle faillit être renversée. Elle avait le cou dégarni, et elle éprouva instantanément une sensation qui lui fit croire que sa gorge se fermait, et elle perçut manifestement un gonflement à la région thyroïdienne.

Appelé chez elle le soir même de cet accident, je constatai une tumeur siégeant dans la région latérale droite du corps thyroïde, tumeur de la grosseur d'une demi-orange et en rappelant assez bien la forme; la malade accusait une constriction à la gorge, de la céphalalgie, des vertiges, surtout dans la station debout; la tumeur n'était guère douloureuse à la pression; elle ne présentait aucune élévation de température, et celle-ci, prise à l'aisselle, était normale.

Les antécédents de la malade ne présentaient rien de particulier; elle est d'un tempérament nerveux sans être névropathe; les appareils circulatoire et cérébral fonctionnaient normalement.

Le diagnostic était évident : j'avais affaire à une congestion unilatérale du corps thyroïde.

Les applications réfrigérantes faites localement et le bromure de potassium et l'antipyrine employés à l'intérieur restèrent sans résultat. Enfin une application de sangsues, faite le quatrième jour, fut suivie d'une diminution rapide de la tumeur ; au bout de quelques jours, il ne restait plus qu'un noyau gros comme une noix, qui disparut complètement par des applications de l'emplâtre Vigo avec hydrargyre, et de teinture d'iode iodurée. Aujourd'hui la malade ne porte plus aucune trace de cette affection.

Étiologie. — Les variations circulatoires ne sont pas rares dans cette glande ; les auteurs qui se sont occupés de cette question

nous disent que le corps thyroïde subit des poussées congestives fréquentes, à la suite d'effort, d'accès de toux violent, à la période menstruelle chez la femme; mais je n'ai lu nulle part la description d'un cas analogue à celui dont je viens de vous parler.

Voici quel est, à mon point de vue, le mécanisme de sa production : ce coup de vent agissant plutôt comme violence que comme froid, a produit par acte réflexe chez cette personne, d'un tempérament nerveux très impressionnable, une vaso-dilatation considérable; l'appareil vasculaire très riche de la glande thyroïde a été gorgé subitement d'une grande quantité de sang, qui a eu comme conséquence une parésie des tuniques artérielles, fait que l'on pourrait comparer, me semble-t-il, à la parésie vésicale consécutive à une surdistension par rétention d'urine.

Les résultats immédiats obtenus par les sangsues me semblent plaider en faveur de cette interprétation. Celles-ci, en effet, en produisant une décharge circulatoire, ont rendu aux artères leur élasticité perdue momentanément par la surdistension congestive.

Hydrocèle enkysté du cordon, par M. le Dr Huyberechts.

Joseph X..., âgé de 9 ans, me consulte, il y a quatre ans, pour une tumeur de la grosseur d'une noix, siégeant dans le canal inguinal.

Le diagnostic de hernie avait été posé par le médecin qui m'avait précédé, à en juger par le bandage que le malade portait et les dires de la mère.

Sans croire à une erreur de la part de mon confrère, je constatai cependant que la tumeur appréciable était un hydrocèle enkysté du cordon, et je ne parvins pas, à cette époque, à trouver une hernie.

Tous les traitements classiques furent successivement employés pour la guérison de ce petit malade; chaque injection fut suivie d'une réaction plus ou moins forte, suivant le degré de concentration des liquides employés et la disposition de la tumeur. Mais, quelques semaines ou quelques mois après, il y avait récidive.

En présence de ces résultats si incomplets, j'engageai les parents à laisser l'enfant tranquille, espérant que la nature

ferait mieux que nous; mais, hélas! la tumeur ne faisait qu'augmenter, et, de localisée qu'elle était dans le canal inguinal, elle finit par descendre dans le scrotum. En examinant la tumeur par transparence, je constatai au jour une partie opaque représentant bien une pointe de hernie, suturée à la sortie du canal inguinal; dans des examens ultérieurs, je ne l'ai plus retrouvée.

Cette tumeur finit par gêner beaucoup l'enfant et par tourmenter les parents, qui me prièrent de tenter une opération radicale.

Après anesthésie et antisepsie complète, nous avons disséqué les différentes couches jusque sur la tumeur; la réductibilité de celle-ci constituait une difficulté opératoire. Après avoir ponctionné la tumeur, nous avons été à la recherche de la hernie, que j'avais cru voir un jour par transparence; mais, étant données l'anesthésie et la position horizontale du patient, « et peut-être son absence », nous n'avons pas trouvé de hernie.

Nous avons enlevé l'excédent de la vaginale, et, après avoir touché le sac avec une solution de chlorure de zinc à 5 °/ₒ, nous avons procédé à la toilette et à la suture.

Pour toute sûreté, nous avons terminé l'opération comme si cette hernie existait en réalité; nous avons affronté sur une large surface les deux lèvres de la tunique vaginale par une suture de matelassier. Nous avons fermé le canal par une suture en surjet, de manière à opposer ainsi une résistance suffisante aux hernies.

A part une réaction locale assez vive et provoquée par l'attouchement au chlorure de zinc, les suites furent très heureuses; le neuvième jour, nous avons enlevé les fils et la réunion était complète.

Aujourd'hui, le jeune garçon est tout à fait guéri; le testicule est libre et intact, et le canal est occupé par une colonne solide, qui s'opposera à la descente d'une anse intestinale.

Cette opération, faite dans de bonnes conditions d'antisepsie, me paraît sans danger, et j'estime qu'on ne doit pas hésiter à y recourir lorsqu'un hydrocèle résiste aux injections habituelles; c'est là un moyen sûr et inoffensif de débarrasser le malade d'une infirmité toujours très gênante.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

M. Witz, professeur à l'Université catholique de Lille, fait une conférence sur *Le froid, sa production industrielle et ses applications.*

Après avoir fait ressortir l'importance des méthodes de frigorification, M. Witz établit nettement les trois points de vue sous lesquels il se propose d'envisager la question : il étudiera, en physicien, les moyens de produire artificiellement de basses températures, puis il deviendra ingénieur pour établir la théorie des machines frigorifiques; enfin, il passera en revue les principales applications que l'on fait du froid dans l'industrie.

Le froid n'existe pas à proprement parler et sa définition repose sur une sensation. Il commence pour nous aux températures inférieures à la moyenne à laquelle nous sommes habitués; créer du froid, c'est abaisser la température au-dessous de celle du milieu ambiant. Il n'y a donc pas de moyen direct de refroidir un corps, parce que nous ne pouvons lui soustraire des calories, mais on peut employer des procédés indirects pour lui faire perdre de lui-même sa chaleur. Ces procédés consistent à lui faire développer un travail extérieur ou intérieur, parce que tout travail est le prix d'une certaine quantité de chaleur. Ce travail peut affecter des formes diverses : il sera produit, par exemple, par une détente de gaz, par l'évaporation d'un liquide, par la dissolution d'un corps, et c'est ce dernier phénomène qui est utilisé dans la plupart des mélanges réfrigérants. Ces différents moyens ont été mis en œuvre par Leslie, Cailletet, Pictet, Olzewski et von Wroblesky. Ces savants ont pu abaisser la température des corps à 140° sous zéro, mais on arrivera certainement plus bas encore, et M. Witz ne désespère pas de voir un jour l'hydrogène lui-même sous la forme d'un barreau métallique. La limite inférieure vers laquelle on tendra sans jamais y atteindre, est la température de 273° sous zéro, le zéro absolu des thermodynamistes, auquel correspond la cessation de tout mouvement moléculaire.

Mais ce n'est pas tout de savoir abaisser la température d'un corps; il faut maintenir cette basse température par une soustraction continue de calorique : ce sera la fonction des machines frigorifiques. Le physicien devient ingénieur, et il fait appel aux données de la thermodynamique, cette reine des sciences modernes.

Pour expliquer le jeu des machines à glace, il est nécessaire de faire connaître d'abord la théorie des machines à feu : l'antithèse des mots est frappante, mais l'analogie des moyens est remarquable. Dans la machine à feu, le but est de créer des kilogrammètres en dépensant des calories; dans la machine à glace, la fonction est renversée, car on dépense des kilogrammètres pour créer du froid; les cycles sont identiques, mais ils sont intervertis et l'ordre des opérations est retourné.

Le type commun de ces cycles est celui de Carnot : le fluide y évolue entre deux températures limites T et t; les apports et les reprises de calorique sont effectués à température constante, et les variations de température se produisent par des adiabatiques. Ce cycle est classique et bien connu de tous : on rappellera seulement que les quantités de chaleur Q et q cédées ou reprises par les sources sont entre elles dans le rapport même de T et de t, en vertu du second principe de la thermodynamique : on a donc $\frac{Q}{q} = \frac{T}{t}$.

Dans la machine à feu, le travail $\mathfrak{G}$ produit par la dépense de chaleur $Q - q$ est $J(Q - q)$, J étant l'équivalent mécanique de la chaleur : le rendement $\frac{\mathfrak{G}}{JQ}$ est égal à $\frac{T-t}{T} = 1 - \frac{t}{T}$.

Dans la machine à glace, on dépense un travail $\mathfrak{G}$; par contre, la source supérieure soustrait Q calories au lieu d'en céder, et la source inférieure fournit q calories, au lieu de les reprendre, de telle sorte que la chaleur mise en œuvre est $-Q+q=-(Q-q)$; c'est la quantité $Q - q$ changée de signe. Le travail à dépenser est encore $\mathfrak{G} = J(Q - q)$ et le rendement $\frac{JQ}{\mathfrak{G}}$ prend la valeur $\frac{t}{T-t}$.

La machine à feu rend d'autant plus que l'écart des températures extrêmes T et t est plus considérable et que la température T du foyer est plus élevée. Le rendement des machines frigorifiques est, au contraire, d'autant meilleur que l'écart entre

les températures finales est plus faible et que la température inférieure *t* est elle-même plus élevée.

Ces considérations permettent d'édifier très simplement la théorie des machines frigorifiques en profitant des travaux dont la machine à feu a été l'objet ; le renversement du cycle et de sa fonction conduit à intervertir toutes les conclusions et tous les théorèmes établis pour les machines thermiques.

Le fluide mis en œuvre dans la machine à glace peut être de l'air, des gaz liquéfiés ou un gaz dissous en vertu de son affinité : il y a donc trois genres de machines. Les machines à air procèdent du type créé par Giffard, en 1873; M. Pictet est l'initiateur des machines du second genre, et sa machine à acide sulfureux est encore une des meilleures que nous possédions, bien que l'acide carbonique présente quelques avantages; enfin, la machine à affinité de M. Carré, dans laquelle on emploie une dissolution concentrée d'ammoniaque dans l'eau, s'est fort perfectionnée, et elle jouit de la propriété de développer des températures de — 30°, alors que les machines à acide sulfureux ne permettent guère de descendre au-dessous de — 13°. M. Witz décrit plus particulièrement la machine Giffard en faisant ressortir la manière dont elle réalise le cycle théorique. Il cite enfin les résultats obtenus par Linde et Fixary, dont les appareils ont acquis une plus grande perfection : on obtient aujourd'hui aisément 26 kilogrammes de glace par kilogramme de charbon; tant que l'industrie aura du charbon, elle ne manquera pas de glace.

La consommation de glace devient de plus en plus considérable : Paris seul en demande 18 millions de kilogrammes par an, et la fabrication des sorbets ne contribue à cette dépense que pour une part fort minime. On utilise le froid pour abaisser la température des halles et des marchés, pour modérer ou arrêter les fermentations dans les brasseries, les sucreries, les fabriques de colle, les fromageries, etc. Le transport en Europe de viandes abattues en Amérique ou en Australie n'est devenu possible que par l'emploi de navires frigorifiés; voilà une nouvelle industrie qui met en péril l'agriculture et l'élevage, déjà si éprouvés, par

la concurrence du Nouveau-Monde. Le rôle du froid dans la conservation des substances alimentaires est généralement mal compris : il est plutôt défensif qu'offensif; les micro-organismes peuvent résister à un froid intense, prolongé pendant soixante-dix-sept jours; dès que les viandes sont dégelées, elles sont exposées à se corrompre avec une grande rapidité. Il convient donc de se méfier de la glace qu'on introduit par morceaux dans les boissons pour les rafraîchir, car la glace, surtout quand elle est bulleuse, peut renfermer d'innombrables microbes.

Dans l'industrie chimique, l'emploi du froid a permis de réaliser des réactions nouvelles et notamment de précipiter le sulfate de soude des eaux mères des marais salants : les saliniers du midi de la France font aujourd'hui concurrence aux usines allemandes de Stassfurt, enrichies si rapidement par la découverte des gisements de carnalite.

Mais la plus belle application du froid a été faite par les ingénieurs pour le fonçage des puits de mines et le percement des tunnels dans les terrains aquifères et ébouleux. Ce procédé a été inauguré en Silésie par Pœtsch, et il a donné d'admirables résultats, car il a permis d'exécuter des travaux auxquels il eût absolument fallu renoncer; de plus, les prix de revient se trouvent considérablement diminués. M. Witz a eu l'occasion de voir aux mines de Lens une application de la méthode Pœtsch; l'opération se poursuit avec une parfaite régularité, sans accident ni mécompte d'aucune sorte.

L'exposé de ces diverses applications permet d'apprécier la fécondité de la théorie de la frigorification : au début, Leslie congelait une petite goutte d'eau, et voici que maintenant on applique le froid pour solidifier le sol! Il en est ainsi de toutes les branches de la science, et OErsted ne se doutait sans doute point de l'importance de sa découverte, en 1821; or, l'électromagnétisme a révolutionné le monde. Rien de plus réconfortant pour les travailleurs que cette recherche des origines des plus remarquables progrès : quels que soient la fortune ou les succès qui leur sont réservés, ils peuvent toujours se dire que la plus modeste de leurs recherches sera peut-être le point de départ

d'une science nouvelle. Ils ont le droit d'être fiers de leur vocation : ils sont les ouvriers de la Providence; en effet, Dieu n'a révélé aux hommes aucune vérité de l'ordre scientifique, mais il a fait de ces vérités la récompense des efforts désintéressés des savants.

Après cette conférence, le Président, M. le D[r] Lefebvre, soumet à la ratification de l'Assemblée la décision du Conseil de la Société, de prendre la part la plus large possible à l'organisation du Congrès scientifique international des catholiques de 1894. Cette décision est approuvée.

Enfin, M. Lefebvre adresse à l'Assemblée l'allocution suivante:

MONSEIGNEUR (1), M. LE GOUVERNEUR (2), MESSIEURS,

En prenant la résolution de venir célébrer le seizième anniversaire de la *Société scientifique* dans la capitale de la Flandre orientale, nous savions d'avance qu'une association vouée à l'avancement et à la diffusion des sciences serait bien reçue dans une ville où les sciences, les lettres et les arts sont cultivés avec tant d'ardeur. Mais quelque confiance que nous eussions dans la vieille hospitalité flamande, nous ne pouvions nous attendre au magnifique accueil qui nous était réservé. Aussi notre première pensée est une pensée de reconnaissance.

Je remercie, au nom de la Société scientifique, le vénérable Chef de ce diocèse de l'honneur qu'il lui fait et de l'encouragement qu'il lui apporte en venant s'asseoir au milieu de nous. Sa présence nous charme, mais elle ne nous surprend point. N'est-ce pas dans une assemblée où tous les évêques de l'univers étaient réunis au Vatican, sous la présidence du Pape, que l'Église a proclamé de nouveau que « loin de s'opposer au progrès des arts et des sciences, elle leur vient en aide et les encou-

(1) M[gr] Stillemans, évêque de Gand, qui assistait à la séance.
(2) M. de Kerchove d'Exaerde, Gouverneur de la Flandre orientale, qui avait gracieusement mis ses salons à la disposition de la Société.

rage de toutes les manières...; qu'elle n'ignore ni ne méprise les avantages qui résultent pour la vie de l'homme de la culture des arts et des sciences? »

Je remercie M. le Gouverneur de la province, qui a bien voulu ouvrir ses salons à la Société scientifique et l'y accueillir avec la plus gracieuse sympathie. La splendeur de sa réception ne nous fait pas oublier l'hospitalité plus modeste, mais tout aussi cordiale, accordée ce matin à nos sections par le collège Sainte-Barbe.

Agréez aussi l'hommage de notre respectueuse gratitude, Mesdames, qui avez bien voulu embellir cette assemblée de votre présence. A Gand, la ville des fleurs, il n'y a pas de véritable fête sans fleurs.

Je remercie tous les amis de la science. Nous sommes heureux de les rencontrer ici en grand nombre, sans en être surpris. N'êtes-vous pas frappés comme moi, Messieurs, de ce grand fait: la science, mais j'entends la science pure, dégagée de nos petits préjugés et de nos petites passions, rapproche les hommes et tend à les rassembler dans l'unité. C'est un phénomène du monde moral qui ne manque pas d'analogie avec certains phénomènes du monde physique. Vous rappelez-vous ces ingénieurs que la France et l'Italie avaient chargés d'ouvrir un chemin dans les flancs des Alpes, ces gigantesques barrières qui les séparent? Ils se mettent à l'œuvre; les uns partent du septentrion et les autres du midi, et un jour, dans un point précis et prévu, ils se rencontrent et s'embrassent dans les profondeurs du sol : c'est qu'ils avaient suivi la ligne droite avec une obstination invincible. Messieurs, faisons comme eux : dans le domaine moral, les savants ne peuvent guère manquer de se rencontrer quand ils marchent droit devant eux. (*Bravos.*)

La science fait mieux que de rapprocher les hommes, elle les ramène vers Dieu. Y a-t-il dans le domaine entier des sciences une proposition mieux démontrée que celle-ci : Dieu est la Vérité même, c'est-à-dire la Vérité essentielle, la seule Vérité. Les vérités secondaires de tous les ordres émanent de ce foyer unique, comme autant de rayons divergents : l'œil de notre intelligence

saisit un de ces rayons au passage; il le suit, mais il le suit en haut et il arrive à la source de toute lumière, il arrive à Dieu. (*Applaudissements.*)

Puisque ce nom béni se présente sur mes lèvres, permettez-moi, Messieurs, une dernière et rapide considération qui se rattache à ce sujet.

Le XIX[e] siècle est sans aucun doute un des plus féconds en grandes découvertes. A certaines époques, c'est comme une illumination soudaine, au milieu des ténèbres, qui révèle à nos regards ébahis des merveilles qu'on ne soupçonnait pas; j'en cite quelques-unes au hasard : la vapeur attelée à nos chars et à nos navires, l'électricité devenue rapide comme la foudre, la messagère de nos pensées et de nos paroles, le microscope qui, parmi d'autres faits de premier ordre, nous révèle les ennemis secrets qui s'attaquent à nos organes et les ruinent, les microbes, mais qui nous fait entrevoir en même temps l'espérance de soustraire l'homme à ses atteintes.

Les savants nous disent : Cette succession étourdissante de découvertes n'a rien d'étonnant; les découvertes s'enchainent et s'appellent l'une l'autre. Les savants ont raison, mais ce n'est pourtant là que la constatation du fait brut. Si nous élevons nos pensées plus haut, n'est-il pas vrai que c'est la Providence qui, au fur et à mesure des besoins de l'humanité, lui ouvre de nouveaux secrets et l'enrichit de nouveaux dons? la Providence, c'est-à-dire Dieu, car si la Providence n'est pas Dieu, elle n'est rien. (*Applaudissements prolongés.*)

SESSION DU JEUDI 28 JANVIER 1892

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

M. Mansion donne lecture de la note suivante *Sur les recherches de Schering en Métagéométrie.*

M. Ernest Schering, professeur à l'Université de Göttingen, à qui l'on doit l'admirable édition des *Œuvres* de Gauss, publiée sous le patronage de l'Académie de cette ville, a fait paraître sur les géométries non euclidiennes quelques articles sur lesquels il nous semble utile d'attirer l'attention.

En voici les titres : 1. *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume* (NACHRICHTEN DE GÖTTINGEN, 13 juillet 1870, pp. 311-321). 2. *Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen* (IB., 1873, n° 2, pp. 13-21). 3. *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen* (IB., 1873, n° 6, pp. 149-159). 4. *Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte deren Maas von der Bewegung der Körper abhängt* (MÉMOIRES DE GÖTTINGEN, t. XVIII, 1873, 54 p. in-4°; résumé dans les NACHRICHTEN, 1873, n° 26, pp. 744-753). Le § VII de ce Mémoire traite du mouvement dans les espaces non euclidiens (pp. 35-37).

On trouve, dans ces articles, quelques idées fondamentales dont M. Schering semble le premier auteur et qu'à ce titre il est juste de signaler :

« I. Dans un espace de Gauss, il existe entre les dix distances de cinq points, 1, 2, 3, 4, 5, la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (21) & (22) & (23) & (24) & (25) \\ (31) & (32) & (33) & (34) & (35) \\ (41) & (42) & (43) & (44) & (45) \\ (51) & (52) & (53) & (54) & (55) \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où $(ik) = \text{Ch}\left(\frac{\Delta_{ik}}{u}\right)$, $(\Delta_{ik} : u)$ désignant la distance Δ_{ik} des points i et k, mesurée au moyen de l'unité absolue de longueur u, et où $(11) = (22) = (33) = (44) = (55) = 1$.

Des relations analogues, où les déterminants ont respectivement 3 ou 4 lignes, définissent respectivement la droite et le plan, ou donnent la condition pour que trois points soient en ligne droite et pour que quatre points appartiennent à un plan (1er article, pp. 312-313).

II. Ce théorème, moyennant quelques changements dans les termes, peut, sans aucune autre supposition auxiliaire, servir de base unique à un système complet de géométrie dont la géométrie euclidienne est un cas particulier correspondant à $u = \infty$ (1er article, p. 315).

III. La relation analogue à (1), mais où entre un déterminant à $(n + 2)$ lignes,

$$\Sigma \pm (11)(22) \ldots (n + 2, n + 2) = 0,$$

caractérise un espace à n dimensions, soit infini (espace de Gauss) si $(i, k) = \text{Ch}\left(\frac{\Delta_{ik}}{u}\right)$, soit fini (espace de Riemann) si $(i, k) = \cos\left(\frac{\Delta_{ik}}{u}\right)$. (2e article, p. 15). »

Nous avons publié la relation (1), avec diverses conséquences, dans les *Annales de la Société scientifique* (1890-1891, t. XV, 1re partie, pp. 8-11), en la donnant comme nouvelle. On voit qu'en réalité elle est assez ancienne et est due à M. Schering ;

c'est lui aussi, semble-t-il, qui a eu, le premier, l'idée de caractériser un espace à n dimensions par la relation qui existe entre les distances de $(n + 2)$ points. Comme nous l'avons fait observer (*Annales*, 1888-1889, t. XIII, 1re partie, p. 59), M. De Tilly a exprimé, en 1887, la même idée, à laquelle il est arrivé sans connaître les articles de M. Schering (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XIV, p. 1015, fin de la note 14).

Dans les théorèmes cités plus haut, M. Schering appelle *espace de Gauss* ce que l'on appelle généralement *espace de Lobatschewsky*, c'est-à-dire espace où, par un point, on peut mener plus d'une parallèle à une droite.

Il nous semble que, jusqu'à preuve du contraire, la géométrie non euclidienne des espaces infinis doit continuer à porter le nom du géomètre de Kasan. La première publication de Lobatschewsky sur la métagéométrie date de 1826. Or, la lettre la plus ancienne de Gauss, où il donne un vrai théorème de géométrie non euclidienne métrique, semble être celle du 12 juillet 1831, adressée à Schumacher. Il serait intéressant de rechercher dans les papiers de Gauss ou dans ses lettres antérieures à 1826, un passage qui permît de décider s'il connaissait ou non plus que les premiers éléments de la métagéométrie; on sait qu'il s'est occupé des principes de la géométrie dès 1792, mais rien ne prouve jusqu'à présent, croyons-nous, qu'il ait vraiment devancé Lobatchewsky dans la connaissance approfondie des théories non euclidiennes.

Cependant il est très probable que tout le mouvement d'idées qui a renouvelé, depuis soixante ans, la critique des fondements de la géométrie, émane de Gauss. Par ses amis, Bartels, professeur de Lobatschewsky à l'Université de Kasan, et Wolfgang Bolyai, père de Jean Bolyai, il est presque certain qu'il a eu une influence indirecte sur Lobatschewsky et Jean Bolyai; d'autre part, c'est lui qui a poussé Riemann à étudier les hypothèses qui servent de base à la géométrie et à écrire son célèbre Mémoire. On peut donc dire, en un certain sens, que Gauss est l'initiateur des deux géométries non euclidiennes.

M. Dutordoir fait remarquer de plus, à ce propos, que Gauss, par son Mémoire sur la courbure des surfaces, a eu une influence directe, non seulement sur Riemann, mais aussi sur d'autres mathématiciens qui se sont occupés des principes de la géométrie.

M. Mansion fait un rapport verbal sur la note (en anglais) du R. P. Curtis, S. J., relative au cercle osculateur. Les théorèmes, d'ailleurs très intéressants, démontrés dans ce travail ont été obtenus antérieurement par divers géomètres, ou sont des corollaires de théorèmes connus; par suite, il est inutile de publier une traduction de la note du R. P. Curtis.

M. Ch. de la Vallée Poussin, fils, présente à la section un Mémoire *Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson.* Sont désignés comme commissaires pour examiner ce travail : MM. Mansion et Le Paige.

M. Mansion lit ensuite la note suivante *Sur la théorie des racines égales :*

« Lorsqu'on démontre d'une manière purement arithmétique le théorème fondamental de l'analyse algébrique (voir *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1889-1890, t. XIV, première partie, p. 46), de manière à le réduire à une identité entre nombres entiers, une partie de la théorie des équations se déduit presque aussi facilement de cette identité que des théorèmes moins précis ou moins généraux qu'elle remplace. Mais il n'en est pas de même pour une autre partie de l'analyse algébrique; en particulier, l'ancienne théorie des racines égales doit être modifiée complètement.

Voici comment on peut en établir le principe fondamental sans supposer le premier membre d'une équation $Fz = 0$ décomposé en facteurs du premier degré. Nous nous contentons de donner la suite des propositions avec une esquisse du raisonnement qui sert à les démontrer.

1. Si $Fz = az^2 + bz + c$ et $F'z = 2az + b$ ont un facteur commun, Fz est un carré parfait. Il suffit d'exprimer que le reste de la division de Fz par $F'z$ est nul pour démontrer ce théorème.

2. Si le polynôme entier Fz et sa dérivée $F'z$ ont un plus grand commun diviseur, Fz contient des facteurs premiers à une puissance supérieure à la première; 1° Fz n'est pas un polynôme premier, puisqu'il est divisible par son plus grand commun diviseur; 2° à moins que Fz ne soit une puissance exacte, auquel cas le théorème est évident, on peut écrire

$$Fz = AB, \quad F'z = A'B + AB',$$

A, B étant deux facteurs de Fz premiers entre eux; 3° supposons le théorème à démontrer vrai pour les polynômes de degré inférieur à celui de Fz; 4° le plus grand commun diviseur de Fz et de $F'z$ devra contenir un facteur premier d, qui divisera A ou B, A par exemple. Divisant A sans diviser B, premier avec A, et divisant aussi Fz et $Fz - AB'$ ou $A'B$, il doit diviser A'; 5° donc A, ayant un facteur commun avec sa dérivée, contient au moins un facteur à une puissance supérieure à la première, d'après 2°, 3°.

3. Si l'on a $Fz = A^m B^n C^p D^q \ldots$, A, B, C, D étant des facteurs premiers entre eux, dont aucun ne contient de facteur premier à une puissance supérieure à la première, Fz et $F'z$ ont pour plus grand commun diviseur $A^{m-1}B^{n-1}C^{p-1}D^{q-1}\ldots$. En effet, on peut écrire

$$F'z = mA^{m-1}A'.(B^n C^p D^q \ldots) + A^m S,$$

S étant un polynôme entier. Les polynômes Fz et $F'z$ ont le facteur commun A^{m-1}, mais aucun des facteurs premiers de A n'entre plus de $(m-1)$ fois dans $F'z$, car pour y entrer m fois, il devrait diviser A', ce qui, d'après le théorème 2, est contraire à l'hypothèse.

4. Soit F_1z le plus grand commun diviseur de Fz, $F'z$; F_2z, celui de F_1z et F'_1z; F_3z celui de F_2z et F'_2z, et ainsi de suite.

Supposons enfin que $F_n z$ et $F'_n z$ aient un plus grand commun diviseur numérique. On aura

$$Fz = (f_1 z)(f_2 z)^2 \ldots (f^n z)^n,$$

les facteurs $f_1 z$, $f_2 z \ldots f_n z$ (dont les $n - 1$ premiers peuvent se réduire à des nombres) étant premiers entre eux et ne contenant aucun facteur élevé à une puissance supérieure à la première. 1° D'après le théorème 3, Fz ne peut contenir de puissance supérieure à la $n^{\text{ième}}$, car si Fz contenait une pareille puissance, $F_n z$ et $F'_n z$ auraient un plus grand commun diviseur algébrique; 2° on peut supposer le théorème vrai pour $F_1 z$ et le supposer de la forme

$$F_1 z = (f_2 z)(f_3 z)^2 \ldots (f_n z)^{n-1};$$

3° on a ensuite

$$Fz = F_1 z . Q, \quad F'z = F'_1 z . Q + F_1 z . Q'.$$

Puisque $F_1 z$ divise $F'z$, et que $F'z$ contient une fois de moins que $F_1 z$ les facteurs $f_2 z$, $f_3 z \ldots f_n z$, ces facteurs doivent se trouver dans Q, qui est donc de la forme $(f_1 z)(f_2 z)(f_3 z) \ldots (f_n z)$. Donc, $Fz = F_1 z$. Q a la forme indiquée.

Les théorèmes 3 et 4 constituent le principe fondamental de la théorie des racines égales.

M. Dutordoir fait observer qu'un théorème plus général analogue se trouve démontré d'une manière purement arithmétique dans le chapitre II du mémoire de Molk : *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination* (*Acta mathematica*, VI, pp. 1-166), où l'on signale la seconde démonstration donnée par Gauss en 1815 pour le théorème fondamental de l'algèbre, comme contenant déjà une démonstration directe du principe de la théorie des racines égales.

M. Le Paige fait ensuite l'historique de l'emploi de certains signes d'opérations en arithmétique et en algèbre, notamment du signe de l'addition. Il rappelle les différentes interprétations qui en ont été données.

Il signale ensuite la ressemblance qui existe entre le signe + et l'abréviation employée dans l'écriture du moyen âge pour la conjonction *et*. Après avoir montré qu'au point de vue paléographique l'identification de ces deux signes est possible, il essaie de prouver que, dans la pratique de l'arithmétique au XV° et au XVI° siècle, c'est le mot *et* qui était en usage et non le mot *plus*, et qu'en outre, chez les arithméticiens de cette époque, le signe + avait conservé, outre le sens arithmétique, la signification grammaticale de la conjonction.

L'auteur s'attache ensuite à faire ressortir la liaison qui existe entre le signe de la multiplication × et l'emploi des barres de direction.

Le mémoire complet, avec une planche de fac-simile, paraîtra dans la seconde partie des *Annales*.

M. Ch. de la Vallée Poussin fait la communication suivante sur la *Série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée.*

1. M. Weierstrass a démontré (*) que la série

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x,$$

où b est une constante positive < 1 et a un entier impair > 1, représente une fonction continue qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable, quand ab surpasse la limite $1 + \frac{3}{2}\pi$.

On peut donner de ce théorème une démonstration autre, et qui, sans être moins simple que celle de l'illustre géomètre, non seulement permet d'abaisser la limite de ab, quand a est un nombre impair > 3, mais s'applique d'une manière particulièrement avantageuse quand a est pair, cas auquel la démonstration de M. Weierstrass ne s'applique plus.

(*) *Abhandlungen aus der Functionenlehre,* Berlin, Springer, 1886, pp. 97-101, et *Journal de Crelle,* 1874, t. LXXIX, pp. 29-31. Cette démonstration est reproduite dans le *Cours d'analyse* de M. Ph. Gilbert, 3e édition. p. 545; dans celui de M. Camille Jordan, t. III, p. 577, et dans celui de M. Mansion, pp 247-250.

Elle repose sur la relation suivante, qui suppose $x' < x < x''$:

$$\frac{F(x'')-F(x')}{x''-x'} = M\left[\frac{F(x'')-F(x)}{x''-x},\ \frac{F(x')-F(x)}{x'-x}\right];$$

d'où il résulte que si $\frac{F(x'')-F(x')}{x''-x'}$ tend arbitrairement vers $+\infty$ ou $-\infty$, quand x' et x'' tendent arbitrairement vers x, ou bien une des dérivées (à droite ou à gauche) sera complètement indéterminée, ou bien, si ces dérivées sont déterminées, elles seront toutes deux infinies et de signes contraires.

Nous allons montrer que nous sommes précisément dans ce cas.

2. Posons, h et h' étant positifs,

$$x'' = x + 2h, \qquad x' = x - 2h';$$

on aura

$$\begin{aligned} F(x'') - F(x') &= \sum_0^\infty b^n\left[\cos a^n\pi(x+2h) - \cos a^n\pi(x-2h')\right] \\ &= -2\sum_0^\infty \sin a^n\pi(h+h')\sin a^n\pi(x+h-h'). \end{aligned}$$

Soit m un entier quelconque; on peut poser

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

α_m étant un entier et ξ_m une fraction comprise entre $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Posons encore

$$a^m(h-h') = -\xi_m + \frac{e_m}{2}, \qquad a^m(h+h') = 1 + \frac{r}{a},$$

e_m étant égal à ± 1 et r étant compris entre zéro et $\frac{1}{2}a$; de plus, r est entier si a est impair, et quelconque si a est pair.

On aura

$$2a^m h = \frac{r}{a} + \left[1 - \xi_m + \frac{e_m}{2}\right],$$

$$2a^m h' = \frac{r}{a} + \left[1 + \xi_m - \frac{e_m}{2}\right];$$

h et h' seront donc positifs et tendront vers zéro quand m tendra vers l'infini.

Considérons l'expression

$$\frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'} = -\sum_0^\infty \frac{b^n \sin a^n\pi(h + h') \sin a^n\pi(x + h - h')}{h + h'}.$$

Une des deux quantités $a^n(h + h')$, $a^n(x + h - h')$ sera entière pour toute valeur de n supérieure à m, et par conséquent la somme précédente se réduira à ses $(m + 1)$ premiers termes. Soit S_m la somme des m premiers;

$$\operatorname{mod} S_m \leqq \sum_0^{m-1} \operatorname{mod} b^n \frac{\sin a^n\pi(h + h')}{h + h'},$$

$$\operatorname{mod} S_m \leqq \pi(1 + ab + \cdots + a^{m-1}b^{m-1}) \leqq \frac{(ab)^m \pi}{ab - 1}.$$

Le $(m + 1)^{me}$ terme a pour valeur

$$\frac{-(ab)^m \sin\pi\left(1 + \frac{r}{a}\right) \sin\pi\left(\alpha_m + \frac{e_m}{2}\right)}{1 + \frac{r}{a}} = e_m(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \frac{\sin\left(\pi\frac{r}{a}\right)}{1 + \frac{r}{a}}.$$

Soit θ une quantité comprise entre $+1$ et -1; on aura

$$\frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'} = (ab)^m \left[\frac{\theta\pi}{ab - 1} + e_m(-1)^{\alpha_m} \frac{\sin\left(\pi\frac{r}{a}\right)}{1 + \frac{r}{a}}\right].$$

Si donc on choisit a et b de manière à avoir, pour une valeur convenable de r,

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\pi}{ab - 1} < \frac{\sin\left(\pi\frac{r}{a}\right)}{1 + \frac{r}{a}},$$

l'expression précédente croîtra indéfiniment avec m et changera arbitrairement de signe avec e_m; $\frac{F(x'')-F(x')}{x''-x'}$ ne tendra donc vers aucune limite déterminée et pourra parcourir une série de valeurs indéfiniment croissantes entre $+\infty$ et $-\infty$.

3. Revenons à la relation (α). Le cas le plus simple est celui où a est pair. Dans ce cas, $\frac{r}{a}$ est un nombre quelconque t, et la relation (α) peut être remplacée par

$$\frac{\pi}{ab-1} < \max.\frac{\sin \pi t}{1+t} < 0,68244,$$

le maximum correspondant à $\pi t = 77^\circ\ 27'\ 12''$...

La condition de M. Weierstrass est

$$\frac{\pi}{ab-1} < \frac{2}{3} < 0,666\ldots,$$

la limite de ab est donc légèrement abaissée, dans le cas d'un nombre pair.

4. Quand a est impair, r est supposé entier, le maximum de $\frac{\sin \pi \frac{r}{a}}{1+\frac{r}{a}}$ dépend de la valeur de a, et par conséquent aussi la limite inférieure de (ab). Voici les résultats pour les quatre premiers nombres, en posant encore $t = \frac{r}{a}$:

pour $a=3$, $t=\frac{1}{3}$, $\pi t = 60^\circ$, $\frac{\sin \pi t}{1+t} = 0,64953\ldots$;

» $a=5$, $t=\frac{2}{5}$, $\pi t = 72^\circ$, $\frac{\sin \pi t}{1+t} = 0,67933\ldots$;

» $a=7$, $t=\frac{3}{7}$, $\pi t = 77^\circ\,{}^1/_7$, $\frac{\sin \pi t}{1+t} = 0,68242\ldots$;

» $a=9$, $t=\frac{4}{9}$, $\pi t = 80^\circ$, $\frac{\sin \pi t}{1+t} = 0,68175\ldots$.

A l'exception du premier, tous ces nombres surpassent $\frac{2}{3}$, et comme pour $a > 10$, on peut toujours déterminer r de manière que $\frac{r}{a}$ tombe entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$, on voit que la limite inférieure de ab déterminée par cette méthode sera supérieure à celle de M. Weierstrass, sauf pour $a = 3$.

5. Cette démonstration laisse subsister la possibilité de trouver des points pour lesquels les dérivées à droite et à gauche sont infinies et de signes contraires. On peut effectivement trouver dans tout intervalle une infinité de points qui correspondent à des maxima de $F(x)$ et pour lesquels il en est ainsi.

Posons $x = \frac{2p}{a^n}$, p et n étant entiers; on aura

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{1}^{n-1} b^n \left[\cos a^n\pi(x+h) - \cos a^n\pi x\right] - \frac{1}{h}\sum_{n}^{\infty} b^n \left[1 - \cos a^n\pi(x+h)\right].$$

Quand h tend vers zéro, le premier terme du second membre tend vers une limite déterminée. Soit H le second terme;

$$-\mathrm{H} = \frac{2}{h}\sum_{n}^{\infty} b^n \sin^2\frac{\pi}{2}a^n(x+h) = \frac{2}{h}\sum_{n}^{\infty} b^n \sin^2\frac{\pi}{2}a^n h.$$

Posons $h = \pm\frac{1}{a^m}$, m tendant vers l'infini d'une manière quelconque, et soit $m_1 > n$ le plus grand entier contenu dans m; on aura

$$-h\mathrm{H} > 2\sum_{n}^{m_1} b^n \sin^2\frac{\pi}{2}a^n h > 2h^2 \sum_{n}^{m_1} (a^2b)^n \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}a^n h}{(a^n h)^2}.$$

Dans cette somme, $a^n h$, restant compris entre *zéro* et *un*, satisfait à la relation

$$\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}a^n h}{(a^n h)^2} \overline{\gt} 1,$$

et l'on en déduit

$$-\frac{h}{\text{mod}\, h}\text{H} > 2\frac{1}{a^m}\sum_n^{m_1}(a^2b)^n > \frac{2}{a^m}\frac{(a^2b)^{m_1+1}-(a^2b)^n}{a^2b-1}$$
$$> \frac{2}{a^2b-1}\left[a^{m_1+1-m}(ab)^{m_1+1} - a^{n-m}(ab)^n\right].$$

Si $ab > 1$, cette dernière quantité augmente indéfiniment avec m, et par conséquent H tend vers $-\infty$ quand h tend vers zéro en restant positif, et H tend vers $+\infty$ quand h tend vers zéro en restant négatif.

On aura donc

$$\lim_{h=0}\frac{\text{F}(x+h)-\text{F}(x)}{h} = -\infty\ (h>0),\quad \lim_{h=0}\frac{\text{F}(x+h)-\text{F}(x)}{h} = +\infty\ (h<0),$$

pour toute valeur de x de la forme $\frac{2p}{a^n}$.

M. Dutordoir expose quelques considérations sur le dernier théorème de Fermat.

Enfin, M. Mansion fait l'historique des recherches des géomètres en vue de réduire la mécanique rationnelle tout entière à la cinématique. Il cite d'Alembert, Euler, Du Buat, Gauss et Jacobi, Grassmann, de Saint-Venant, Kirchhoff, mais surtout de Saint-Venant, comme ayant le plus contribué à séparer nettement les théories de la mécanique rationnelle d'avec les résultats de la mécanique physique. M. Mansion remet à une session ultérieure un exposé systématique des principes de la mécanique rationnelle à un point de vue purement cinématique.

Deuxième section.

M. G. Van der Mensbrugghe présente la note suivante, d'un caractère purement pédagogique : *Sur une manière très simple d'exposer la théorie des miroirs ou des lentilles.*

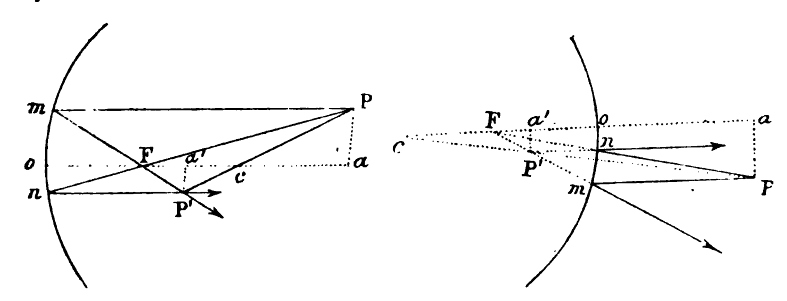
« Dans tous les ouvrages de physique que j'ai pu consulter, j'ai constaté que la théorie des miroirs sphériques de faible ouverture et celle des lentilles minces sont exposées à l'aide de constructions beaucoup trop nombreuses pour ne pas embarrasser la mémoire des jeunes gens; c'est pourquoi j'ai tâché de faire découler toutes les propriétés des miroirs et des lentilles de deux constructions bien simples et d'ailleurs connues; l'une s'applique à tous les miroirs sphériques; l'autre, presque identique à la première, fournit les images produites par une lentille sphérique mince quelconque, convergente ou divergente.

Ces constructions reposent sur les propriétés réciproques des foyers et des axes secondaires des miroirs ou des lentilles, à savoir :

1° Tout rayon parallèle à un axe secondaire se réfléchit (cas des miroirs) ou se réfracte (cas des lentilles) suivant une droite passant par un même point de cet axe et appelé *foyer secondaire*, réel ou virtuel;

2° Réciproquement, tout rayon dirigé suivant une droite passant par un foyer secondaire, et tombant sur un miroir ou sur une lentille, se réfléchit ou se réfracte parallèlement à l'axe secondaire auquel appartient le foyer.

D'après cela, je regarde comme établies les propriétés des foyers en général et du centre optique des lentilles, par lequel passent tous les axes secondaires de ces dernières.



A. *Construction pour le cas des miroirs.* Soit P un point lumineux, P*m* un rayon incident quelconque, mais tombant sur le miroir dans le voisinage du centre de figure; menons l'axe

secondaire *oc* parallèle à *m*P; le milieu F du rayon *oc* sera le foyer secondaire par lequel passera le rayon réfléchi *m*F; en second lieu, le rayon incident PF*n* qui passe par F se réfléchit suivant *n*P' parallèle à *oc*; le point d'intersection P' des deux rayons réfléchis est le foyer conjugué de P. Pour en fixer la position, menons P*a*, P'*a'* perpendiculaires à *oc*, et nommons φ, φ' les distances respectives de *a*, *a'* au foyer F, et *f* la distance focale; nous aurons :

$$\frac{a'P'}{aP}=\frac{on}{aP}=\frac{Fo}{Fa}=\frac{f}{\varphi},\quad \frac{a'P'}{aP}=\frac{a'P'}{om}=\frac{a'F}{Fo}=\frac{\varphi'}{f};$$

d'où

$$\frac{f}{\varphi}=\frac{\varphi'}{f}$$

C'est la formule bien connue de Newton (*).

Vérification. Si la construction est exacte, P', *c*, P doivent être en ligne droite. Or,

$$\frac{a'P'}{aP}=\frac{f}{\varphi}=\frac{\varphi'}{f}=\frac{f-\varphi'}{\varphi-f}=\frac{a'c}{ac};$$

donc les triangles *a'c*P', *ac*P sont semblables (**).

Discussion. Les quantités φ et φ' sont toujours de même signe, de manière que l'image et l'objet se trouvent toujours du même côté du foyer.

Au lieu de faire varier φ de 0 à $+\infty$, il est bien plus simple de prendre *f* pour unité linéaire; dès lors, si $\varphi=nf$, on a

$$\varphi'=\frac{f}{n}.$$

(*) *a*'P' diffère d'autant moins de *on*, et *a*P de *om*, que les points P' et P sont plus voisins de l'axe secondaire.

(**) Dans le cas des miroirs convexes, on a

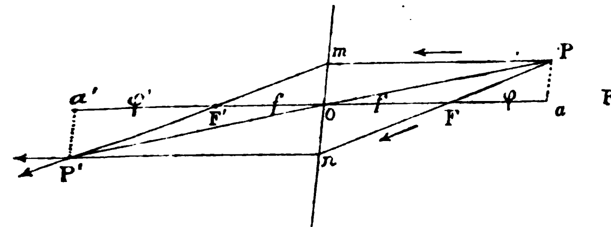
$$\frac{a'P'}{aP}=\frac{f+\varphi'}{\varphi+f}=\frac{a'c}{ac}.$$

La construction appliquée soit aux miroirs convexes, soit aux miroirs concaves, donne immédiatement le grossissement

$$\frac{a'P'}{aP}=\frac{f}{\varphi}=\frac{\varphi'}{f}.$$

B. *Construction dans le cas des lentilles convergentes ou divergentes.* On les suppose assez minces pour que, suivant l'usage, on puisse les réduire théoriquement au plan normal à l'axe et passant par le centre optique.

LENTILLE CONVERGENTE.



o, centre optique; P, point lumineux;
mP, rayon incident quelconque;
F'oF, axe secondaire parallèle à Pm;
mF', rayon réfracté correspondant;
PFn, rayon incident;
P'n, parallèle à F'o, rayon réfracté correspondant;
P', foyer conjugué (réel) de P.

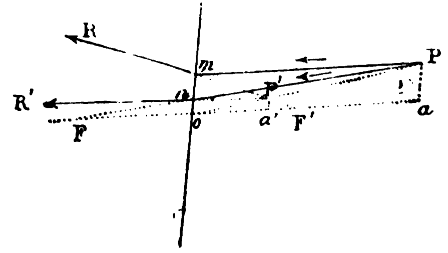
Menons aP, a'P' parallèles à mon, et soient aF $=\varphi$, a'F' $=\varphi'$. On a :

$$\frac{a'P'}{aP}=\frac{f}{\varphi}=\frac{\varphi'}{f}=\frac{f+\varphi'}{\varphi+f}=\frac{oa'}{oa};$$

donc la ligne PP' passe par o.

Ici φ et φ' sont positifs ou négatifs à la fois. Si φ devient négatif (objet placé entre le foyer et la lentille), φ' se compte à droite de F' et surpasse f, puisque f surpasse φ.

LENTILLE DIVERGENTE.



o, centre optique; P, point lumineux;
mP, rayon incident quelconque;
FoF', axe secondaire parallèle à Pm; ici les foyers F et F' sont placés en sens inverse de celui qui convient aux lentilles convergentes;
F'mR rayon réfracté correspondant;
PnF, deuxième rayon incident;
nR' parallèle à FoF', est le deuxième rayon réfracté;
P', fôyer conjugué (virtuel) de P.

Si aP, a'P' sont parallèles à onm, on a, en posant encore aF $=\varphi$, a'F' $=\varphi'$,

$$\frac{a'P'}{aP}=\frac{f}{\varphi}=\frac{\varphi'}{f}=\frac{f-\varphi'}{\varphi-f}=\frac{oa'}{oa}.$$

Donc oP'P est une ligne droite.

D'après ce qui précède, on voit qu'une même formule permet, dans tous les cas, d'obtenir aisément l'image d'un objet et le grossissement correspondant.

M. Fr. De Walque entretient la section de recherches dont il a eu à s'occuper dans ces derniers temps.

On connait depuis longtemps l'action des émanations sulfureuses de certaines usines sur la végétation des environs. Il est assez intéressant de fixer les caractères auxquels on peut reconnaître que c'est bien aux émanations que sont dues les altérations constatées.

Dans le grillage des minerais sulfurés, le soufre se dégage surtout à l'état d'anhydride sulfureux et en partie aussi à l'état d'anhydride et d'acide sulfurique provenant de la décomposition des sulfates produits pendant le grillage. Mais le gaz sulfureux, au contact de l'air humide, se transforme lui-même, au bout d'un certain temps, en acide sulfurique ; de sorte qu'à une certaine distance de l'orifice de la cheminée, on peut être certain de trouver, dans le courant gazeux qui provient de l'usine, du gaz sulfureux et de l'acide sulfurique. Lequel des deux est le plus nuisible? Les opinions varient à cet égard, mais, en tout état de cause, une feuille qui aura souffert de ces émanations retiendra de l'acide sulfurique, que l'analyse chimique y retrouvera avec certitude soit à l'état de liberté, soit à l'état de combinaison.

Les sulfates existant naturellement dans les végétaux, il s'agit donc de doser exactement la quantité de cet acide dans les plantes qui ont subi les atteintes des gaz sulfureux et, comparativement, dans des plantes de même espèce, ayant grandi dans le même sol et dans des conditions analogues, mais en dehors de la direction des vents dominants passant par la cheminée.

Pour ce dosage, comme une quantité de cet acide est libre (ce que le papier de tournesol permet de constater facilement), il est nécessaire de traiter les feuilles à analyser par une solution faible de carbonate de sodium, puis on dessèche et l'on incinère. Dans la cendre, on dose le sulfate.

Il nous a été donné de constater ainsi des différences du simple au double, dans les quantités de sulfate, différences qui ne laissent aucun doute sur l'origine des altérations causées à la végétation.

Nous donnerons, à une prochaine séance, les résultats des

diverses séries d'analyses que nous sommes en train de terminer; les chiffres constatés sont tout à fait probants.

M. H. De Preter présente quelques observations sur la production industrielle de l'électricité, sur la construction des dynamos et sur les progrès accomplis récemment dans l'extraction de l'aluminium.

MM. G. Van der Mensbrugghe et F. Leconte communiquent la note suivante : *Sur un nouveau flotteur capillaire.*

Les flotteurs à bouchons que nous avons employés jusqu'ici présentent un inconvénient : le bouchon s'imbibant graduellement de liquide malgré les vernis dont on peut le couvrir, l'appareil est difficile à régler. Remarquons que l'effet de ces expériences est dû tout entier à une différence très faible entre les valeurs de deux forces opposées suivant la même direction : un léger excès dans la poussée, compensé par la tension superficielle dont on multiplie les actions par des dispositions convenables (*). Il importe donc que tous les autres éléments soient aussi peu variables que possible.

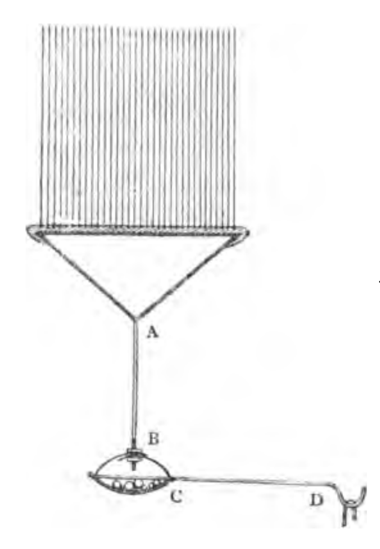
Dans notre nouveau flotteur, la partie légère est constituée par un cône en fer-blanc, ne contenant que de l'air, et hermétiquement fermé; le cercle de base a 9 centimètres de diamètre, et la hauteur du cône est de 4 centimètres. Une tige de fer est soudée au sommet du cône et supporte une petite corbeille destinée à contenir la tare pour le réglage de l'appareil.

Un autre avantage précieux de notre flotteur réside dans la forme conique que nous avons adoptée : les anciens flotteurs, en forme de cylindre, entraînaient parfois des bulles d'air dont il était difficile de se débarrasser; cet entraînement devient impossible avec la forme conique.

(*) Van der Mensbrugghe, *Causerie sur la tension superficielle* (Conf. à la *Soc. belge de microscopie,* 1888). — F. Leconte, *Archives des sciences physiques et naturelles de Genève,* mai 1890, p. 419. — *La Nature,* 1er nov. 1890, p. 338. — *Praktische Physik,* März 1891, S. 71.

On couvre la base du cône d'une couche de cire blanche de 3 millimètres d'épaisseur, et on plante dans cette couche, normalement, des fils de verre minces. Un détail de construction: ces tubes, formés avec le verre ordinaire du laboratoire, sont creux; il faut par suite avoir soin, en montant l'appareil, de boucher l'extrémité inférieure de ces tubes : on les plonge dans la cire fondue avant de les fixer. Si l'on néglige cette précaution, l'eau pénètre dans les tubes par la partie inférieure, les remplit, alourdit l'appareil et rend l'expérience impossible.

La figure ci-dessous montre le flotteur prêt à fonctionner.



Rappelons ici l'expérience fondamentale (*). On munit un tube de verre délié de 5 millimètres de diamètre, d'un petit morceau de bouchon à la partie supérieure, et d'une petite masse de fil de fer fin en bas. On arrive, après quelques tâtonnements, à donner à ce fil de verre plongé dans un liquide une position stable et bien verticale. Il suffit alors de toucher la surface avec une pointe trempée dans l'eau de savon pour voir immédiatement le fil de verre se soulever de plus de 2 centimètres : on a diminué la tension superficielle.

Notre appareil permet de montrer à un vaste auditoire cette petite expérience; celui que nous avons construit portait 400 fils de verre de $0^{mm},7$ de diamètre extérieur, et longs de 9 centimètres.

On le plonge dans un vaste baquet, et on le leste de manière que les tiges de verre soient immergées jusqu'au milieu dans l'eau.

(*) MARANGONI, *Influenza dell' imbrattamento di superficie sulle misure areometriche* (RIVISTA DI VIMERCATI, 1880, p. 55).

Ici se produit un incident : il est difficile de répartir les fils dans le gâteau de cire d'une manière irréprochablement uniforme. En vertu même de la tension superficielle, le côté qui contient le plus de fils se trouve aspiré, et l'appareil, qui semblait très bien équilibré dans l'air, prend dans l'eau un maintien déplorable.

Il s'incline parfois si fort, qu'il devient difficile de lui éviter une chute dans les profondeurs du baquet. Nous avons dû employer l'artifice suivant pour obvier à cet inconvénient : CD est une tige de cuivre soudée au panier à lest. Cette partie tout entière de l'appareil est mobile autour de AB. Pour ramener les fils dans la position verticale, il nous suffit de mettre CD dans une direction diamétralement opposée à celle de l'inclinaison, et de déposer sur le crochet qui termine CD de légers fils de cuivre.

L'appareil étant ainsi rendu vertical, si l'on touche la surface liquide avec un pinceau imbibé d'eau de savon, on voit immédiatement l'appareil se relever de 2 $^1/_2$ centimètres environ.

On peut, comme dans beaucoup de questions concernant la tension superficielle, reproduire un grand nombre de fois l'expérience en renouvelant la surface.

Troisième section.

M. Léon De Lantsheere rappelle la découverte du nom de *Jérusalem* sur les tablettes égyptiennes de Tell-Amarna au XIVe siècle avant notre ère. Il établit quelle était, à cette époque reculée, la situation politique de cette ville, vassale de l'Égypte.

Le R P. Van den Gheyn présente à la section deux ouvrages de philologie africaine : l'*Essai sur la langue congolaise* (*) du R. P. Cambier et la *Grammaire comparée des langues bantoues du sud de l'Afrique* (**), par le R. P. Torrend.

(*) Bruxelles, 1891.
(**) Kegan Paul, Trench, Trübner. Londres, 1891.

Il entre, à cette occasion, dans quelques détails sur les langues africaines, et en particulier sur les idiomes bantous. Si l'on fait abstraction des langues sémitiques, l'arabe, en usage dans certaines régions du nord et de l'est, et l'éthiopien parlé en Abyssinie, ainsi que des langages hamitiques, nom sous lequel on désigne l'égyptien, le berbère et certains dialectes des Somalis et des Gallas, au sud de la mer Rouge ; si l'on écarte en outre les langues des Hottentots et des Boschimen, il reste deux grands groupes de langues africaines : les langues soudaniennes et les idiomes bantous.

Les langues soudaniennes sont répandues de l'est à l'ouest sur toute la zone qui va de la mer Rouge à l'océan Atlantique ; au nord, elles vont jusqu'aux régions algériennes, sans jamais descendre au sud jusqu'à l'équateur. Jusqu'à présent, on n'a point réussi à découvrir d'affinités entre les diverses langues soudaniennes.

Il n'en est pas de même de l'autre groupe : il constitue une famille linguistique au sens strict du mot, c'est-à-dire qu'à côté de variétés dialectales apparait, dans la structure fondamentale, une identité essentielle nettement caractérisée.

Cette caractéristique générale est celle du principe d'accord par les préfixes. Ces préfixes, une fois adoptés pour un mot, demeurent dans tous les autres termes qui servent à le déterminer, adjectifs, pronoms, verbes, avec cette différence que le singulier et le pluriel ont un préfixe spécial, et que le préfixe se présente tantôt sous une forme pleine, tantôt sous une forme affaiblie. Ainsi, par exemple, un certain nombre de substantifs ont au singulier le préfixe *mu*, qui, au pluriel, fait *ba*, et au singulier des pronoms et des verbes revêt la forme affaiblie *u*. Par conséquent *mu-ana*, qui veut dire « enfant », fera au pluriel *ba-ana*, « les enfants ». *Mu-ana u-ako u-afua* signifie « votre enfant est mort », et « vos enfants sont morts » se traduira par *ba-ana ba-ako ba-afua*.

Les grammairiens ont distingué les divers préfixes formatifs en plusieurs classes, qu'on a pris l'habitude de désigner par le double préfixe du singulier et du pluriel. Il y a les



classes *mu-ba, mu-mi, in-zin, li-ma, ci-zi, ka-tu, bu-ma, li-zin, mu-ma, bu zin,* etc. Chose curieuse, même lorsque le bantou s'approprie des mots étrangers, il les soumet à la règle du préfixe. C'est ainsi que le portugais *camisa* (chemise) est passé dans le dialecte des Filyans, peuplade du Congo français, habitant la rive gauche de la Cazamance, sous la forme de *ka-misha*. Les indigènes ont cru reconnaître dans *ka* un de leurs préfixes, d'où ils ont formé un pluriel *u-misha*.

Nous avons cité les préfixes dans la forme qu'ils affectent en dialecte tonga, considéré par le P. Torrend comme le type le plus pur du bantou. Toutefois, les préfixes ne gardent point une physionomie invariable dans les deux cents idiomes bantous. Ainsi, la liste que nous avons citée devient, chez les Bamangalas, de Nouvelle-Anvers (Mpoembou) : *mo-ba, mo-mi, n-n* (*m*), *i-ma, e-bi, bo-ma, lo-n* (*). Si de *li-zin* à *lo-n* la route paraît aussi longue que d'*alfana* à *equus*, les éléments de comparaison fournis dans l'ouvrage du P. Torrend tracent pourtant des étapes sûres (**).

Assurément, l'accord grammatical des préfixes constitue le principe fondamental qui préside à la formation des idiomes bantous, et, jusqu'à présent, il avait presque exclusivement frappé ceux qui se sont occupés de ce groupe de langues africaines. Toutefois on peut établir d'autres traits distinctifs de ces idiomes. Ainsi, le bantou évite les monosyllabes, et certaines consonnes appellent l'insertion d'une nasale. Pour être moins apparente à première vue, l'influence de ces lois est aussi réelle que celle du principe des préfixes. Voici, en effet, la règle invariable au cas où l'application de ces trois principes entraînerait pour un même mot des effets contradictoires : le principe d'accord cède le pas à la loi des nasales, et l'antimonosyllabisme prime l'un et l'autre. Exemple : *li-zuba* (le soleil) devient, sous l'influence de la nasale qui sert de particule copulative, *ndi-zuba* (c'est le soleil), et non *nli-zuba*. La seconde personne de l'impératif ne prend généra-

---

(*) CAMBIER, *Essai sur la langue congolaise*, p. 11.
(**) *Op. cit.*, p. 104.

lement aucun préfixe, sinon dans le cas d'un thème monosyllabique. C'est pourquoi on a d'une part *bona* (vois), et de l'autre, *ku-la* (mange) du thème *la*.

Dans les idiomes bantous, le chapitre de la phonétique doit tenir compte d'un fait anthropologique. Les tribus africaines se chargent le nez et les lèvres d'anneaux et d'ornements, d'autres se mutilent, s'arrachent certaines dents. Ces transformations des organes entraînent des modifications dans la prononciation. Il faut en tenir compte dans la formule des règles phonétiques.

Le R. P. G. Schmitz, S. J., fait la communication suivante sur divers points de paléontologie végétale :

M. le professeur Lester F. Ward, du *Smithsonian Institution* de Washington, a publié dernièrement un article (*) dans lequel il revient, à la suite de M. Huxley (**), sur la critique du terme de *contemporanéité* en géologie. Il voit, dans les faits recueillis par la stratigraphie aidée des données de la paléontologie, plutôt la justification du principe d'*homotaxie*, qui préjuge peu de chose sur le synchronisme des formations.

En effet, la présence d'une faune ou d'une flore sensiblement identique dans deux gisements ne semble pas fournir au raisonnement de prémisses convenables pour conclure judicieusement à la concordance *exacte* de leur formation dans l'ordre des temps, mais bien à une grande analogie des conditions physiques qui favorisèrent le développement de la vie.

Paléophytologiste zélé, M. Lester Ward en appelle à la botanique fossile pour appuyer son idée, et il reconnaît à cette branche des sciences géologiques, avec M. Newberry, une grande valeur pour élucider les questions obscures au point de vue des relations de stratification.

Toutefois l'auteur ne veut pas soutenir que la paléontologie

(*) *Principles and Methods of Geologic Correlation by Means of Fossil Plants* (American Geologist, vol. IX, n° 1, janv. 1892).

(**) *Annual Address by the President of the Geological Society of London* (21 Febr. 1862).

végétale soit déjà parvenue à un haut degré de perfection. Beaucoup reste encore à faire, et ce n'est que peu à peu qu'un travail persévérant parviendra à aplanir les difficultés dont cette science est hérissée.

Voici quelques pas faits dans la voie du progrès.

M. R. Zeiller, ingénieur en chef au corps des mines de France, vient de débarrasser, définitivement semble-t-il, la nomenclature paléophytologique du genre *Trizygia* (*). Ce genre, comme l'avait avancé Mac-Clelland et Unger depuis 1850, doit rentrer, sans aucun doute, dans le genre *Sphenophyllum* et ne peut donc pas servir de raison au rapprochement hardi de la flore carbonifère d'Italie des flores correspondantes de l'Afrique et de l'Asie, comme le pensaient MM. de Bosniaski (**) et de Stefani (***).

Dans la même séance, M. R. Zeiller présentait à la Société géologique de France un nouveau mémoire (****) de M. C. Grand'-Eury.

L'état fragmentaire dans lequel on trouve ordinairement les végétaux fossiles, et dont nous avons parlé à diverses reprises, n'avait pas encore permis de rapporter à un même type des organes épars, classés jusqu'ici sous des noms génériques différents. D'heureuses trouvailles, consignées dans le savant mémoire de M. Grand'Eury, sont venues jeter une grande lumière sur la nature des Calamariées et des Sigillariées.

Pour les premières, le *Calamites cannaeformis* Schloth. d'une part formerait une même plante avec les tiges ligneuses d'*Arthropitys* et les *Asterophyllites* comme feuillage ; et, d'autre part, les *Stylocalamites*, associés aux *Calamodendron*, auraient porté les branches feuillées des *Calamocladus* et les *Calamostachys* en qualité d'organes reproducteurs.

(*) *Sur la valeur du genre* Trizygia (Bull. de la Soc. géol de France, (3), t. XIX, pp. 673 et suiv.).

(**) *Flora fossile del Verrucano nel Monte-Pisano*. Pise, 1890.

(***) Bull. de la Soc. géol. de France, (3), t. XIX, pp. 233 et suiv.

(****) *La géologie et la paléontologie du bassin houiller du Gard*. 1890, 1 vol. in-4° avec atlas in-folio, publié par les Compagnies houillères du Gard. Analyse de M. R. Zeiller (Bull. de la Soc. géol. de France, 3), t. XIX, pp. 679 et suiv.).

Les nouvelles données concernant les Sigillariées semblent empreintes d'un caractère de certitude autrement convaincant. De véritables forêts de Sigillaires furent mises à nu dans les carrières à remblais de Champclauson, et les faits vinrent confirmer les idées de M. Renault et celles de M. Grand'Eury luimême.

D'immenses rhizomes (*Stigmaria*) s'étendaient au-dessus de la vase des marécages de l'époque houillère; ici et là ils se nouaient pour former de gros bulbes qui présentent d'ailleurs dans leur anatomie tous les caractères de la base du tronc des Sigillaires. La suite du développement et la ramification de la partie inférieure lui donnaient successivement la forme de *Stigmariopsis*, puis celle de *S*[illegible], pour ne faire apparaître la plante avec l'aspect bien connu des *Sigillaria* proprement dits qu'au-dessus du niveau de l'eau où ses pieds se baignaient.

C'est ainsi que de patientes recherches, mises à profit par la vraie science, feront progresser la paléontologie végétale et donneront sans cesse plus de valeur aux secours qu'elle prête à la géologie et à la botanique.

Cette communication donne lieu à des observations de MM. Dollo et [illegible].

M. Dollo appelle l'attention de la section sur les *Dinosauriens* [illegible] par le professeur [illegible] Marsh.

Il y a deux sortes de Dinosauriens [illegible] : un type carnivore et des formes herbivores.

[illegible] il ne mesurait que [illegible] sur le [illegible]

[illegible] et le [illegible]

[illegible] et sa tête, qui [illegible] impaire, [illegible] par rapport

au plan médian, au-dessus des orbites; la dimension de ces dernières cornes était de $0^m,70$.

Le *Torosaurus* possédait un crâne de 2 mètres de long, que surmontaient aussi trois cornes. Mais, tandis que les cornes paires de *Triceratops* étaient presque verticales, celles de *Torosaurus* s'inclinaient en avant et atteignaient le bout du museau.

Triceratops et *Torosaurus* étaient quadrupèdes. M. Dollo les considère comme des Ornithopodes (c'est-à-dire des Dinosauriens bipèdes), à pubis disparu, qui se sont remis à marcher à quatre pattes.

Ceratosaurus appartient à l'époque jurassique; *Triceratops* et *Torosaurus*, à la partie la plus supérieure du crétacé.

Toutes ces formes sont d'origine américaine.

M. Proost s'occupe de l'historique des recherches sur la fixation de l'azote, à propos d'un discours récent de M. Dehérain. Dès 1883, il avait été fait des cultures dans le sable, tendant à mettre en évidence les conditions de fixation de l'azote atmosphérique par les plantes cultivées. Ces expériences ont confirmé le *principe* de la doctrine de G. Ville, mais ont infirmé la plupart de ses conclusions absolues (*).

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

M. le Dr Verriest, professeur à l'Université de Louvain, fait une conférence sur *la parole* au point de vue physiologique. Après un aperçu historique sur les localisations cérébrales, il expose le mécanisme de la parole entendue, puis celui de la parole émise ainsi que celui des autres modes d'expression de la pensée. Il montre que le cerveau, ou plutôt tout l'organisme humain est un admirable appareil enregistreur où viennent

(*) *Le Progrès agricole en Belgique*, 1891 (Louvain, Aug. Peeters).

s'inscrire, d'une manière harmonieuse, toutes les impressions venues du monde extérieur. L'homme élabore ces données des sens et par l'intermédiaire du cerveau encore et de l'organisme tout entier, consciemment ou inconsciemment, donne une expression sensible à la pensée. M. Verriest insiste particulièrement sur les images motrices inconscientes qui ont été mises en évidence et ingénieusement utilisées par le *liseur de pensées* Cumberland dans ses séances mémorables. La méthode la plus rationnelle d'éducation des sourds-muets repose aussi sur le fait de l'existence de ces images motrices intimement associées aux pensées que l'on veut exprimer. Il montre enfin, pour terminer, les relations étroites qui rattachent l'esthétique, dans le sens le plus étendu du mot, au sujet qu'il vient de traiter.

SESSION DES 25, 26 ET 27 AVRIL 1892

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

Lundi, 25 avril 1892. — M. Mansion lit le rapport de M. C. Jordan sur le mémoire présenté en réponse à la question de mathématiques posée par la première section. Sur les conclusions de ce rapport, une médaille de 500 francs a été décernée par le conseil de la Société à l'auteur du mémoire, M. Ch. de la Vallée Poussin, chargé de cours à l'Université de Louvain.

Le texte du rapport de M. Jordan est publié plus bas, dans le compte rendu de l'assemblée générale du 27 avril 1892.

La section entend ensuite la lecture du rapport suivant de M. De Tilly sur le mémoire intitulé : *Sur le développement en série des formules du mouvement du pendule conique et sur quelques propriétés de ce mouvement*, par le M. Cte DE SPARRE, professeur aux Facultés catholiques de Lyon (*):

« L'étude du mouvement du pendule conique a été faite déjà bien des fois par l'emploi des fonctions elliptiques, et l'auteur lui-même s'en est occupé dans un mémoire inséré aux *Annales* de la Société.

D'autres solutions ont été données par les séries, et le mémoire actuel en contient une nouvelle, qui présente sur les solutions connues l'avantage d'être un peu plus simple et de mettre en

(*) Voir une analyse du mémoire, due à M. Gilbert, dans le compte rendu de la séance du 29 octobre 1891 (*Annales*, t. XVI, 1re partie, pp. 1-2).

évidence la propriété établie par Puiseux, relativement à l'angle formé par les azimuts du pendule pour un maximum et le minimum consécutif de l'angle d'écart.

L'auteur étudie ensuite la question des points d'inflexion, que la projection horizontale de la trajectoire peut présenter lorsque le point mobile est au-dessus du point de suspension. Cette question a été résolue par Halphen, dans le second volume de son *Traité des fonctions elliptiques*, mais la solution actuelle est plus complète.

En résumé, le mémoire peut être considéré comme une étude approfondie du mouvement du pendule conique, par les fonctions élémentaires.

J'ai l'honneur de proposer à la section d'en ordonner l'impression. »

La section se rallie aux conclusions de ce rapport.

M. Mansion n'ayant pas eu le temps de faire rapport sur la note de M. Ch. de la Vallée Poussin, intitulée : *Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson*, demande à la section l'autorisation de la faire imprimer dans les *Annales*, dans le cas où le second commissaire, M. Le Paige, et lui, seraient d'accord pour approuver ce travail. La section accorde l'autorisation demandée.

M. Mansion donne ensuite lecture du rapport de M. De Tilly sur le mémoire de M. Goedseels, intitulé : *Sur les fonctions sans dérivée en cinématique*, dont une analyse a été donnée dans la séance du 29 octobre 1891 (Voir *Annales*, t. XVI, première partie, p. 5).

La section décide que le mémoire de M. Goedseels sera imprimé, après que l'auteur et le rapporteur se seront mis d'accord sur un point où le second ne partage pas la manière de voir du premier. Éventuellement, le mémoire pourra être soumis à un second rapporteur (*).

(*) Le second rapporteur, désigné dans la séance du 29 octobre 1891, était M. Gilbert, que la Société scientifique a eu le malheur de perdre le 4 février 1892.

M. Goedseels expose un procédé de détermination de la longueur des lignes courbes et de l'aire des surfaces, où il ramène à celle de volume les notions fondamentales relatives à ces grandeurs. Voici le résumé de cette communication :

« Lorsqu'on veut mesurer les longueurs des lignes courbes à l'aide d'unités rectilignes, et les aires des surfaces courbes à l'aide d'unités planes, il est nécessaire de définir avec précision ce que l'on entend par là. Les longueurs et les aires, ainsi définies, doivent jouir des propriétés suivantes, qui correspondent aux notions vulgaires, mais peu précises, relatives à ces quantités :

1° Toute ligne (surface) a une longueur (aire) unique.

2° Toute ligne (surface) réduite à un ou plusieurs points isolés a une longueur (aire) nulle.

3° L'ensemble de deux ou plusieurs lignes (surfaces) a pour longueur (aire) la somme des longueurs (aires) partielles.

Toutes les définitions proposées jusqu'à présent reposent, au fond, sur la mesure de la longueur de polygones inscrits dans les lignes courbes, ou de l'aire de polyèdres inscrits dans les surfaces. Pour les longueurs, la définition proposée par M. Peano (*), et une définition publiée par nous en 1888 (**), répondent à toutes les exigences. Pour les aires, la meilleure des définitions connues, celle de M. Peano, ne jouit pas, dans tous les cas, des propriétés 2 et 3 données plus haut, mais il serait sans doute facile de la compléter.

Nous allons faire connaître une nouvelle définition des longueurs et des aires. Nous supposons connue la mesure des volumes (***), et nous en déduisons, pour la mesure des lon-

---

(*) *Sulla definizione dell' area d'una superficie* (*R. Accademia dei Lincei*, 19 janvier 1890). La définition de M. Peano, pour être complète, devrait être énoncée comme il suit : « *La longueur d'un arc de courbe est la limite supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans* » les parties continues de « *cet arc* ».

(**) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XVI, pp. 86-92. Voir aussi MANSION, *Mathesis*, t. VIII, pp. 262-264, 1888.

Depuis la publication de cette note, nous nous sommes aperçu que notre définition et nos raisonnements sont applicables aux courbes discontinues.

(***) On peut déterminer directement, par un procédé général et facile, la mesure des volumes de tous les corps considérés dans la géométrie élémentaire.

d'après le principe de causalité, son mouvement s'effectue évidemment, à chaque instant, sous l'influence incessante d'une certaine cause [GRASSMANN (1844), PIRMEZ (1881)].

2. Les géomètres emploient encore le mot *force* dans un sens autre, purement mathématique. Soit un point A parcourant une certaine courbe, et supposons qu'arrivé en M il ait une certaine vitesse v. Dans un temps Δt, il arrivera en une position M′, tandis qu'un autre point B parcourant la tangente en M, à partir de M, avec la vitesse v, serait arrivé en m. La longueur mM′ est, en grandeur et en direction, la *déviation* du point M pendant le temps Δt. *La force* du point mobile en M *est*, au sens mathématique, *la limite du rapport de la déviation à la moitié du carré du temps* Δt, *quand* Δt *a pour limite zéro*. La direction de la force est la limite de la direction de la déviation.

3. Le principe de l'inertie est le suivant : *Un corps en mouvement qui n'est soumis à aucune force se meut indéfiniment en ligne droite avec une vitesse constante* (NEWTON, *Principia*, axiomata sive leges motus. Lex I). Ce principe équivaut évidemment à la définition de la force. Pour qui connaît le sens du mot force, il revient à cette identité : Un corps qui n'est soumis à aucune cause altératrice de son mouvement rectiligne uniforme y persévérera indéfiniment.

III. *Définition de la somme de deux forces, ou principe de l'indépendance des effets des forces.* 1. D'après la définition d'une force mathématique, un point n'est jamais soumis qu'à une seule force mathématique, puisqu'il n'a qu'un seul mouvement et une seule déviation par rapport à un système rigide.

2. *Par convention,* toutefois, au lieu de dire qu'un point est soumis à une force AB, on dit qu'il est soumis à deux forces AC, AD, si ABCD est un parallélogramme ayant AB pour diagonale. La connaissance des forces AC, AD équivaut à la connaissance de AB, dite leur *résultante.* On peut remplacer aussi chacune des forces AC, AD par deux autres, et ainsi de suite, puis réunir plusieurs des forces fictives obtenues en une résultante d'après la règle du parallélogramme, comme le prouve la théorie géométrique des projections et de la composition des droites.

vient à démontrer que toute ligne a une longueur et toute surface une aire jouissant des trois propriétés énoncées au début de cette note. »

M. Mansion fait ressortir ce qu'il y a de philosophique dans la conception de M. Goedseels.

Les notions de ligne et de surface sont vraiment déduites de celles d'un fil ou d'une plaque ayant une certaine grosseur, par une espèce de passage à la limite. Il est naturel d'arriver par la même voie aux idées précises de longueur d'une ligne courbe et d'aire d'une surface, comme le fait M. Goedseels.

Au point de vue mathématique, le nouveau procédé permet d'éviter, aussi bien que celui de M. Peano, les difficultés que présente la démonstration des théorèmes fondamentaux relatifs aux longueurs et aux aires.

M. Mansion expose ensuite les *principes de la mécanique rationnelle* en les dégageant complètement de principes d'ordre expérimental empruntés à la mécanique physique. Voici le résumé de cette communication :

« I. *Relativité du mouvement.* Duhamel, dans son ouvrage intitulé : *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, a prouvé que l'on ne peut considérer, en mécanique, que des mouvements *relatifs* par rapport à un système rigide.

II. *Définition de la force ou principe de l'inertie.* 1. Depuis Newton (*Principia*, definitio IV), les mathématiciens appellent *force*, au sens métaphysique, *toute cause d'altération d'un mouvement* (relatif) *rectiligne uniforme*.

Quand un point se meut par rapport à un système rigide, ils n'appellent donc pas *force* la cause du phénomène *total* de mouvement considéré, mais la cause d'*une partie* de ce phénomène, la cause qui fait varier, la vitesse à chaque instant, dans le mouvement considéré, en grandeur ou en direction, ou à la fois en grandeur et en direction.

Ainsi, d'après cette définition, un point qui a un mouvement rectiligne uniforme n'est soumis à aucune force; cependant,

même temps que les relations (2) et si les quantités δx, δy, δz vérifient les équations

$$\mathop{S}_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\delta F_r}{\delta x_k}\delta x_k + \frac{\delta F_r}{\delta y_k}\delta y_k + \frac{\delta F_r}{\delta z_k}\delta z_k\right) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, l). \quad (3)$$

Les quantités δx, δy, δz sont appelées ***déplacements virtuels*** compatibles avec les liaisons du système, et les quantités m, ***masses*** des points considérés.

Les produits X, Y, Z sont appelés *forces motrices*, tandis que $(X : m)$, $(Y : m)$, $(Z : m)$ sont appelés *forces accélératrices.*

3. Des relations (1), (3), on peut déduire un système équivalent, de la forme

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = X_k + A_k,\ A_k = \lambda_1\frac{\delta F_1}{\delta x_k} + \lambda_2\frac{\delta F_2}{\delta x_k} + \cdots + \lambda_r\frac{\delta F_r}{\delta x_k},$$

$$m_k\frac{d^2y_k}{dt^2} = Y_k + B_k,\ B_k = \lambda_1\frac{\delta F_1}{\delta y_k} + \lambda_2\frac{\delta F_2}{\delta y_k} + \cdots + \lambda_r\frac{\delta F_r}{\delta y_k},$$

$$m_k\frac{d^2z_k}{dt^2} = Z_k + C_k,\ C_k = \lambda_1\frac{\delta F_1}{\delta z_k} + \lambda_2\frac{\delta F_2}{\delta z_k} + \cdots + \lambda_r\frac{\delta F_r}{\delta z_k},$$

où les quantités λ sont des inconnues. Les expressions A_k, B_k, C_k sont dites les forces ***intérieures*** au système.

V. ***Mécanique rationnelle.*** 1. Au moyen des principes précédents, on peut faire un exposé complet de la dynamique et, comme cas-limite, de la statique; cet exposé est basé uniquement sur la cinématique, ou même sur la géométrie, puisque la notion du temps, qui intervient en cinématique, peut être remplacée par une notion géométrique. On trouve un exposé de ce genre dans la ***Mechanik*** de Kirchhoff (Leipzig, Teubner), ce qui dispense d'entrer ici dans plus de détails.

2. Dans ce mode d'exposition, on ne range pas parmi les principes généraux de la mécanique rationnelle celui qui porte le nom de principe de l'*égalité de l'action et de la réaction.* Ce principe semble appartenir plutôt à la mécanique physique (*).

3. Les principes précédents s'étendent sans peine, comme

(*) Peut-être est-il aussi conventionnel que les autres et est-il équivalent à une définition précise du point d'émanation d'une force.

JACOBI l'a fait remarquer dès 1825, à une mécanique rationnelle, où l'on fait intervenir des dérivées d'ordre supérieur au second. »

Une discussion s'engage entre les membres de la section à l'occasion de la note de M. Mansion. Dans une note manuscrite qui est lue à la section, M. De Tilly fait observer que l'on peut appeler *système sans rotation ni accélération* un système invariable tel que les deux principes suivants se vérifient : 1° Étant donnés deux points matériels A et B, l'action de A sur B est égale et directement opposée à l'action de B sur A, par rapport à ce système; 2° Un point sur lequel n'agit aucune action émanant d'autres points décrit d'un mouvement uniforme une ligne droite par rapport à ce système. L'expérience semble prouver que le système en question est celui des étoiles fixes. Les deux énoncés qui précèdent sont, selon M. De Tilly, ceux qui doivent porter les noms de *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, et de *principe de l'inertie*.

Mardi, 26 avril 1892. — M. Mansion présente à la section, au nom de l'auteur, la dernière partie du Mémoire de M. de Salvert : *Sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme.* Sont nommés commissaires pour l'examiner : MM. Mansion et Humbert.

Une commission est ensuite nommée pour proposer, au nom de la section, une question de concours. Cette commission est composée de MM. C. Jordan, C. Le Paige et J.-M. De Tilly.

M. Mansion fait une communication *sur le théorème de Jacques Bernoulli*, et signale les imperfections de la démonstration basée sur la formule de Stirling que l'on en donne habituellement.

« Si $p + q = 1$, et si μ, μp, μq, μl sont des nombres entiers positifs très grands, dont le dernier toutefois est très petit par rapport aux précédents, le théorème consiste en ce que, si

$$P = \mathop{\mathrm{S}}_{x=-\mu l}^{x=\mu l} T_{\mu p+x},$$

$$T_{\mu p+x} = \frac{1.2.3....\mu}{1.2...(\mu p + x).\,1.2...(\mu q - x)} p^{\mu p+x} q^{\mu q-x}$$

on a lim $P=1$, pour $p=\infty$. Au moyen de la formule de Stirling, on prouve que

$$T_{\mu p+x}=\frac{A}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,e^{-\left(\mu p+x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{\mu p}\right)-\left(\mu q-x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{x}{\mu q}\right)},$$

A étant un facteur qui a pour limite l'unité, pour $\mu=\infty$. En développant en série l'exposant de l'exponentielle, on parvient à le mettre sous la forme

$$-\frac{x^2}{2\mu pq}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu p}-\frac{x}{\mu q}\right)+\alpha,$$

α désignant des termes dont l'influence est très petite, comparée à celle des précédents. Dans la démonstration habituelle, on néglige tous les termes autres que le premier, ce qui semble assez arbitraire, puisque, pour $x=\mu l$, la valeur du second terme est

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{l}{p}-\frac{l}{q}\right),$$

quantité fixe qui ne semble pas négligeable.

On améliore la démonstration au moyen des remarques suivantes :

1° On peut remplacer, dans P, la somme des deux termes

$$T_{\mu p+x}+T_{\mu p-x}$$

par une quantité plus petite, savoir deux fois la racine carrée du produit de ces deux termes. Si, de plus, on fait ensuite $\mu^2 l^2$ égal à la plus petite des deux quantités $3\mu p$, $3\mu q$, on prouve rigoureusement que l'on peut prendre pour exposant de l'exponentielle considérée

$$-\frac{x^2}{2\mu pq}. \tag{1}$$

Malheureusement, dans le cas le plus favorable, on trouve alors, pour limite de P, environ $\frac{197}{200}$, et non l'unité;

2° Si, dans la somme à calculer, on laisse de côté tous les termes où x^2 surpasse $k\mu$, k étant un nombre fixe quelconque,

le terme (1) de l'exposant est le seul qui ne tende pas vers zéro pour $\mu = \infty$ et, par suite, on peut mettre $T_{\mu p+s}$ sous la forme

$$\frac{AB}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{s^2}{2\mu pq}},$$

B ayant, comme A, l'unité pour limite. Cette seconde remarque, à elle seule, suffit pour prouver que lim $P = 1$, pour $\mu = \infty$;

3° Quand on réunit les deux remarques, on peut trouver une limite inférieure de P qui permet d'établir une liaison relativement simple entre k et μ. Dans l'application du théorème lim $P = 1$ au calcul des probabilités, on a besoin, comme on le sait, d'une pareille relation.

M. d'Ocagne fait connaître deux constructions géométriques du point de Gauss d'un système de droites.

La section reprend ensuite, à propos de Copernic et de l'histoire de l'astronomie, la discussion commencée la veille sur les principes de la mécanique.

Enfin elle procède au renouvellement de son bureau. Voici le résultat des élections :

Président,	M. Hermite.
Vice-Présidents,	MM. J. Carnoy,
	E. Goedseels.
Secrétaire,	M. H. Dutordoir.

Deuxième section.

—

Mardi, 26 avril 1892. — M. L. Henry présente, au nom de son fils, M P. Henry, une communication sur la *Synthèse directe des alcools primaires*, dont voici le résumé :

« L'alcool méthylique H_3C-OH est l'alcool primordial et l'alcool par excellence.

» Les alcools primaires, secondaires et tertiaires sont l'alcool

méthylique, où 1, 2 ou 3 atomes d'hydrogène sont remplacés par des groupements hydrocarbonés.

» Cette relation de composition manque de confirmation expérimentale directe en ce qui concerne les alcools primaires.

» Cette lacune est comblée. La réaction des composés organo-zinciques sur l'éther méthylique monochloré $H_2C<^{Cl}_{OCH_3}$ fournit très aisément les éthers simples des alcools primaires

$$\left(H_2C<^{Cl}_{OCH_3}\right)_2 + Zn<^{C_2H_5}_{C_2H_5} = Zn\,Cl_2 + \left[\begin{array}{c} C_2H_5 \\ | \\ H_2C-(OCH_3)\end{array}\right]_2.$$

» L'éther méthylique monochloré $H_2C<^{Cl}_{OCH_3}$ (éb. 60°) a été obtenu, en 1877, par M. Friedel dans la réaction du chlore sur l'oxyde de méthyle.

» Je l'obtiens beaucoup plus aisément et rapidement par l'action de l'acide chlorhydrique gazeux sur l'aldéhyde méthylique en présence de l'alcool méthylique :

$$H_2C=O + H_3C\text{-}OH + HCl = H_2C<^{Cl}_{OCH_3} + H_2O\text{ ».}$$

M. Van der Mensbrugghe présente à la section une nouvelle théorie des lentilles épaisses. Cette communication sera publiée dans la seconde partie des *Annales*.

M. L. Henry fait ensuite deux communications : la première, *Sur les éthers nitreux et les dérivés nitrés*, dont la partie essentielle a déjà été publiée dans les *Bulletins* de l'Académie royale de Belgique, 1892, 3e série, t. XXIII, pp. 148-152; la seconde, *Sur le chlorure d'oxalyle*

$$\begin{array}{c} OCCl \\ | \\ OCCl \end{array},$$

dont voici le résumé :

« Ce corps a été obtenu récemment par l'action du pentachlorure de phosphore sur l'oxalate d'éthyle

$$\begin{array}{l} C^{O}_{OC_2H_5} \\ | \\ C^{O}_{OC_2H_5} \end{array}.$$

» C'est un liquide bouillant vers 70°.

» M. L. Henry trouve dans ce corps une confirmation éclatante des idées qu'il a émises, il y a quelques années, sur la volatilité dans les composés carbonés :

$$\begin{array}{l} CH_2Cl \\ | \\ CH_2Cl \end{array} \text{ Éb. } 84^\circ, \qquad \begin{array}{l} C{}^{O}_{Cl} \\ | \\ CH_2Cl \end{array} \text{ Éb. } 108^\circ, \qquad \begin{array}{l} C{}^{O}_{Cl} \\ |\,O \\ C\,Cl \end{array} \text{ Éb. } 70^\circ.$$

» On voit ici, une fois encore, que l'accumulation des radicaux négatifs en un point des molécules carbonées est pour celles-ci une cause puissante de volatilité, assez puissante pour renverser les relations normales de volatilité que l'on constate entre un composé hydrogéné et ses dérivés de substitution.

» M. L. Henry s'occupe encore, pour terminer, de divers corps au point de vue de la volatilité, et notamment de l'oxyde-méthyle monochloré $CH_2 <^{Cl}_{OCH_3}$ et du malonitrile CH-CH_2-CH qu'il a fait connaître, il y a quelques années, et qui est devenu aujourd'hui un produit commercial. »

Au nom du R. P. Thirion, le R. P. George parle de la machine électrostatique de Wimshurst à courants alternatifs, et cite des résultats d'expériences très intéressants, obtenus par les professeurs du collège de Louvain. Cette communication sera publiée dans la seconde partie des *Annales*.

M. Félix Leconte, préparateur à l'Université de Gand, relate des expériences qu'il exécute depuis trois ans sur les oscillations de l'aiguille magnétique dans le vide.

La section procède ensuite au renouvellement du Bureau. Sont élus :

Président : M. VAN DER MENSBRUGGHE.
Vice-Présidents : MM. L. HENRY.
DEMANET.
Secrétaire : M. F. LECONTE.

Troisième section.

—

Lundi, 25 avril 1892. — M. Dollo fait une communication sur la classification des Mammifères d'après la nature du placenta.

Il ne croit pas qu'on puisse diviser les Mammifères placentaires en

1. Mammifères à placenta diffus,
2. Mammifères à placenta cotylédonaire,
3. Mammifères à placenta zonaire,
4. Mammifères à placenta discoïde.

Car 1° On rompt ainsi les groupes les plus naturels.

Les Artiodactyles bunodontes sont séparés des Artiodactyles sélénodontes, et réunis aux Périssodactyles. Les Tylopodes, et même les Chevrotains, sont éloignés des Ruminants.

Les Carnivores, pinnipèdes comme fissipèdes, sont joints au Dugong, à l'Éléphant, au Daman, qui se trouvent, dès lors, écartés de leurs véritables parents, les Ongulés;

2° Tous les placentas zonaires ou discoïdes ne sont pas équivalents entre eux.

En effet, la zone du Chat est équatoriale (ombilicale); celle du Chien est préombilicale; celle du Dugong est postombilicale. Ces zones sont donc des portions hétérologues du chorion, et il n'y a pas lieu de les identifier au point de vue morphologique.

Bien plus, la zone de certains Tatous est une zone complexe constituée par une somme de disques.

D'autre part, certains disques sont ventraux (Homme); d'autres, dorsaux (Lapin); d'autres, doubles et latéraux (Tupaia). Ici non plus il n'y a pas d'équivalence morphologique.

A la suite de cette communication, un échange d'observations a lieu entre MM. Proost et Dollo, à propos de la théorie de l'évolution.

Mercredi, 27 avril 1892. — M. de Lapparent fait connaître les résultats de l'étude qu'il a poursuivie avec l'aide du R. P. Noury,

S. J., sur les roches éruptives de l'île de Jersey. La série de ces roches est à la fois très complète et très localisée, aussi bien dans l'espace que dans le temps; car toutes les éruptions ont eu lieu entre le dépôt des derniers schistes précambriens et la formation du poudingue cambrien (poudingue pourpré de Normandie). Les roches paraissent s'être succédé dans l'ordre suivant : diabases et épidiorites, granites, granulites et pegmatites, micropegmatites, orthophyres, porphyrites et tufs porphyritiques, porphyres sphérolithiques et pétrosiliceux, pyromérides.

La communication de M. de Lapparent sera publiée dans la seconde partie des *Annales*.

Le R. P. Schmitz, S. J., montre la coupe levée à travers la *faille Saint-Gilles*, dans la bacnure (N.W.-S.W.) de l'étage de 460 mètres des charbonnages de *La Haye* (siège *Saint-Gilles*).

A cette place, elle atteint une puissance de 30 mètres et se signale aux deux extrémités par la présence de roches considérablement dérangées. Ces deux zones sont formées de schistes et de grès broyés, mêlés de terre plus ou moins plastique. Le caractère gras se prononce quelquefois jusqu'à donner à certains échantillons, en forme de tablettes, le facies de terre plastique proprement dite. Ces deux zones, séparées par des schistes et des grès en stratifications discordantes à la suite de cassures et de rejets, sont-elles le commencement de la division de la faille en deux branches, constatée autrefois dans la concession de *Belle-Vue ?*

La suite de l'exploitation le fera connaître, comme elle donnera aussi des éclaircissements sur l'âge relatif de la *faille Saint-Gilles*. M. L. Joakim, directeur des travaux des charbonnages de *La Haye*, conduit actuellement, avec sagacité, une exploration dans les environs des veines *Petite-Moisa* et *Grand-Marel*. Ces recherches semblent devoir établir s'il y a, oui ou non, parallélisme entre les dérangements moins importants qui s'échelonnent de part et d'autre de la grande faille. Jusqu'ici, rien ne paraît encore concluant.

Le P. Schmitz présente ensuite quelques objections à M. de

Lapparent contre la théorie de la *formation de la houille par transport* pour des bassins maritimes aussi étendus que le sont ceux de Belgique. Il fait surtout valoir la ressemblance et même la presque identité de constitution et de facies des *murs* de toutes les couches, la régularité des *stampes* de terrains stériles entre les lits de houille, la constance de l'épaisseur qui sépare les *layettes* de leur couche et la persistance, dans certains horizons fort étendus, de roches à caractères pétrographiques invariables, caractéristiques du gisement.

M. de Lapparent répond aux objections du R. P. Schmitz, et en prend occasion pour appuyer sur certains points de sa conférence d'hier.

Ensuite, la section, faute de temps pour procéder aux élections, décide le maintien du bureau actuel pendant l'année 1892-1893.

Quatrième section.

—

Mardi, 26 avril 1892. — M. le professeur Desplats expose le traitement mécanique de l'asystolie. Quand un malade en proie à l'asystolie n'éprouve aucun soulagement de l'emploi des médicaments cardiaques, on doit songer qu'elle peut être entretenue par un obstacle au cours du sang. Tout cœur peut devenir asystolique, même quand il ne présente aucune lésion orificielle, à la suite d'une fatigue excessive, par exemple. Naturellement, les sujets porteurs d'une maladie du cœur seront plus vite atteints d'asystolie que les autres. Dans ces conditions, on doit imposer le repos au malade, lui prescrire les excitants cardiaques, et si l'on n'obtient aucun résultat, c'est que le cours du sang est empêché soit dans les plèvres, soit dans le péritoine, soit dans les membres inférieurs, les poumons..... Alors les médicaments ne rétabliront pas l'équilibre circulatoire. Ils font l'office du coup de fouet donné à un attelage enfoncé dans l'ornière. Il n'y a qu'une chose à faire dans ce cas : il faut décharger la voiture pour la faire avancer. Eh bien, ici, il faut enlever l'obstacle si l'on veut rendre au sang son cours normal.

D'après ce qui vient d'être dit, on sera donc amené, selon les cas, pour venir en aide aux asystoliques, à faire la ponction de la plèvre, ou celle du péritoine, ou des mouchetures aux membres inférieurs, ou enfin à pratiquer des émissions sanguines. Parfois la position assise que l'on fait prendre au malade ou une ligature que l'on applique sur ses membres inférieurs en congestionnant ceux-ci agiront dans le même sens que les soustractions sanguines.

Enfin, il est bon de remarquer que les mouchetures ou incisions faites aux membres inférieurs doivent être réservées aux seuls cas d'œdème blanc.

M. Desplats rapporte le cas d'un jeune homme de 25 ans, admis dans son service, présentant tous les signes d'une asystolie dépendant d'une insuffisance mitrale. Ce malade avait été précédemment atteint de fièvre typhoïde. La convalescence avait été lente, ce qui n'empêcha pas le jeune homme de s'adonner à une vie d'excès. L'asystolie s'ensuivit bientôt, et M. Desplats l'attribua à une dégénérescence du myocarde, due elle-même à la fièvre typhoïde. C'est ce qui en rendait le pronostic moins grave.

La digitale et la caféine ne donnèrent aucune amélioration; des hémoptysies se produisirent.

Recherchant avec un nouveau soin la cause de cet état, M. Desplats pensa à l'existence, peu évidente toutefois, d'un épanchement pleurétique. Une première ponction fut négative. Une deuxième ponction évacua deux litres de liquide, et la situation s'améliora momentanément. Mais il fallut ponctionner dix-huit fois la cavité pleurale et alimenter fortement le malade pendant quatre mois avant d'aboutir à une guérison définitive.

M. Borginon demande si le silence absolu, c'est-à-dire l'absence complète du bruit respiratoire aux deux tiers inférieurs du poumon, permet de diagnostiquer un épanchement interlobaire.

M. Desplats estime que la présence d'une lame pulmonaire entre l'épanchement et la paroi thoracique, rend naturelle, à son niveau, la perception des bruits respiratoires.

M. Charlier fait une communication sur *un cas d'œdème du pharynx et de l'isthme du gosier*, guéri par l'application d'un vésicatoire. Cette communication sera publiée dans la seconde partie des *Annales*.

M. Heymans, parlant de la préparation de l'eau aseptique, dont il avait entretenu ses collègues à la précédente séance, préconise aujourd'hui, pour l'obtenir, l'emploi du nitrate d'argent. Le procédé est facile, peu coûteux et sûr.

Il aborde ensuite la question de *l'action toxique et antiseptique du chloroforme et de l'éther*. Les lavages des plaies infectées, pratiqués au moyen d'une eau aseptique, donnent des résultats tout aussi bons, si pas meilleurs, que les lavages à l'aide de solutions antiseptiques. Les liquides antiseptiques n'agissent, en effet, qu'à la surface des plaies; de plus, ils sont délètères pour les tissus vivants. Quant aux injections hypodermiques, elles se sont montrées aussi impuissantes vis-à-vis des microbes que les applications externes.

Les vapeurs et les gaz diffusent à travers les téguments jusque dans la profondeur des tissus. M. Heymans a mis à profit cette propriété du chloroforme et de l'éther pour apprécier leur action antiseptique et toxique.

Des tubes de gélatine ensemencés de micro-organismes divers ne produisent aucun germe si on les place dans une atmosphère saturée de chloroforme ou d'éther. Les vapeurs chloroformiques ont donc pénétré une couche de gélatine de plusieurs centimètres. M. Heymans a voulu s'assurer de la pénétration de ces mêmes vapeurs chez le lapin. L'oreille de cet animal est la partie du corps qui se prête le mieux à l'expérience. On y place un petit tube en verre contenant environ 4 centimètres cubes. Ce tube est fermé par un bouchon d'ouate peu serré, et l'oreille est entourée d'un manchon de vessie de porc dont l'ouverture est étroitement serrée à la base de l'oreille par une ligature. Tous les matins on emploie une nouvelle quantité de chloroforme. Mais tous les lapins meurent déjà du troisième au cinquième jour, sans qu'ils aient été endormis par les vapeurs de chloroforme

qu'ils ont ainsi absorbées, sans doute à cause de la lenteur de cette absorption. Dès le premier jour le lapin se sent malade, il ne mange plus sa ration ordinaire; bientôt survient l'albuminurie et souvent, à l'approche de la mort, de l'hématurie. L'autopsie montre que les reins sont le siège d'une néphrite; le foie, le siège d'une dégénérescence graisseuse, et la muqueuse respiratoire celui d'une congestion. L'estomac contenait encore au delà de 100 grammes d'aliments, malgré une diète de plusieurs jours. C'est donc que le chloroforme arrête le travail digestif.

L'éther donne des résultats tout opposés. Il laisse les animaux indemnes, quel que soit le mode d'administration sous lequel on le leur donne.

Ces données soulèvent de nombreuses questions, que M. Heymans pourra résoudre, espérons-le, à la lumière de nouvelles expériences.

M. Verriest, incidemment, recommande l'eau chloroformée comme dentifrice. Une cuillerée à café de chloroforme versée dans un flacon de 5 à 600 grammes donne l'eau mère, dont on prend une petite quantité.

Quant aux chloroformisations, il croit que certains malades succombent au chloroforme, même administré avec le plus d'habileté. Le chloroforme s'attache aux globules du sang et, chose remarquable, le cerveau contient, dans ces cas, trois fois plus de chloroforme que les autres organes.

M. Cuylits pense que le chloral, par le chloroforme qu'il engendre dans l'organisme, exerce aussi, à la longue, des effets délétères dans le cerveau.

M. Goris signale un cas d'intoxication par le chloroforme dans une opération de trachéotomie.

M. Matagne présente une jeune fille de 16 ans, à qui il a pratiqué l'excision d'un lupus du bras, qui datait de l'enfance. A 2 ans, elle fut vaccinée de bras à bras : une pustule vaccinale s'ulcéra et fut le point de départ du lupus. Celui-ci avait fini par atteindre une étendue de 12 centimètres sur 9.

La jeune fille jouissant d'une bonne santé et ne présentant aucun antécédent tuberculeux personnel ou héréditaire, une opération radicale fut décidée.

Le 22 mars dernier, la patiente fut chloroformisée, la peau fut incisée à un demi-centimètre de la limite du mal et tout le lambeau cutané disséqué jusque sur l'aponévrose du biceps. Sur cette vaste surface cruentée, l'opérateur fit la transplantation épidermique de Thiersch : dix lambeaux, enlevés au rasoir sur la surface antéro-externe de chaque cuisse, furent étalés sur la plaie. Celle-ci fut ensuite recouverte d'une feuille de gutta-percha et d'un pansement au sublimé.

Au bout de quatre jours, le pansement fut enlevé. Les bandes sublimées avaient produit de la vésication partout où elles étaient en contact avec la peau. La plaie suppurant beaucoup, on fit tous les jours des pansements humides au thymol. Après dix jours, tous les lambeaux avaient une belle teinte rosée et adhéraient parfaitement, à l'exception d'un seul.

Trois semaines après l'opération, les pansements humides furent remplacés par des pansements secs à l'iodoforme, et aujourd'hui, après cinq semaines, la cicatrisation est presque complète.

Le Dr Matagne communique ensuite un cas de méningite cérébro-spinale, observé dans un établissement de charité où sévissait l'influenza.

Le sujet était une jeune fille de 16 ans, bien réglée et de bonne constitution. Le 28 janvier dernier, elle présenta des taches érythémateuses fugaces sur le haut du corps. Les jours suivants, elle accusa : sensation de froid, céphalalgie frontale, rachialgie, fatigue des jambes, vertiges, tintements d'oreilles ; elle eut des vomissements bilieux, des grincements, de la photophobie, du ptosis, de la paracousie, de l'irrégularité des pupilles. La fièvre, nulle d'abord, s'éleva à 39° et même à 40°.

Les soupirs, les plaintes, les cris devinrent continuels ; un opisthotonos permanent mit obstable aux mouvements ; les contractures ne permettaient pas l'extension des jambes et rendaient

la flexion des pieds difficile. Le réflexe rotulien était presque aboli. Il y avait de la frilosité. Un délire nocture éclata, suivi d'un peu de somnolence. Le visage restait coloré et l'expression niaise; cependant la malade répondait correctement aux questions. Les urines furent toujours claires et abondantes. A la fin du second septenaire, il y eut de la diarrhée accompagnée de douleurs abdominales. Peu après, des accès intermittents de fièvre, précédés de frissons et suivis de sueurs, cédèrent en quelques jours au sulfate de quinine.

Les organes respiratoires, examinés à différentes reprises par plusieurs médecins, ne parurent présenter aucun désordre.

Le 24 février, la malade fut transportée à l'hôpital, où elle succomba, le 31 mars, dans un accès tétanique.

Un foyer renfermant un pus caséeux verdâtre fut trouvé dans le poumon droit, ce qui nous paraît expliquer les accès intermittents que nous avons mentionnés. Des foyers purulents furent constatés dans le cerveau.

Le Dr Matagne se demande si l'on n'est pas autorisé à mettre ce cas de méningite cérébro-spinale au compte du microbe de l'influenza : il n'y en a pas d'autre à incriminer.

Le traitement consista surtout en applications de sangsues, en ventouses scarifiées et en onctions mercurielles sur le crâne et sur le rachis.

L'inappétence persista pendant toute la maladie. C'est à peine si la pauvre fille pouvait prendre quelques petites tasses de lait, des biscuits et un peu de jus de viande; aussi, à sa mort, après plus de deux mois de souffrances, était-elle dans un état de marasme complet.

La section maintient son Bureau pour l'année 1892-1893 :

Président : M. MOELLER.
Vice-Présidents : MM. CUYLITS,
BORGINON.
Secrétaire : M. A. DUMONT.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU LUNDI 25 AVRIL 1892.

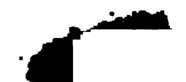
M. P. Mansion, secrétaire général de la Société pendant l'année 1891-1892, donne lecture du rapport suivant :

MESSIEURS,

« Pendant l'année qui vient de s'écouler, la *Société scientifique de Bruxelles* a pu reprendre le cours de sa vie normale, troublée si profondément, il y a trois ans, par la mort inopinée de son premier secrétaire général, le R. P. Carbonnelle.

Depuis la session de Pâques 1891, le conseil de la Société a fait paraître, en temps opportun, quatre livraisons de la *Revue des questions scientifiques;* le tome XIV des *Annales*, qui était légèrement en retard; le tome XV du même recueil, où l'on trouve les travaux de l'année sociale 1890-1891; enfin, les *Bulletins* des sessions d'avril 1891, d'octobre 1891 et de janvier 1892. Nous avons la satisfaction de vous annoncer que, en outre, dès à présent, plus du tiers du tome XVI des *Annales* est déjà imprimé, et qu'une bonne partie des matériaux des deux autres tiers est entre nos mains. Nous pouvons donc exprimer le légitime espoir de voir paraître ce volume encore dans le courant de cette année.

Nous n'avons ni qualité, ni mission pour apprécier les mémoires qui constituent les derniers volumes de nos *Annales*. Nous serait-il permis cependant d'exprimer un vœu à l'adresse des membres des sections II, III, IV? Les savants qui en font partie, et dont les travaux sont toujours accueillis avec reconnaissance dans notre recueil, y laissent un peu trop de place à la section de mathématiques. Or, comme on l'a remarqué spiri-



tuellement, *si les mathématiques régissent le monde, elles le régissent sans l'amuser*. La surabondance des mémoires écrits dans la langue hiéroglyphique de l'algèbre qui caractérise les derniers volumes des *Annales* pourrait, à la longue, effrayer et rebuter nos lecteurs. Il y a là un danger pour l'avenir de la Société qu'il suffira d'avoir signalé, je pense, aux physiciens et chimistes, aux biologistes et médecins qui en font partie, pour qu'il y soit porté remède. D'ailleurs, dans le tome XVI, actuellement sous presse, nous avons pu déjà réduire considérablement la part des mathématiques et insérer quelques mémoires relatifs aux sciences physiques et naturelles.

Les quatorze cents pages de la *Revue des questions scientifiques* publiées depuis un an, l'ont été par les soins de notre zélé secrétaire adjoint. Vous vous associerez tous à moi, Messieurs, pour le remercier une fois de plus du zèle et du dévouement qu'il met au service de la Société, particulièrement dans sa tâche d'éditeur de la *Revue*, sous la direction du comité de rédaction. Ceux là seuls qui connaissent pratiquement les ennuis et les travaux excessifs qu'entraîne parfois la publication d'un recueil comme le nôtre, peuvent apprécier complètement la somme d'abnégation qu'exige pareille tâche.

Dans les livraisons de la *Revue* publiées d'avril 1891 à janvier 1892, on trouve d'abord la plupart des conférences faites dans nos assemblées générales pendant cette période, puis d'innombrables notes et comptes rendus où sont résumés les principaux travaux des savants du monde entier dans le domaine des sciences physiques et biologiques, enfin d'importants articles de haute vulgarisation scientifique sur les sujets les plus variés : méthodes et théories de la physique, théorie de la chaleur, progrès récents de l'optique, photographie des couleurs, art de l'ingénieur, histoire de la géologie et de l'astronomie, théorie des glaciers, durée des temps géologiques, géographie de la Chine, botanique du Japon, métamorphoses des axolotls et leur importance au point de vue de la théorie de l'évolution, microbiologie, anthropologie préhistorique, relations de l'instinct et de la raison, hérédité psychologique, malthusianisme, etc., etc.

Qu'il nous soit permis de signaler, entre tous ces articles, ceux de MM. Witz et Duhem sur les théories physiques. Bien que leur manière de voir puisse être combattue, — elle le sera très probablement dans la *Revue* même, — ces articles sont éminemment propres à dissiper, chez les philosophes de profession et aussi chez les gens du monde qui s'intéressent aux progrès de la science, des préjugés tenaces touchant la portée véritable des découvertes physiques. Les premiers exigent trop des physiciens, ils leur demandent une explication métaphysique complète des phénomènes que ceux-ci sont impuissants à leur donner; les autres attribuent trop souvent aux hypothèses explicatives des physiciens une valeur objective trop grande.

D'après une décision du Conseil prise il y a deux ans, la réunion d'octobre de la Société a lieu, autant que possible, chaque année, dans une ville différente. En 1890, comme vous le savez, nous sommes allés à Louvain; en 1891, c'est à Gand que nous nous sommes transportés, et nous y avons tenu l'une de nos sessions les plus fructueuses, si l'on en juge par le nombre et l'importance des adhésions à la Société qui en ont été la suite et par la variété des communications qui ont été faites dans les diverses sections. Celles-ci avaient reçu le matin l'hospitalité au collège Sainte-Barbe. L'après-midi, l'assemblée générale a eu lieu à l'hôtel de M. le gouverneur de la Flandre orientale, qui avait bien voulu mettre ses salons à notre disposition : elle était honorée de la présence de Mgr l'évêque de Gand, de M. le gouverneur, d'un grand nombre de professeurs de l'Université et de notabilités catholiques de la ville. L'accueil si sympathique que nous avons rencontré aussi bien à Gand qu'à Louvain, nous est d'un bon augure pour l'avenir; et il nous fait espérer que, partout en Belgique, nous trouverons un grand nombre de nos concitoyens prêts à applaudir à nos efforts et à acclamer le drapeau de l'union de la Science et de la Foi.

Les relations que nous avions inaugurées l'an dernier avec la *Société bibliographique* de Paris, se sont continuées en 1891-1892 de la manière la plus cordiale entre les deux associations. En

avril dernier, M. le chanoine Delvigne, délégué de la *Société bibliographique*, a lu devant vous une notice substantielle et intéressante sur l'origine et les travaux de notre sœur aînée de Paris. Le mois suivant, le R. P. Van den Gheyn, S. J., faisait au même titre, devant la *Société bibliographique*, un rapport analogue sur nos travaux. Cette année nous ferons de nouveau le même échange de communications fraternelles entre les deux Sociétés. Nous n'avons pu encore lier des liens aussi étroits avec la *Görres-Gesellschaft* d'Allemagne, mais les préliminaires de l'entente sont posés et ils aboutiront sans doute cet été. Des relations semblables s'établiront probablement aussi entre la *Société scientifique* et la *Société Léon XIII* pour l'avancement des sciences philosophiques et historiques, dont la création a été décidée au Congrès catholique de Malines, en septembre dernier.

En 1891-1892, nous avons admis trente nouveaux membres, tant belges qu'étrangers, parmi lesquels quelques-uns ont déjà des noms célèbres dans le domaine de la science. Mais nous avons de nouveau à vous signaler, à notre grand regret, un nombre presque égal de défections, et c'est surtout parmi les membres belges qu'elles se sont produites. En outre, la mort nous a enlevé un certain nombre de membres, dont trois de nos membres fondateurs, Son Éminence le cardinal Haynald, archevêque de Calocza et Bacs, Mgr Belin, évêque de Namur, enfin Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain et correspondant de l'Institut de France.

Il est à peine nécessaire que je vous parle des deux premiers. La presse quotidienne a retracé leur vie et célébré leurs vertus, et la chaire sacrée a retenti des éloges funèbres consacrés à leur mémoire. Qu'il me suffise de vous rappeler que Mgr Belin, aussitôt après son élévation sur le trône épiscopal de Namur, en 1884, a voulu se faire inscrire sur la liste de nos membres fondateurs, témoignant ainsi une fois de plus des sympathies profondes que les évêques de la Belgique ont toujours montrées à notre œuvre. Mgr Haynald, né le 3 octobre 1816, mort en juillet dernier, archevêque de Calocza et Bacs depuis le 17 mai 1867,

cardinal-prêtre de la sainte Église romaine depuis le 12 mai 1879, était connu dans toute l'Europe, non seulement comme un homme politique remarquable et un prélat distingué, mais aussi comme un zélé protecteur des sciences et un botaniste renommé. Il était membre de l'Académie nationale des sciences de Hongrie, et il a présidé autrefois le Congrès botanique international de Florence. Les institutions scientifiques qu'il a fondées ou encouragées dans son vaste diocèse, aussi bien que les écoles, les orphelinats et les hôpitaux qu'il y a établis, rendront à jamais sa mémoire chère à tous les amis de la religion et de la science.

La *Société scientifique de Bruxelles* a perdu, le 4 février dernier, en la personne de Louis-Philippe Gilbert, l'un de ses membres les plus illustres, l'Université de Louvain un de ses professeurs les plus éminents, la Belgique un de ses enfants d'adoption qui lui faisaient le plus d'honneur.

Nous espérons retracer ailleurs, d'une manière complète, sa carrière de savant et d'historien des sciences. Mais pour satisfaire aux vœux des membres de cette *Société scientifique* à laquelle il a donné entièrement les années les plus belles et les plus fécondes de sa vie, qu'il nous soit permis d'en tracer aujourd'hui au moins une esquisse rapide ; nous y joindrons quelques détails biographiques empruntés aux pages émues que lui a consacrées M. de la Vallée Poussin, dans la *Revue générale* (*).

« Philippe Gilbert naquit, le 7 février 1832, à Beauraing. Son père, ancien officier français, issu lui-même d'une famille militaire, semble lui avoir communiqué la décision et l'esprit de persévérance dans le travail. Quant à sa mère, elle lui transmit le sang de la vieille et noble race flamande des de Cauwer, dont il n'a démenti, ni dans l'accomplissement de ses devoirs, ni dans ses affections, l'énergique devise : « *Non frigide, sed fervide* ».

(*) *Revue générale*, t. LV, livraison de mars 1892, pp. I-IV. Les passages entre guillemets, sans indication de nom d'auteur, sont empruntés à cette notice. MM. Ballion, Catalan, Laisant, Vanderhaeghen, Vicaire nous ont aussi fourni des renseignements pour cette notice. Nous leur adressons à tous nos bien vifs remerciements.



à l'Académie des
:, avec sa précision

action ouvrirent à
Belgique, dont il fut
resta que six ans. Il
la suite d'un incident
ans les annales des
onvictions chrétiennes
de la franchise de son

Carbonnelle, S. J. — je
incipaux fondateurs de la
le de redire ici la somme
cette œuvre qui lui était
t admirablement avec tous
.ien, et elle lui permit de
es ressources de son intelli-
nrichi de rapports, de comptes
savants, à la fois les *Annales*
:.

1856, dans la *Revue catholique*
et de vulgarisateur scientifique,
Adrianus Romanus et de Pagani,
s plus récents de l'optique, de
e africaine. Il y avait aussi fait
après les premières et célèbres
ois. Dans la *Revue des questions*
rgit le cadre de ses études histo-
.raitre une foule de notices du plus
uiseux, Foucault, etc.; il y réfute

---

la Société philomatique de Paris depuis le
mmé correspondant de l'Académie pontificale des
ier de l'Ordre de Léopold.

au courant de la science avec un soin jaloux, parfois au prix d'un travail considérable de remaniement et d'addition, mais en même temps il a toujours su leur conserver leur caractère de livres d'enseignement, par les exercices nombreux et gradués dont il les a enrichis. Au moment de sa mort, une quatrième édition de son *Cours d'analyse infinitésimale* était sous presse.

En même temps qu'il initiait de nombreuses générations d'élèves aux mathématiques supérieures et à la physique mathématique, Gilbert publiait d'année en année des recherches originales de plus en plus profondes. Nous avons essayé d'en donner une liste à peu près complète, qui sera publiée dans la *Revue des questions scientifiques*. Nous osons dire qu'elle sera une révélation pour beaucoup de nos lecteurs qui ne se doutent pas des multiples directions de la pensée où Gilbert se mouvait à l'aise. Rien que l'énumération des recueils où parurent ses notes et mémoires serait fastidieuse : nous en avons compté près de vingt, et il est presque certain que nous en avons oublié.

Ses premiers travaux furent publiés dans les Recueils de l'Académie royale de Belgique, de 1857 à 1873. Ils se rapportent à l'analyse, à la géométrie infinitésimale et à la physique mathématique. Nous citerons particulièrement son *Mémoire sur la fonction gamma,* dont un savant géomètre, d'une compétence exceptionnelle dans la théorie des culériennes, M. Catalan, a dit qu'il était « aussi important, au fond, que remarquable sous le rapport de l'élégance des transformations et de la variété des résultats » ; ses *Recherches sur les lignes tracées sur les surfaces,* où il retrouve par une voie simple et nouvelle les travaux antérieurs des géomètres et où il les complète en plusieurs points importants; enfin et surtout son étude *sur la diffraction.* Ce Mémoire, qu'il écrivit à l'âge de 29 ans, eut le rare honneur de devenir immédiatement classique. Verdet le fit passer tout entier dans ses *Leçons d'optique physique*, en faisant ressortir, mieux que l'auteur lui-même, la supériorité de sa méthode, au point de vue de la rigueur et de la simplicité, sur celles de ses devanciers, et ces devanciers étaient Fresnel et Cauchy ! Un autre maître

illustre, Lamé, signala le travail de Gilbert à l'Académie des sciences de Paris, et en fit une analyse élogieuse, avec sa précision accoutumée.

Les *Recherches analytiques sur la diffraction* ouvrirent à Gilbert les portes de l'Académie royale de Belgique, dont il fut nommé associé le 16 décembre 1867. Il n'y resta que six ans. Il fut amené à donner sa démission en 1873, à la suite d'un incident regrettable, — unique, croyons-nous, dans les annales des Sociétés savantes, — où il défendit ses convictions chrétiennes avec une énergie qui témoignait à la fois de la franchise de son caractère et de la vivacité de sa foi (*).

Deux ans après il fut, avec le R. P. Carbonnelle, S. J. — je ne cite que les morts — l'un des principaux fondateurs de la *Société scientifique de Bruxelles*. Inutile de redire ici la somme de dévouement qu'il a consacrée à cette œuvre qui lui était chère entre toutes; elle s'harmonisait admirablement avec tous ses instincts de savant et de chrétien, et elle lui permit de déployer, pour ainsi dire, toutes les ressources de son intelligence. Personne plus que lui n'a enrichi de rapports, de comptes rendus, d'articles et de mémoires savants, à la fois les *Annales* et la *Revue* publiées par la Société.

Gilbert avait commencé dès 1856, dans la *Revue catholique* de Louvain, son rôle d'historien et de vulgarisateur scientifique, en y publiant les biographies d'Adrianus Romanus et de Pagani, et en y résumant les progrès les plus récents de l'optique, de l'astronomie et de la géographie africaine. Il y avait aussi fait l'histoire du procès de Galilée, après les premières et célèbres publications de H. de l'Épinois. Dans la *Revue des questions scientifiques*, il reprend et élargit le cadre de ses études historiques et critiques. Il y fait paraître une foule de notices du plus haut intérêt sur Chasles, Puiseux, Foucault, etc.; il y réfute

(*) Gilbert était correspondant de la Société philomatique de Paris depuis le 10 février 1886. Plus tard, il a été nommé correspondant de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei A sa mort, il était officier de l'Ordre de Léopold.

M. S. Günther à propos de la prétendue querelle du pape Zacharie avec l'évêque Virgile, et il y fait une analyse détaillée de presque tous les livres nouveaux et importants sur la physique mathématique, de 1877 à 1892. Ses appréciations sur ces ouvrages prouvent que le temps seul lui a manqué pour mettre au jour, sur plusieurs des parties de cette science immense, des ouvrages didactiques aussi remarquables que son *Cours de Mécanique analytique.*

Mais ce qu'il faut signaler surtout parmi tous ces articles, ce sont ceux qu'il a écrits sur Galilée après la publication complète des pièces du procès par H. de l'Épinois, von Gebler et Berti. Ce qui distingue Gilbert de tous ceux qui ont traité la question de Galilée, c'est sa parfaite compétence au point de vue de la mécanique et de l'astronomie. Mais il joint à cela et la critique sûre et patiente d'un bollandiste, et une connaissance complète de la littérature galiléenne, depuis les œuvres du grand savant florentin jusqu'aux derniers pamphlets allemands ou français. Si l'on réunit, par ordre de date, ses publications sur Galilée, on a un volume d'une valeur inestimable au point de vue historique et critique, après lequel il y a bien peu à dire sur le célèbre procès. L'Église y est complètement vengée des accusations injustes dont elle a été si souvent l'objet à propos de Galilée.

Les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* contiennent aussi de nombreux témoignages de l'activité scientifique de Gilbert, mais je n'attirerai l'attention ici que sur deux groupes de ses travaux, ceux qui sont relatifs aux équations aux dérivées partielles et à la rotation des corps.

Il a écrit sur les équations aux dérivées partielles trois notes courtes, mais substantielles, où il est parvenu d'abord à compléter et à rendre inattaquables les bases de la *Nova Methodus* de Jacobi, puis à trouver la solution singulière des équations linéaires, signalée autrefois d'une manière mystérieuse par le grand géomètre allemand.

Après avoir publié sur la rotation des corps un grand nombre de notes préliminaires, il fit paraître sur ce sujet trois mémoires

dont l'ensemble constitue, avec les études sur Galilée et la théorie de la diffraction, l'œuvre capitale de Gilbert.

Le premier est une *Étude historique et critique sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (1878), où il analyse et juge les travaux des géomètres sur cette question difficile, depuis Euler et d'Alembert jusqu'à Hermite (exclusivement), en passant par Lagrange, Poisson, Poinsot, Puiseux, Saint-Guilhem, Briot, Lamarle, Foucault, Sire, Bour, Folie, Hirn, Résal, Villarceau, Quet, Rueb, Jacobi, Somoff, Weierstrass, Richelot, Heynen, Lottner, Sylvester, Chelini, Siacci.

Cette étude, qui suppose chez son auteur des lectures immenses, n'est qu'une introduction à son *Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif* (1882), où il reprend et traite par une voie originale les principales questions dont il avait fait l'histoire quatre ans auparavant. Gilbert avait présenté ce mémoire à l'Académie des sciences de Paris. L'impression dans le *Recueil des Mémoires des savants étrangers* en fut votée par la savante Compagnie sur les conclusions d'un rapport de M. C. Jordan, dont il me sera permis de transcrire ici quelques lignes : « Le Mémoire dont nous venons de présenter les résultats principaux est un travail considérable. Il se recommande d'une manière particulière par sa clarté, par la simplicité inattendue des méthodes employées pour aborder des problèmes justement considérés comme difficiles, par le soin minutieux apporté au développement et à la discussion des solutions. La réunion de ces qualités fera lire avec intérêt la partie de ce Mémoire consacrée à la théorie, si souvent traitée, du gyroscope de Foucault. Les géomètres y trouveront en outre des formules utiles et intéressantes sur les fonctions elliptiques. Toutefois la partie la plus neuve et la plus originale du Mémoire nous paraît être celle qui se rapporte aux systèmes moins connus, tels que le tore-pendule et le barogyroscope, où la pesanteur intervient dans les phénomènes. Le dernier de ces appareils, dont la conception et la théorie appartiennent en entier à l'auteur, mérite assurément de devenir classique. »

Nous venons de citer le barogyroscope imaginé par Gilbert

pour mettre en évidence le mouvement de rotation de la Terre, ou, si on le préfère, le mouvement relatif commun de tous les corps terrestres par rapport aux étoiles fixes. En réalité, c'est le seul instrument qui permette une expérience précise facilement réalisable dans cet ordre d'idées, comme Gilbert l'a prouvé dans sa conférence *Sur les preuves mécaniques de la rotation de la Terre.* Dans la séance mémorable de la Société scientifique où il fit cette conférence et où il exposa la théorie du barogyroscope, il prouva historiquement que les expériences sur la déviation des corps tombant sous l'influence de la pesanteur et de la rotation de la terre n'avaient abouti qu'à des résultats contradictoires. Il expliqua aussi pourquoi celles de Foucault, au moyen du pendule et du gyroscope, sont des expériences plutôt idéales que réalisables, parce qu'il y intervient presque toujours des forces perturbatrices qui les font échouer. Le barogyroscope est donc, jusqu'à présent, le seul appareil classique qui mette en évidence le mystérieux entraînement de tous les corps terrestres avec notre planète, par rapport aux étoiles fixes : il se comporte différemment selon qu'il est orienté dans le méridien ou dans la direction perpendiculaire, selon qu'il est plus ou moins loin du pôle ou de l'équateur. On peut lui appliquer, *mutatis mutandis*, ce que disait Foucault du pendule : « De même qu'en pleine mer, à perte de vue du rivage, le pilote, les yeux fixés sur le compas, prend connaissance des changements de direction accidentellement imprimés au navire; de même l'habitant de la terre peut se créer, au moyen du barogyroscope, une sorte de boussole arbitrairement orientée dans l'espace et dont le mouvement apparent lui révèle, même en l'absence du ciel, le mouvement relatif du globe qui le porte, par rapport aux étoiles fixes, le sens de sa rotation et la latitude du lieu où il se trouve. »

Les travaux de Gilbert sur la rotation des corps attirèrent vivement l'attention du monde savant. Deux années de suite, le ministre de l'Instruction publique, en France, signala spécialement son principal mémoire aux candidats pour le concours de l'agrégation. La Société scientifique fut forcée d'en publier une seconde édition. L'Académie des sciences de Paris, à laquelle

Gilbert présenta, de 1877 à 1880, outre ce mémoire, un grand nombre de notes sur la mécanique analytique, le nomma son correspondant le 5 février 1890; rare distinction, à laquelle il a été donné à peu de savants de notre pays de prétendre et d'arriver!

Hélas! deux ans plus tard, à un jour près, Gilbert nous était enlevé dans la plénitude de son talent. Il venait d'être déchargé, sur sa demande, d'une partie de son laborieux enseignement, et il croyait pouvoir consacrer plus que jamais toutes les forces de son intelligence à ses chères études et à la *Société scientifique*. C'est à celle-ci que furent donnés les derniers écrits de sa plume féconde. Dans le volume de la *Revue* publié pendant le second semestre de 1891, il résuma, dans un article remarquable, les derniers progrès de la haute optique. Au Congrès catholique de Malines, le 9 septembre 1891, il lut un rapport sommaire sur la Société scientifique, où, s'oubliant lui-même, oubliant tous ceux qui étaient encore à la peine avec lui, il laissa parler son cœur et, rendant un suprême hommage au R. P. Carbonnelle, son ami et son collaborateur dévoué, il en traça un portrait inoubliable. Enfin, en octobre 1891, à la session de la Société, tenue à Gand, il fit encore une courte communication sur la physique mathématique, mais ce fut son dernier travail.

Telle fut la carrière de notre savant confrère et ami. Elle a été une démonstration par les faits de notre belle devise : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissentio esse potest.* La foi et la science, en effet, s'harmonisaient admirablement dans cette belle intelligence dont nous venons d'esquisser rapidement l'histoire.

Pour abréger, nous avons dû taire ses études sur la géographie et les missions de l'Afrique, études qui datent de 1861, et où il a signalé, l'un des premiers, les dangers que l'islamisme et l'esclavage font courir à la civilisation dans cette partie du monde. Nous avons passé sous silence la part considérable qu'il a prise à la création et à l'organisation d'une des écoles d'ingénieurs de notre pays, celle de Louvain. Nous n'avons rien dit de ses pénétrantes études biographiques sur le R. P. Clerc, S. J., et sur la jeunesse

divers auteurs en vue de la représentation graphique de certaines familles spéciales de formules. Les principaux de ces auteurs sont des savants français : MM. Lalanne, Lallemand, d'Ocagne lui-même, ainsi que notre compatriote, M. Massau, professeur à l'Université de Gand.

Les explications fournies par M. d'Ocagne, dans une langue facile et claire, donnent à son auditoire une idée parfaitement nette de cette doctrine de la Nomographie qui vient à peine de faire son entrée dans le monde, mais qui semble destinée, en raison de son incontestable utilité, à se répandre rapidement dans tous les milieux où intervient le calcul numérique.

La conférence de M. d'Ocagne sera publiée dans la *Revue des questions scientifiques.* Voir aussi dans le tome XV des *Annales*, première partie, pp. 67 à 69, une notice historique sur la *Nomographie.*

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 26 AVRIL 1892.

M. le chanoine Delvigne, délégué de la *Société bibliographique* de Paris, donne lecture du rapport suivant :

Mesdames, Messieurs,

« Il sera fort difficile à votre rapporteur de vous entretenir longuement de la *Société bibliographique.* L'an dernier, il a exposé le but et l'organisation de cette association si intéressante d'hommes de bien, ne recherchant que la vérité, unis dans une même pensée de science et de foi.

Récemment, au Congrès des œuvres catholiques, à Malines, il a déposé un nouveau rapport sur le même sujet, à la 3e section. Il a eu l'honneur d'entendre ratifier par l'assemblée le vœu, émis par lui, de voir se créer en Belgique une organisation analogue.

Aujourd'hui votre rapporteur, fidèle à un engagement donné, vous entretiendra non point de la Société bibliographique proprement dite, mais bien d'une œuvre capitale, achevée depuis quelques semaines, et due à la plume de l'éminent historien qu'elle a la bonne fortune de voir à sa tête depuis son origine.

CRÉDIT.

Encaisse au secrétariat . . . . fr.	1,784	65
Rachat d'une cotisation	150	»
Abonnements et cotisations (au secrétariat). . .	1,465	»
Compte courant à la Société Générale	4,580	62
Compte courant à la Banque Delloye	3,141	»
Dépôt à la Société Générale (valeurs diverses) .	114,515	»
TOTAL. . . . fr.	125,636	27

MM. Lagasse et Otto sont désignés pour examiner ce rapport

Enfin, M. d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées, adjoint à l'ingénieur en chef du service du Nivellement général de la France, fait une conférence sur la *Nomographie*.

Le conférencier commence par faire ressortir l'importance croissante que prend le calcul numérique pour les besoins journaliers d'une foule de professions. Non seulement l'homme de science est tenu d'y recourir, mais aussi, et peut-être encore davantage, l'ingénieur, le navigateur, le financier, etc.

M. d'Ocagne examine ensuite les inconvénients qui s'attachent à l'exécution des calculs numériques par les procédés ordinaires de l'arithmétique : ennui, fatigue, perte de temps, chances d'erreurs, et en conclut à la nécessité de s'adresser à des moyens plus simples et plus expéditifs.

Il passe rapidement en revue les procédés, graphiques ou mécaniques, qui ont pour but de suppléer au travail mental exigé par le calcul, pour arriver au sujet principal de sa conférence : la construction et le mode d'emploi des tableaux graphiques de calculs tout faits ou *abaques*.

M. d'Ocagne met vivement en lumière les précieux avantages de ces instruments de travail dont il a, le premier, dans un livre récent, fourni une théorie générale et complète sous le nom de *Nomographie*.

Partant d'une idée de principe fort simple, il montre comment on en peut déduire les procédés particuliers imaginés par

divers auteurs en vue de la représentation graphique de certaines familles spéciales de formules. Les principaux de ces auteurs sont des savants français : MM. Lalanne, Lallemand, d'Ocagne lui-même, ainsi que notre compatriote, M. Massau, professeur à l'Université de Gand.

Les explications fournies par M. d'Ocagne, dans une langue facile et claire, donnent à son auditoire une idée parfaitement nette de cette doctrine de la Nomographie qui vient à peine de faire son entrée dans le monde, mais qui semble destinée, en raison de son incontestable utilité, à se répandre rapidement dans tous les milieux où intervient le calcul numérique.

La conférence de M. d'Ocagne sera publiée dans la *Revue des questions scientifiques*. Voir aussi dans le tome XV des *Annales*, première partie, pp. 67 à 69, une notice historique sur la *Nomographie*.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 26 AVRIL 1892.

M. le chanoine Delvigne, délégué de la *Société bibliographique* de Paris, donne lecture du rapport suivant :

MESDAMES, MESSIEURS,

« Il sera fort difficile à votre rapporteur de vous entretenir longuement de la *Société bibliographique*. L'an dernier, il a exposé le but et l'organisation de cette association si intéressante d'hommes de bien, ne recherchant que la vérité, unis dans une même pensée de science et de foi.

Récemment, au Congrès des œuvres catholiques, à Malines, il a déposé un nouveau rapport sur le même sujet, à la 3e section. Il a eu l'honneur d'entendre ratifier par l'assemblée le vœu, émis par lui, de voir se créer en Belgique une organisation analogue.

Aujourd'hui votre rapporteur, fidèle à un engagement donné, vous entretiendra non point de la Société bibliographique proprement dite, mais bien d'une œuvre capitale, achevée depuis quelques semaines, et due à la plume de l'éminent historien qu'elle a la bonne fortune de voir à sa tête depuis son origine.

La Société bibliographique, fondée, comme on sait, à Paris en février 1868, a toujours eu M. de Beaucourt pour président. Ancien élève de l'École des chartes, il s'était déjà fait remarquer par quelques travaux de critique historique, quand il résolut de doter la littérature de son pays d'un travail sérieux sur le règne de Charles VII.

Le sujet était on ne peut plus tentant, en effet. Quelle époque troublée que ces temps où la puissance de l'Angleterre, victorieuse sur la plus grande partie du territoire français, a confiné le Dauphin à Bourges! où celui-ci doute même de sa légitimité et ne songe plus, dans son désespoir, qu'à expirer ignoré dans un coin perdu de la péninsule hispanique!

Jeanne d'Arc, l'humble fille de Domremy, vint sauver la situation. D'Orléans à Reims, c'est une marche triomphale; de Compiègne à Rouen, c'est un long martyre.

La France se reconstitue et Philippe le Bon se réconcilie avec Charles VII, à Arras, en 1435.

Faut-il parler de Jacques Cœur, de cette éclatante fortune que rappelle son splendide hôtel à Bourges, devenu musée national? Que dire de la vie de ce financier qui connut les extrémités des choses humaines et qui mourut dans l'indigence?

Durant un quart de siècle, M. le comte de Beaucourt travailla au livre dont nous nous proposons de vous dire quelques mots. Ce livre paraît avec la vignette de la Société bibliographique.

« On peut dire, annonçait le prospectus au moment de l'apparition du tome I, qu'aucune source d'information n'a été négligée, et que rarement livre historique s'est présenté avec plus de garanties d'exactitude. Malgré l'érudition qui apparaît à toutes les pages dans ces notes précieuses et abondantes qui seront appréciées des travailleurs, le récit n'est point surchargé, et le grand public y trouvera un exposé clair, lucide, agréable des faits. Pour la première fois, on voit ici apparaître bien nettement sur la scène le personnage historique dont la figure, mal dessinée jusqu'ici, a été l'objet d'appréciations si diverses et si contradictoires; le lecteur pourra donc arriver à débrouiller par lui-même cette énigme historique qui s'appelle le caractère de Charles VII. »

Cette appréciation, émise en 1881, est l'expression de la vérité. Ni le tome II paru l'année suivante, ni le tome III publié en 1885, ni le tome IV datant de 1888, ni le tome V qui vit le jour en 1890, ni enfin le tome VI, portant le millésime de l'année courante, n'ont infligé le moindre démenti à cette attestation où il n'y a ni flatterie, ni exagération d'une annonce de librairie. L'Académie des Inscriptions, aréopage très compétent en la matière, a déjà décerné deux fois le grand prix Gobert à l'auteur. Cette palme académique vaut bien de longs éloges.

Parlant, je le sais, devant un auditoire composé de Belges pour la plus grande partie, je voudrais toutefois attirer leur attention sur cette œuvre la plus remarquable que la Société bibliographique ait prise sous ses auspices avec le *Répertoire des sources historiques du moyen âge* de M. l'abbé U. Chevalier. Belges, nous ne saurions l'oublier : l'histoire du règne de Charles VII est en contact incessant avec les faits accomplis sur notre sol.

Le fondateur de l'unité nationale aux Pays-Bas fut Philippe le Bon : *Imperii belgici conditor*, comme l'appelle Pontus Heuterus. Son règne commence le jour où Jean sans Peur, son père, est assassiné sur le pont de l'Yonne, à Montereau.

Y eut-il ici guet-apens, préméditation? M. de Beaucourt répond: « Tout a été fortuit dans cet événement. Par sa déloyauté, par son insistance à faire revenir le Dauphin à la cour, Jean sans Peur fut lui-même l'artisan de sa ruine. On en vint aux mains, et les anciens serviteurs de la maison d'Orléans, prompts à tirer l'épée, firent justice de l'insolence et des menaces du duc, en mettant à mort celui qui avait fait périr leur maître. L'histoire n'en doit pas moins blâmer sévèrement un tel meurtre et flétrir ceux qui s'en rendirent coupables. D'ailleurs, par cet acte de violence, ils portèrent à la cause qu'ils servaient un coup terrible. » (Tome I, 177.)

On connait les suites de ce grave événement. Durant trois lustres, Philippe laissa la vengeance gronder dans son cœur; sa passion contre le roi se donna pleine carrière au fatal traité de Troyes; sa colère ne se refroidit quelque peu qu'à la suite de son

démêlé avec le duc de Bedford, épisode qui lui valut la chance de ne pas faire battre ses armées par la troupe de Jeanne d'Arc. Enfin, la paix fut signée au monastère de Saint-Vaast, à Arras, en 1435.

Mais Philippe le Bon était vassal du roi de France à bien des titres, ne fût-ce qu'en sa qualité de comte de Flandre. Philippe le Hardi, son aïeul, n'avait été investi du duché de Bourgogne qu'afin d'épouser Marguerite de Male, la plus riche héritière de l'époque. Le vassal était plus puissant que son suzerain. On voit dès lors Philippe affecter des allures de souverain indépendant; il instituera l'ordre de la Toison d'or, bien antérieur à l'ordre de chevalerie de Saint-Michel, établi par Louis XI, un jour qu'il se trouvait au *Mont*, la merveille de l'Occident. Ce lien de vassalité de la Flandre *sous la couronne* ne sera rompu que par Charles-Quint, lors de la signature du traité de Madrid, en 1526, mais Dijon sera rendu à la France en 1529. Dijon était la nécropole ducale où reposaient Philippe le Hardi, Jean sans Peur, Marguerite de Bourgogne, Philippe le Bon. Charles-Quint lui-même, dans son testament fait à Bruges en 1522, au moment de s'embarquer pour l'Espagne, y couchait encore cette disposition qu'il élisait sa sépulture à Dijon, berceau de sa famille et où il voulait être réuni aux ancêtres de sa race.

Mais l'atmosphère politique se chargea de nouveau de noirs nuages. Il y eut l'affaire du Luxembourg; puis, douze ans environ après la signature de la Sainte-Paix, le dauphin Louis, accompagné de sa femme Charlotte de Savoie, est installé au château de Genappe au mois de juillet 1457. Il devait résider dans cette maison de chasse jusqu'à son avènement au trône. Il s'y entoura de joyeux compagnons, qui lui firent passer gaiement le temps. Le bon duc pourvoyait largement à ses dépenses ; il lui faisait compter une pension de trente-six mille écus, et la dauphine touchait mille livres par mois. C'est également à Genappe que naquit et mourut Joachim, premier-né de Louis. Le sanctuaire de Notre-Dame de Hal a gardé jusqu'aujourd'hui son beau reliquaire de la sainte Croix, présent d'un roi et d'une reine de France, l'un des joyaux de nos expositions rétrospectives d'art ancien, à Malines et à Bruxelles.

Mais en installant, même temporairement, le Dauphin dans ses États, le duc de Bourgogne n'était point sans appréhension sur les conséquences qui pouvaient en résulter pour lui. Il avait commis l'imprudence, selon le mot pittoresque de Charles VII, d'introduire le loup dans la bergerie. Dès que le Dauphin, devenu roi par le décès de son père en 1461, eut repassé la frontière, il devint l'adversaire acharné de la prépondérance bourguignonne et poursuivit avec une astuce que rien ne lassa la dislocation du faisceau de provinces devenues pour lui un sujet d'inquiétude.

Nous sommes surpris de voir les amateurs de notre histoire s'être préoccupés jusqu'à présent, d'une façon assez inattentive, nous semble-t-il, des six volumes formant l'œuvre de M. de Beaucourt. Aujourd'hui que nous saluons l'achèvement complet de ce beau travail, tout aussi remarquable par les qualités du style que par la sûreté de ses informations, nous ne pouvons qu'exhorter tous nos amis et confrères à prendre connaissance par eux-mêmes d'un des travaux les plus distingués que la critique historique du XIX[e] siècle ait présentés à la science. Cette publication honore la Société bibliographique au plus haut point; elle explique la légitime popularité dont l'estimable président jouit parmi nos membres, et ailleurs encore. »

Ensuite, M. de Lapparent, professeur à l'Université catholique de Paris, fait une conférence *sur la formation de la houille*, dont voici le résumé :

« Pendant longtemps, il a été admis que la houille s'était formée, soit dans des marécages lacustres, soit dans des lagunes maritimes, par la décomposition sur place, et à l'abri de l'air, d'une puissante végétation.

Pour expliquer la superposition, sur une même verticale, d'un grand nombre de couches distinctes, séparées par des assises de grès et de schistes, on supposait qu'après la formation de chaque couche, le terrain s'était affaissé, et que le vide résultant avait été comblé par des sédiments jusqu'à ce que le rétablissement du niveau primitif permît la reconstitution d'une nouvelle végétation.

Cette théorie a été récemment renversée par les observations de deux ingénieurs français, MM. Grand'Eury et Fayol. Le premier a démontré que la houille était formée de résidus végétaux posés à plat, après avoir flotté au sein d'un liquide, et le second a établi par des coupes décisives, relevées à ciel ouvert à Commentry, ainsi que par des expériences directes de sédimentation, que les détritus végétaux avaient été entraînés, avec les argiles et les sables, jusqu'à l'embouchure des cours d'eau qui construisaient des deltas, soit dans des lacs, soit dans la mer. De plus, il résulte des observations de M. Fayol que la transformation des végétaux en houille a dû être très rapide, car de vrais cailloux de houille sont mélangés aux pierres de granit et de schiste qui forment les conglomérats subordonnés au terrain houiller supérieur à Commentry.

Acceptée, en raison de son évidence même, pour les bassins lacustres, la théorie des deltas houillers a rencontré, en ce qui concerne les bassins de la Flandre, de la Belgique et de l'Angleterre, une vive résistance. Le conférencier s'attache à montrer que cependant les particularités de ces bassins sont inexplicables par toute autre doctrine. En particulier, la théorie de l'affaissement progressif par saccades est absolument incompatible avec ce fait d'expérience, que la formation des terrains houillers du nord a coïncidé avec un *processus* d'émersion en vertu duquel la mer a été rejetée peu à peu vers le sud, de sorte que les houilles les plus récentes ne s'observent que sur le bord méridional des bassins. Ce phénomène d'émersion est d'ailleurs le seul qui puisse expliquer la permanence du travail d'érosion par suite duquel de nouvelles assises sédimentaires n'ont cessé de s'ajouter aux précédentes.

En résumé, les couches de houille du nord se sont déposées, à titre d'alluvions végétales, dans de grands deltas marins, où le travail des vagues régularisait la sédimentation en l'étalant sur de grandes surfaces. Les prétendus troncs d'arbres en place ne sont, la plupart du temps, que des portions brisées de tiges, dont la verticalité a été peu ou point troublée par le flottage. Quant aux fossiles marins intercalés dans les sédiments carboni-

fères, ils marquent les divagations de l'embouchure, qui, en reportant les eaux limoneuses en d'autres points, rendaient de nouveau habitables pour les mollusques marins des régions d'où l'apport d'eaux troubles les avait antérieurement chassés.

Cette manière de voir n'exclut aucunement la possibilité des dislocations venant de temps en temps troubler le phénomène houiller ; mais elle supprime la fantasmagorie de ces affaissements, périodiquement répétés à des centaines de reprises, et elle réduit considérablement le temps qui a pu être nécessaire à la formation des couches de houille. Les différences des houilles résultent aussi bien de la composition originelle des détritus végétaux que de l'état de décomposition où ils se trouvaient au moment de leur enfouissement, moment à partir duquel le charbon de terre n'a plus subi que des modifications d'ordre physique. »

Le public choisi qui assiste à la conférence de M. de Lapparent accueille par d'unanimes applaudissements l'exposition admirablement claire de l'éminent professeur de l'Université catholique de Paris. Quand elle est terminée, M. Lambiotte, ingénieur des mines, présente quelques objections et demande quelques éclaircissements. Cela donne à M. de Lapparent l'occasion de faire connaître quelques faits nouveaux à l'appui de la théorie des deltas, et de préciser en même temps ce qu'il y a lieu de conserver de l'ancienne théorie.

Le texte complet de la conférence de M. de Lapparent sera publié dans la *Revue des questions scientifiques*.

BANQUET DU 26 AVRIL 1892.

Toast de M. le Dr Lefebvre, président.

« Messieurs, j'ai l'honneur de porter un toast à deux Majestés que les catholiques belges ne séparent pas dans leurs hommages,

parce qu'ils ne les séparent pas dans leurs cœurs : au Pape et au Roi.

Au Pape! Léon XIII n'est pas seulement le gardien infaillible de notre foi, il est, comme tous les papes, le promoteur des sciences et des lettres. On oublie peut-être trop qu'à une époque lointaine, quand le vieux monde romain, miné par sa propre corruption, s'effondra sous le flot de la barbarie, c'est l'Église qui abrita les sciences et les lettres dans ses cloîtres et ses monastères. Lorsque l'humanité, régénérée par le christianisme, fut suffisamment préparée pour les accueillir, l'Église leur donna l'envolée, comme Noé à la colombe quand les eaux du déluge laissèrent à découvert les vertes cimes des montagnes. Mais le rôle de cette glorieuse protectrice n'était pas fini : l'Église a continué à favoriser l'épanouissement des sciences et des lettres. Catholiques, nous nous étonnons toujours qu'il reste encore tant de préjugés parmi les savants étrangers à notre foi, mais qui cultivent la science avec loyauté. Ils affirment, ou du moins ils laissent affirmer autour d'eux, que l'Église se défie de la raison, cet instrument de la science, qu'elle la craint plus qu'elle ne l'aime. Ils n'ont donc pas lu l'histoire de l'humanité chrétienne; ils ne savent rien de ces décisions solennelles où des papes comme Jules II et, plus près de nous, Grégoire XVI revendiquaient si éloquemment les droits de la raison contre ses détracteurs?

Au demeurant, sachons attendre et espérer : nous gagnerons des recrues jusque dans ce camp hostile. En effet, c'est un fait d'observation souvent vérifié de nos jours, que les savants indifférents à nos croyances, mais droits et ouvrant sincèrement leur âme à la vérité d'où qu'elle vienne, finissent souvent par la laisser entrer triomphante, entière, c'est-à-dire accompagnée de la foi; la foi et la science sont les deux instruments inséparables et nécessaires pour arriver à la plénitude des connaissances auxquelles nous pouvons aspirer dans cette vie.

Que si parmi les nôtres, parmi les catholiques, quelques hommes, en face des révélations merveilleuses de la science moderne, se sentaient pris de quelque inquiétude, je leur dirais

volontiers : O hommes de peu de foi, pourquoi vous troublez-vous? Ne voyez-vous pas que le travail des savants, en nous révélant les secrets de la création et les applications merveilleuses de l'œuvre divine, ne font que glorifier le Créateur? Avez-vous oublié qu'un illustre payen, Galien, après avoir mis en lumière, plus complètement qu'aucun de ses devanciers, les merveilles de l'organisme humain, s'écriait déjà : je viens de chanter un hymne à la gloire de Dieu?

Craignez-vous peut-être quelque conflit entre les vérités que la foi nous révèle et les vérités mises au jour par la raison humaine? Mais Dieu n'est-il pas l'auteur de la raison comme il est l'auteur de la foi? Pensez-vous donc que Dieu puisse se contredire lui-même? Relisez au frontispice de notre œuvre cette déclaration du concile du Vatican que nous avons prise pour devise : « Il ne peut jamais y avoir de véritable désaccord entre la foi et la raison », car c'est le même Dieu qui révèle les mystères et communique la foi, qui a répandu dans l'esprit humain la lumière de la raison, et Dieu ne peut se nier lui-même, ni le vrai contredire jamais le vrai.

Messieurs, je bois au Pape, promoteur de la science, au Pape qui vient de nous envoyer, avec sa bénédiction, de magnifiques encouragements pour le Congrès scientifique international des catholiques qui s'ouvrira en 1894, sous les auspices de la Société scientifique.

Messieurs, je bois au Roi, au Roi protecteur de la science qu'il encourage en Belgique dans toutes ses manifestations. Je bois au Roi, gardien de nos libertés religieuses. Au centre de cette Europe civilisée par le christianisme, où la doctrine catholique est si souvent traitée en suspecte quand elle n'est pas traitée en esclave, il reste un pays placé sous son égide, où l'on peut librement répéter le cantique chanté par les Anges à la naissance du Seigneur : Gloire à Dieu au plus haut des cieux!

L'histoire dira que Léopold II s'éprit un jour de la noble ambition d'étendre son action au delà des frontières étroites de son royaume, et que ses missionnaires de tous les ordres, prêtres, savants, législateurs, soldats, portèrent la civilisation dans un pays

cent fois plus grand que la Belgique, un pays destiné sans doute à former une immense et glorieuse annexe du petit royaume que la Providence avait confié à ses soins.

Messieurs, je bois au Pape et au Roi ! » (*Vifs applaudissements.*)

Pendant le banquet, M. le Cte Fr. van der Straten-Ponthoz a rappelé incidemment la part que la *Société scientifique de Bruxelles* et son premier président, M. le Dr Lefebvre, ont eue dans la fondation de l'École supérieure d'agriculture de Louvain.

A ce propos, M. le secrétaire général a fait observer que la *Société centrale d'agriculture de Belgique* a contribué, de son côté, dans une large mesure, à la fondation de la *Société scientifique*, grâce au zèle et au dévouement de plusieurs de ses membres et, en particulier, de ceux qui, depuis l'origine, font partie du Conseil. MM. Fr. van der Straten-Ponthoz, 't Serstevens et Proost lui ont amené, en effet, dès la première heure, un grand nombre d'adhérents. Il signale aussi l'importance et l'antériorité des travaux de M. Proost sur l'analyse du sol par la plante, travaux qui ont été publiés dans les *Annales* et dans la *Revue des questions scientifiques*, et qui font honneur à l'École d'agriculture de Louvain, aussi bien qu'à la Société scientifique.

Visite du conseil de la Société scientifique de Bruxelles à Son Excellence le Nonce apostolique près S. M. le Roi des Belges.

En 1890, après la mort du R. P. Carbonnelle, la *Société scientifique de Bruxelles* traversa une crise pénible qui mit un instant son existence en péril.

Sur l'initiative de M. Lagasse, elle s'adressa à Son Excellence le Nonce apostolique près S. M. le Roi des Belges, Mgr Nava di Bontifè, dont l'intervention bienveillante réussit à aplanir rapidement toutes les difficultés. Récemment, à propos du *Congrès scientifique international des catholiques* en 1894, Son Excel-

lence le Nonce rendit encore à la Société scientifique un service signalé. Comme témoignage de sa gratitude, le Conseil a fait frapper un exemplaire en vermeil de la médaille de la Société. Son Excellence a bien voulu en accepter la remise, le mercredi 27 avril, à onze heures et demie du matin, en son hôtel. Cette médaille porte l'inscription suivante : *Exc. ac RR.* | *Josepho Archiep. Heracleensi* | *apud Ser. Belg. Regem* | *Nuntio Apostolico* | *Soc. scientif. Brux. Patrono Magnifico* | *grati animi ergo* | *Sodalitatis Rectores* | A. D. MDCCCXCI.

M. le Dr Lefebvre, président de la Société, entouré des membres du Conseil, a adressé à Son Excellence, à cette occasion, l'allocution suivante :

« La *Société scientifique de Bruxelles* a l'honneur d'apporter à Votre Excellence l'hommage respectueux de sa profonde reconnaissance. Vous lui avez donné des témoignages répétés de votre bienveillance : nous nous bornons à en rappeler deux. A la mort du R. P. Carbonnelle, cet organisateur puissant, ce travailleur infatigable, nous avons traversé une période difficile ; grâce à la puissante intervention de Votre Excellence, la crise fut bientôt surmontée, et notre Société est aujourd'hui aussi florissante que jamais. Dans une circonstance plus récente, lorsque, obéissant à un mandat qui nous avait été donné par le deuxième Congrès scientifique international des Catholiques réunis à Paris en 1891, nous avons abordé l'organisation de celui qui doit se tenir en Belgique en 1894, nous avons pensé que les œuvres catholiques ne peuvent arriver à leur plein épanouissement qu'avec la bénédiction du Chef suprême de l'Église. C'est encore à Votre Excellence que nous devons la lettre par laquelle Son Éminence le Cardinal secrétaire d'État nous annonce que Sa Sainteté daigne accorder à notre œuvre la bénédiction apostolique et nous transmet, avec l'approbation du Saint-Père, ses plus précieux encouragements.

» Nous prions Votre Excellence d'agréer, comme gage de notre reconnaissance, cette médaille que la Société scientifique a fait graver pour cette occasion solennelle. Sans doute, sa valeur

n'est pas à la hauteur de notre gratitude, mais c'est un symbole : cette médaille est inaltérable comme le dur métal sur lequel elle est frappée; notre reconnaissance sera inaltérable et durable comme elle. »

Son Excellence le Nonce répond par quelques paroles de remerciement et d'encouragement dont voici le sens général :

« Il est profondément touché de cette nouvelle marque de bienveillance qu'il vient de recevoir de la part des membres de la Société scientifique de Bruxelles. Il les en remercie infiniment et promet de conserver la médaille qui vient de lui être offerte comme l'un des meilleurs souvenirs de sa nonciature à Bruxelles. Il est persuadé que la Société scientifique est appelée à rendre d'éminents services à la Religion; aussi il croit de son devoir de s'intéresser vivement à ses progrès et à son développement, afin qu'elle groupe de plus en plus les forces et les travaux des savants catholiques, et qu'ainsi il soit démontré partout, par le fait même, qu'on peut être savant sans se mettre en contradiction avec la foi.

Prenant occasion de l'inscription de la médaille et du symbole choisi par M. le baron Béthune pour peindre aux yeux le but de la Société, il remarque avec satisfaction combien l'un et l'autre expriment parfaitement les pensées qu'il vient lui-même de développer (*). Il y voit la science représentée par un livre ouvert devant ceux qui prennent comme point de départ et comme but suprême Dieu, l'alpha et l'oméga de toute vraie science, livre d'où rayonnent les lumières de la vérité et qui dissipe les ténèbres de l'erreur.

Enfin, il est satisfait de ce que la Société a rempli jusqu'ici sa mission avec honneur ; avec l'esprit chrétien et le dévouement sincère à l'Église qui animent tous ses membres, on a le droit d'espérer un avenir encore plus heureux. Il forme le vœu que la bénédiction de Dieu soit toujours avec la Société pour fécon-

(*) Voir dans les *Annales*, t. XV, 1[re] partie, pp. XL et 84, la description et le dessin de la médaille.

der ses efforts et les couronner de succès, et termine en donnant de nouveau aux membres du Conseil l'assurance de ses sentiments de reconnaissance et de sincère dévouement. »

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 27 AVRIL 1892.

M. Mansion donne lecture du rapport suivant de M. C. Jordan, membre de l'Institut de France :

« La Société avait mis au concours la question suivante :

Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibnitz principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.

Un seul mémoire est parvenu au secrétariat, avec l'épigraphe suivante :

Si quantitas tam fuerit parva ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla (Euler).

Ce mémoire se composait primitivement de deux parties distinctes, consacrées, l'une aux intégrales à limites infinies, l'autre à celles où la fonction passe par l'infini. Mais l'auteur, jugeant que cette seconde partie, rédigée un peu trop hâtivement, n'avait pas le caractère d'une œuvre définitive, l'a retirée du concours pour la perfectionner plus à loisir. C'est donc uniquement sur la première partie que doit porter aujourd'hui notre examen.

L'auteur, avec grande raison, n'a pas essayé de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse appliquer la règle de Leibnitz. Une pareille tentative aurait échoué aussi

sûrement que celle de trouver un criterium général pour la convergence ou la divergence des séries. Il a donné au programme une interprétation moins ambitieuse mais plus saine, en se bornant à la recherche d'un système de conditions suffisantes.

La question de la dérivation sous le signe $\int$ est intimement liée, comme on sait, à celle de l'intégration, qui elle-même se confond avec celle du changement de l'ordre des intégrations dans les intégrales doubles.

Tout revient donc à assigner des conditions suffisantes pour que l'égalité

$$\int_a^b d\alpha \int_p^q f(x, \alpha)\, dx = \int_p^q dx \int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha$$

subsiste lorsqu'une des limites b, q, ou toutes les deux, sont infinies.

L'auteur y parvient en faisant intervenir la notion de la convergence uniforme. On sait quels services elle a rendus à la théorie des séries; elle n'est pas moins utile dans l'étude actuelle.

Le § I du mémoire est consacré à des définitions qu'il est nécessaire de rappeler pour l'intelligence des théorèmes.

Soit $\varphi(x, \alpha)$ une fonction de deux variables. Si, pour toute valeur de α comprise entre a et b, et pour tout nombre ε, on peut assigner un autre nombre $N = f(\alpha, \varepsilon)$, tel que les inégalités

$$a \overline{\overline{<}} \alpha \overline{\overline{<}} b, \quad N' > N, \quad N'' > N$$

entraînent la suivante :

$$| \varphi(N'', \alpha) - \varphi(N', \alpha) | < \varepsilon,$$

$\varphi(x, \alpha)$ convergera, quand x croît indéfiniment, et pour les valeurs de α comprises dans l'intervalle ab, vers une limite déterminée, $\varphi(\infty, \alpha) = \psi(\alpha)$.

La convergence sera uniforme dans cet intervalle, si l'on peut satisfaire aux conditions précédentes par un nombre N indépendant de α.

Supposons b variable. Si, quelque grand que soit b, on peut trouver un nombre $N = F(\varepsilon, b)$ satisfaisant à ces conditions, $\varphi(x, \alpha)$ sera uniformément convergente *dans un intervalle arbitraire*.

Elle le sera *dans un intervalle illimité*, si ce nombre N peut être choisi indépendant de b.

Enfin $\varphi(x, \alpha)$ sera uniformément convergente, *en général*, dans un intervalle, si elle l'est dans tout intervalle contenu dans celui-là, et ne renfermant pas certains points déterminés, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en nombre limité.

Lorsque la fonction φ est une intégrale définie,

$$\int_a^x f(x, \alpha)\, dx,$$

on pourra, le plus souvent, vérifier sans peine si la convergence est uniforme, en appliquant les méthodes connues qui fournissent une limite supérieure du module d'une intégrale définie. L'auteur en donne, au § II, de nombreux exemples, sur lesquels nous ne croyons pas devoir insister.

Dans le § III, il établit à titre de lemmes les propositions suivantes :

Si l'intégrale $\int^x f(x, \alpha) dx$ converge uniformément dans un certain intervalle vers sa limite $\int_p^x f dx$, cette dernière intégrale sera, dans cet intervalle, une fonction continue de α.

Si elle converge uniformément dans un intervalle illimité, et si, d'autre part, α tendant vers ∞, $f(x, \alpha)$ converge uniformément vers sa limite $f(x, \infty)$ dans un intervalle arbitraire, l'intégrale $\int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx$ tendra, pour $\alpha = \infty$, vers une limite déterminée, égale à $\int_p^\infty f(x, \infty)\, dx$.

En particulier, si f est une intégrale définie $\int_a^\alpha F(x, \alpha)\, dx$, on aura, sous les conditions précédentes,

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^\infty dx \int_a^\alpha F d\alpha = \int_p^\infty dx \int_a^\infty F d\alpha.$$

Dans les § IV et V, l'auteur arrive à l'interversion des intégrations, qui forme, comme nous l'avons expliqué, l'objet

principal de son travail. Il formule à cet égard les règles suivantes :

Si l'intégrale $\int_p^x f(x, \alpha)\, dx$, où x tend vers ∞, converge uniformément dans un intervalle fini ab, contenant le point α, on aura toujours

$$\int_a^\alpha d\alpha \int_p^\infty f dx = \int_p^\infty dx \int_a^\alpha f d\alpha.$$

Cette conséquence subsiste, lors même que la convergence de l'intégrale $\int_p^x f dx$ ne serait uniforme qu'en général, pourvu que la convergence de l'intégrale $\int_p^x dx \int_a^\alpha f d\alpha$ vers sa limite $\int_p^\infty dx \int_a^\alpha f d\alpha$ soit uniforme.

Le cas où la limite supérieure b serait elle-même infinie est plus compliqué. L'auteur formule, à cet égard, la règle que voici :

On aura

$$\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f dx = \int_p^\infty dx \int_a^\infty f d\alpha,$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° x tendant vers ∞, l'intégrale $\int_p^x f dx$ converge uniformément, en général, dans un intervalle arbitraire;

2° et l'intégrale $\int_p^x dx \int_a^\alpha f d\alpha$ converge uniformément dans un intervalle illimité;

3° α tendant vers ∞, $\int_a^\alpha f d\alpha$ converge uniformément, en général, dans un intervalle arbitraire;

4° $\int_a^\alpha d\alpha \int_p^x f dx$ converge uniformément dans un intervalle illimité;

5° L'une des deux intégrales

$$\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f dx, \qquad \int_p^\infty dx \int_a^\infty f d\alpha$$

a une valeur déterminée.

Les conditions 4° et 5° deviennent d'ailleurs superflues, si $\int_p^x f dx$ est uniformément convergente dans un intervalle arbitraire, au lieu de l'être seulement en général.

Dans le § VI, l'auteur énonce les conditions sous lesquelles on peut dériver sous le signe $\int$; elles découlent trop immédiatement des précédentes pour qu'il soit à propos de les reproduire ici. Il termine enfin par quelques applications, dont la plus intéressante est la détermination, par une équation différentielle, de l'intégrale

$$\int_0^\infty x \sin (x^3 - \alpha x)\, dx.$$

Le mémoire est suivi de quelques notes. L'une d'elles, relative aux intégrales doubles, est particulièrement digne d'attention :

On sait que l'intégrale double

$$Sf(x, \alpha)\, dx d\alpha,$$

où x varie de p à q, et α de a à b, peut se calculer, lorsqu'elle est déterminée, par deux intégrations successives, de telle sorte qu'on a

$$Sf(x, \alpha)\, dx d\alpha = \int_a^b d\alpha \int_p^q f(x, \alpha)\, dx.$$

Ce résultat subsiste-t-il nécessairement lorsque les limites b et q sont infinies? L'affirmative est admise plus ou moins explicitement dans un grand nombre de démonstrations, et notamment dans notre *Cours d'analyse.*

L'auteur montre, par un exemple décisif, la fausseté de cette supposition.

Considérons avec lui une fonction $f(\alpha)$ égale 1° à zéro pour α irrationnel ;

2° à $\frac{1}{n}$ quand α est une fraction irréductible $\frac{m}{n}$. On voit aisément que l'intégrale double

$$Sf(\alpha)\, dx d\alpha,$$

où x et α varient de 0 à ∞, est déterminée et égale à zéro, de même que l'intégrale simple $\int_0^\infty f(\alpha)\, d\alpha$. Au contraire, l'intégrale

$$\int^\infty d\alpha \left[\int_0^\infty f(\alpha)\, dx\right]$$

est essentiellement indéterminée, la quantité entre parenthèses étant toujours nulle pour α irrationnel, et infinie pour α rationnel.

Ce résultat inattendu nous paraît être le point le plus intéressant du mémoire que nous analysons. En effet, une intégration double ne résultant pas toujours de la composition de deux intégrations simples, il deviendra nécessaire d'étudier les intégrales multiples en elles-mêmes et indépendamment de leur génération par des intégrations successives. Divers points de leur théorie devront être revisés, en particulier tout ce qui concerne les changements de variables.

En résumé, l'auteur a déduit de son analyse un ensemble de conditions précises, sous lesquelles on peut encore appliquer la règle de Leibnitz pour la dérivation des intégrales à limites infinies. Ces conditions sont nombreuses; on ne s'en étonnera pas si l'on considère que la définition de l'intégrale $\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f dx$ comporte quatre opérations successives de passage à la limite, dont l'ordre se trouve entièrement bouleversé lorsqu'on intervertit les intégrations. D'ailleurs, chacune de ces conditions est généralement facile à vérifier. Enfin, les principes qui ont servi à les établir paraissent applicables à l'étude du cas plus complexe où la fonction à intégrer passe par l'infini.

Le mémoire présenté répond donc d'une manière satisfaisante à l'une des deux questions du programme; il ouvre la voie pour résoudre la seconde; enfin il contient une remarque importante sur les intégrales multiples. Nous estimons qu'il y a lieu de lui décerner le prix. »

Les deux autres rapporteurs, feu M. Gilbert et M. Mansion, s'étant ralliés à ces conclusions, ainsi que le Conseil de la Société, celui-ci, dans sa séance du 28 mars 1892, a procédé à l'ouverture du billet cacheté qui accompagnait le mémoire et contenait le nom de l'auteur : M. Ch. de la Vallée Poussin fils, chargé de cours à l'Université catholique de Louvain. Le Conseil lui a décerné un prix de cinq cents francs, accompagné de la médaille de la Société, portant l'inscription suivante :

A Charles-Jean | de la Vallée Poussin | pour son Mémoire | sur les Intégrales Définies | à limites infinies | MDCCCXCII.

Dans la séance de ce jour, cette médaille est remise au lauréat par M. le Président, aux applaudissements de l'assemblée.

Le secrétaire donne lecture du rapport des commissaires nommés pour examiner les comptes du trésorier. Ces comptes sont approuvés.

Ensuite, M. Éd. Van der Smissen fait une conférence *sur l'influence des doctrines de l'économie politique classique sur le socialisme scientifique.*

Le *socialisme intégral,* comme l'a appelé M. Benoît Malon, constitue, dit le conférencier, un ensemble de doctrines suffisamment définies pour qu'on puisse tenter d'en faire la synthèse. Il est nettement matérialiste : sa caractéristique, c'est la méconnaissance de la responsabilité naturelle et providentielle de l'homme. Car le socialisme entend dégager l'homme de ses devoirs envers le Créateur et envers la famille qu'il a procréée, et le dépouille du droit d'approprier les choses auxquelles il a appliqué son travail. Il peut paraître singulier dès lors que ses doctrines économiques procèdent de celles de l'école classique, dont les docteurs sont des adeptes du spiritualisme. Voici l'explication du fait : malgré leur croyance au libre arbitre, ceux-ci professent un véritable *fatalisme social* plus ou moins conscient, qui trouve son expression la plus pessimiste dans les théories de Malthus sur la population. Ces doctrines désolantes de l'école anglaise relativement à la population et au salaire ont amené les socialistes à nier par induction — en raisonnant de l'effet à la cause — l'Intelligence qui préside au gouvernement du monde.

Abordant ensuite l'objet propre de sa communication, M. Van der Smissen caractérise le pessimisme des économistes orthodoxes au sujet de l'organisation sociale dans ces trois propositions :

1. *Toute valeur vient du travail* (Adam Smith).

2. *En tout genre de travail, il doit arriver et il arrive en effet*

que le salaire de l'ouvrier se borne à ce qui lui est nécessaire pour se procurer sa subsistance (Turgot).

3. *La terre est originairement sans valeur, et la rente augmente en raison directe de la population* (Ricardo).

Somme toute, c'est sur ces prétendus axiomes que repose la doctrine économique des socialistes.

Ils tiennent le premier pour le principe en raison duquel doit être réglée la rémunération du travail; et les deux autres pour vrais en fait, mais uniquement en raison de la propriété individuelle. En effet, ils n'attendent pas autre chose du *collectivisme* qu'une rétribution adéquate du travail, indépendante de la pression de la concurrence, par le maintien de toutes les forces productives et du sol en particulier à la disposition de la collectivité.

Le conférencier reprend successivement chacune des trois propositions précitées et en démontre la fausseté.

Il est inexact, dit-il, que toute valeur vienne du travail. C'est là une exagération égale à celle des physiocrates qui considéraient la terre comme la seule richesse.

Sans nous arrêter longuement à la réfutation théorique qu'à faite M. Van der Smissen des axiomes (supposés) de Turgot et de Ricardo, contentons-nous de relever cette constatation, qu'ils sont absolument démentis par les faits.

La loi du salaire nécessaire (*loi d'airain* des socialistes) est déduite de l'existence d'un prétendu *fonds des salaires* qui doit pourvoir à la rémunération du travail et le fait d'autant moins largement que les travailleurs sont plus nombreux. C'est là un système absolument erroné : le seul fonds des salaires, c'est le revenu national, ou, si l'on veut, la fortune publique elle-même, car le salaire peut être *avancé* non seulement sur le revenu, mais sur le capital même : en fin de compte, d'ailleurs, l'ouvrier est *rétribué*, comme le capitaliste et l'entrepreneur, sur le prix du produit.

Quant à la loi de la rente, de Ricardo, selon laquelle le prix des subsistances se calcule d'après la dépense qu'a demandée leur production sur le moins fertile des sols cultivés, elle ne supporte plus l'examen en présence du fait bien palpable du prix des céréales sur tous les marchés *ouverts* : ce prix, c'est celui de leur production par le plus riche des sols cultivés !

En résumé, l'accroissement de la population a été, tant au point de vue du taux des salaires que du prix des subsistances nécessaires, une source de bien-être pour la classe ouvrière; et si les socialistes le nient, c'est qu'ils doivent maintenir coûte que coûte l'antagonisme social, « comme le mendiant entretient la plaie qui le fait vivre ».

M. Van der Smissen conclut en faisant remarquer de quelle importance *polémique* est la réfutation du pessimisme économique. Elle a pour conséquence directe de saper par la base l'édifice des revendications socialistes.

La conférence de M. Van der Smissen sera publiée dans la *Revue des questions scientifiques*.

Enfin, M. le Secrétaire donne lecture du résultat des élections des membres du Conseil pour l'année 1892-1893. Sont élus :

Président : M. A. de Lapparent.
Vice-Présidents : M. Ch. Lagasse.
M. le Chanoine Swolfs.
Secrétaire : M. P. Mansion.
Trésorier : M. J. De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
Chanoine Delvigne.
Colonel De Tilly.
Fr. Dewalque.
G. Dewalque.
A. Dumont.
É. Goedseels.
Général Jacmart.
Godefroid Kurth.
Dr Lefebvre.
Dr Moeller.
A. Proost.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
L. t'Serstevens.
de la Vallée Poussin.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Bibliografía meteorológica mexicana, que comprende las publicaciones de Meteorología, Física del Globo y Climatología hechas hasta fines de 1889, formada par Rafael Aguilar Santillán. — México, 1890.

Cours supérieur de géographie à l'usage de l'enseignement moyen du degré supérieur, par Alexis-M. G., troisième partie. La Terre dans son ensemble. — Liége, 1892.

Moyens de vulgarisation des connaissances géographiques. Discours du Frère Alexis-Marie Gochet. (Extrait du *Compte rendu du Ve Congrès international des sciences géographiques.*)

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1893, formado bajo la dirección del Ingeniero Angel Anguiano. — México, 1892.

L'École alsacienne a-t-elle raison contre Zeuner? Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur, par L. Anspach. (Extrait de la *Revue universelle des Mines*, etc.) — Liége-Paris.

Le Rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur, par L. Anspach. (Mémoire adressé à la Société belge des ingénieurs et des industriels.) — Bruxelles, 1892.

Cambridge Historical Essays, n° VI. The Somerset Religious Houses, by W. A. J. Archbold. — Cambridge, 1892.

List of Birds found in the Vicinity of Bridgeport, Connecticut. Prepared for the Bridgeport Scientific Society by C. K. Averill, Jr. — Bridgeport, 1892.

Magnetizzazione del nichel sollecitato da particolari azioni meccaniche. Memoria del Dott. Angelo Banti. (*Reale Accademia dei Lincei*, anno CCLXXXVII, 1890.) — Roma, 1891.

Lijkbegraving en lijkverbrandig. Tweede deel. De lijkbehandeling bij de christen volken, door D^r Is. Bauwens. — Brussel-Roeselaere, 1892.

Tratado de física empírico-matemática para uso de Seminários conciliares ecc., por el Presbítero Don Juan Manuel Bellido Carbayo.— Madrid, 1892.

Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potenzial-Logarithmal- und Numeralrechnung. von Dr Julius Bergbohm. Die rationalen algebraischen und die goniometrischen Integrale. — Leipzig, 1892.

Neue Integrationsmethoden und Grund der Potenzial-, Logarithmal und Numeralrechnung, von Dr Julius Bergbohm. — Stuttgart, 1892.

Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik, von Dr Julius Bergbohm. — Stuttgart, 1892.

Les Organes ciliés des Hirudinées. I. L'organe cilié du genre *Nephelis*, par H. Bolsius, S. J. (Extrait de la Revue *La Cellule*, t. VII, 2e fascicule.) — Lierre-Louvain.

Nouvelles recherches sur la structure des organes segmentaires des Hirudinées, par H. Bolsius, S. J. (Extrait de la Revue *La Cellule*, t. VII, 1er fascicule.) — Lierre-Louvain.

Recherches cliniques et thérapeutiques sur l'épilepsie, l'hystérie et l'idiotie, compte rendu du service des enfants idiots, épileptiques et arriérés de Bicêtre pendant l'année 1891, par Bourneville. Vol. XII. — Paris, 1892.

C.-V. Boys. Bulles de savon, traduit de l'anglais par Ch.-Éd. Guillaume. — Paris, 1892.

Ueber Meteoreisen, seine Unterschiede vom künstlichen Eisen und über das Schneiden des ersteren, von Dr Aristides Brezina. (Separat-Abdruck aus der *Oesterreichischen Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen*, 1890.)

Dr Aristides Brezina. Darstellung von Meteoriten auf antiken Münzen. (Monatsblatt der numismatischen Gesellschaft in Wien, Nr 70, mai 1889.)

Ueber das Eisen von Wolfsegg, von Dr Aristides Brezina. (*Allgemeiner Bergmannstag.*) — Wien, 1888.

Dr Aristides Brezina. Reisebericht aus Italien. Excursion nach Vöcklabruck und Kremsmünster. Neue Meteoriten III. Geschenke von Mineralien. — Reise zur Pariser Weltausstellung. — Cliftonit aus dem Meteoreisen von Magura. — Untersuchungen der Herren Berthelot und Friedel in Paris über das Meteoreisen von Magura. (Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums, Bd II, Bd IV, Bd V.)

Bibliothèque scientifique comtemporaine. Le Secret médical, par le Dr P. Brouardel. — Paris, 1887.

Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876-1878. XXI. Zoologi, Crinoida, ved D. C. Danielssen, med 5 plancher og 1 carte. — Echinida, ved D. C. Danielssen, med en planche. — Christiania, 1892.

De l'importance des études de thérapeutique générale. Méthode et doctrine. Conférence faite au Cercle médical des étudiants catholiques l'*Union* de Gand, le 18 février 1891, par le Dr De Buck. — Gand, 1891.

Observations sur la corrélation des diverses bandes considérées comme frasniennes, par M. Stainier, et réplique par G. Dewalque. — Liége, 1892.

Sur les dépôts de l'éocène moyen et supérieur de la région comprise entre la Dyle et le chemin de fer de Nivelles à Bruxelles, par G. Vincent et C. Couturiaux. Rapport de M. G. Dewalque. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*)

Sur les fossiles des psammites jaunes d'Angre, par G. Dewalque. (Extrait des *Annales de la Société géologique de Belgique*, t. XIX, 1892.)

Bibliothèque scientifique contemporaine. La Vie au sein des mers, par L. Dollo. — Paris, 1891.

La Perception et la psychologie thomiste, par M. Domet de Vorges. — Paris, 1892.

Introduction à la mécanique chimique, par P. Duhem. — Gand, 1893.

Leçons sur l'électricité et le magnétisme, par P. Duhem. Tome III. Les courants linéaires. — Paris, 1892.

Anatomie et physiologie animales, par Mathias Duval et Paul Constantin. — Paris, 1892.

Questions scientifiques, par Jean d'Estienne. (Extraits de la *Revue du Monde catholique*, 1er septembre 1891 ; février et juin 1892.)

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique, par F. Folie, directeur de l'Observatoire. 1892, 59e année; 1893, 60e année. — Bruxelles, 1892-1893.

Éléments de philosophie, par Georges L. Fonsegrive. II. Logique, métaphysique, morale, histoire de la philosophie, dissertations philosophiques. — Paris.

Bibliothèque scientifique contemporaine. L'Anthropologie criminelle, par le Dr Xavier Francotte. — Paris, 1891.

Un cas d'idiotie crétinoïde, par le professeur Francotte. (Extrait du *Bulletin de la Société de médecine mentale de Belgique*, 1892.)

Des Injections sous-cutanées de phosphate de soude dans le traitement des maladies nerveuses, par le Dr X. Francotte. (Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liége.*) — Liége, 1893.

Névroses convulsives et affaiblissement intellectuel, par le professeur X. Francotte. (Extrait du *Bulletin de la Société de médecine mentale de Belgique*, 1892.) — Gand, 1892.

De la résine de gaïac dans le traitement de l'angine catarrhale aiguë et subaiguë, par le Dr X. Francotte. (Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liége.*) — Liége, 1893.

Avv. Ambrogio Giacobone. I Diritti della donna sedotta, appunti di legislazione patria e straniera civile e penale, con richiami alla dottrina, alla giurisprudenza, alle scienze sociali. Seconda edizione. Parte prima, Legislazione civile. — Varzi, 1891.

Cours d'analyse infinitésimale, par Ph. Gilbert. Partie élémentaire. Quatrième édition. — Paris-Bruxelles, 1892.

Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second ordre, par Joseph Gillet. — Gand-Paris, 1892.

La Biblia y la Ciencia, por el Cardenal González, segunda édición. — Sevilla, 1892.

Lecciones razonadas de Religion y Moral, por el Dr D. Joaquín Gou Solá. — Genona, 1890.

Un cas de maladie de Morvan. Leçons faites par le professeur Grasset, recueillies par H. Guibert. (Extrait du *Nouveau Montpellier médical*, t. I, 1892.) — Montpellier-Paris, 1892.

Un cas de pseudo-tabes postinfectieux. Paralysie symétrique, postérisypélateuse du tibia antérieur, par le professeur Grasset. Leçons recueillies et publiées par le Dr André Castan. (Extrait du *Nouveau Montpellier médical*, tome I, 1892.) — Montpellier, 1892.

Des associations hystéro-organiques. Un cas de sclérose en plaques et hystérie associées, avec autopsie, par le professeur Grasset. Leçons recueillies et publiées par le Dr André Castan. (Extrait du *Nouveau Montpellier médical*, tome I, 1892.) — Montpellier, 1892.

Quelques cas d'hystérie mâle et de neurasthénie, par le professeur Grasset. Leçons recueillies et publiées par le Dr S. Jeannel. (Extrait du *Montpellier médical*, 2e série, tome XVII.) — Montpellier-Paris, 1892.

Estudios sobre los Meteoritas, por Don A. Federico Gredilla y Gauna. — Madrid, 1892.

Historia de la Molinería y Panadería, escrita por D. Guillermo J. de Guillen-García. — Barcelona, 1891.

Cours de machines, par M. Haton de la Goupillière. Tome II, 2e fascicule. Chaudières à vapeur. — Paris, 1892.

Sur la durée de l'évaporation dans les générateurs non alimentés, par M. Haton de la Goupillière. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, tome CXII.) — Paris.

Bibliothèque municipale professionnelle d'art et d'industrie Forney. Les Odeurs, démonstrations pratiques avec l'olfactomètre et le pèse-vapeur, par M. Charles Henry. Conférence du 14 mars 1891. — Paris, 1892.

Une transformation de l'orchestre. Conférence faite au théâtre d'application, le 27 avril 1892, par M. Charles Henry. — Paris, 1892.

Formulaire de l'électricien, par E. Hospitalier, 11e année, 1893. — Paris.

Optique géométrique. Étude relative à deux rayons géométriques particuliers assimilables à ceux que la nature produit soit dans la simple, soit dans la double réfraction, par M. l'abbé Issaly. (Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III, 4e série.)

Optique géométrique. Mémoire sur une surface d'ondes réfléchies, corrélative de celle de Fresnel, et sur la double série de surfaces d'ondes moyennes dont elle est la limite, par M. l'abbé Issaly. (Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. II, 4e série.)

Le Cardinal Haynald, archevêque de Kalocsa, considéré comme botaniste, par Auguste Kanitz; traduit par Édouard Martens. — Gand, 1890.

C. de Kirwan (J. d'Estienne). Le Congrès scientifique international des catholiques en 1891. (Extrait de la *Revue du Monde catholique*.) — Paris, 1891.

Comités de patronage des habitations ouvrières. — Ville de Bruxelles. Maison de jardinier; Maison de journalier; construites par Ch. Lagasse-De Locht, 1890-1891.

Le minimum de salaire. Communication faite à la Société belge d'économie sociale, en séance du 26 mars 1892, par Ch. Lagasse. (Extrait de la *Réforme sociale* de Paris, 16 avril 1892.) — Paris-Bruxelles, 1892.

Ville de Bruxelles. Enquête sur les habitations ouvrières en 1890. Rapport présenté au Comité de patronage de la ville de Bruxelles, par Ch. Lagasse et Ch. De Quéker. — Bruxelles.

Le Climat de la Belgique en 1891 et en 1892, par A. Lancaster. — Bruxelles, 1892-1893.

Sinopsis mineralógica ó catálogo descriptivo de los minerales, por Carlos F. de Landero. — México, 1891.

Dispositions galvanométriques et emploi des lampes à incandescence pour l'explosion des mélanges détonants, par Félix Leconte. (Extrait du *Bulletin de la Société belge d'Électriciens.*) — Bruxelles, 1891.

Études sur la manipulation des matières textiles animales et végétales, par par P. F. Levaux. Tome III, Industrie séricaire. — Liége, MDCCCXCI.

Apuntes de terapeútico-hipnótico-sugestiva, por el Dr Lopez Villalonga. — Habana, 1892.

On exact Analysis as the Basis of Language, by A. Macfarlane. (From *Transactions of the Texas Academy of Science.*)

Principles of the Algebra of Physics, by A. Macfarlane. (From the *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, vol. XL, 1891).

Recent Evidence for the Authenticity of the Gospel; Tatian's Diatessaron. By Michael Maher, S. J. — London, 1893.

Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie, par P. Mansion. — Paris, 1893.

Table des logarithmes à huit décimales des nombres de 1 à 125 000 et des fonctions goniométriques, etc., par J. de Mendizabal-Tamborrel, ingénieur-géographe. — Paris, 1891.

Des Indications de l'accouchement prématuré, l'opération césarienne et l'embryotomie. Discours de M. le Dr Léon Mercier. (Extrait du *Bulletin de la Société belge de gynécologie et d'obstétrique,* 4e année, 1892, n° 7.) — Bruxelles, 1892.

Aperçu des genres de *Dolichopodidae* de l'ambre, suivi du catalogue bibliographique des Diptères fossiles de cette résine, par Fernand Meunier. (Extrait des *Annales de la Société entomologique de France*, année 1892, vol. LXI.) — Paris, 1892.

La Creación según que se contiene en el primer capítulo del Génesis, por el P. Juan Mir y Noguera, de la Compañia de Jesús. — Madrid, 1890.

Galilée et la Belgique, esssai historique sur les vicissitudes du système de Copernic en Belgique (XVIIe et XVIIIe siècles), par le Dr Georges Monchamp. — St-Trond-Bruxelles-Paris, 1892.

Notification de la condamnation de Galilée, datée de Liége, 20 septembre 1633, texte d'après une copie manuscrite, avec remarques du Dr Georges Monchamp. — Cologne-St Trond, 1893.

Epilogo dei Ragionamenti tenuti nella politificia Academia Tiberina, l'anno 1891, letta nella tornata del dì 11 Gennaio 1892 da Mons. Giuseppe Patroni. — Roma, 1892.

Traité d'analyse, par Émile Picard, tome II, premier fascicule. — Paris, 1892.

La légende de Skanderbeg, par M. l'abbé Pisani. (Extrait du *Compte rendu du Congrès scientifique international des catholiques, tenu à Paris du 1er au 6 avril* 1891.) — Paris, 1891.

Origine des forces de la nature, nouvelle théorie remplaçant celle de l'attraction, par Guillaume Poche. — Paris.

Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, par H. Poincaré, tome Ier. — Paris, 1892.

Bibliothèque scientifique contemporaine. L'évolution des forces animales avant l'apparition de l'homme, par Fernand Priem. — Paris, 1891.

Merveilles de la nature (A.-T. Brehm). La Terre, les mers et les continents, géographie physique, géologie et minéralogie, par Fernand Priem, séries 1-2. — Paris.

Commission météorologique de la Gironde. — Observations pluviométriques et thermométriques faites dant le département de la Gironde, de juin 1889 à mai 1890. Note de M. G. Rayet. (Appendice au tome V, 3e série, des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux.)* — Bordeaux, 1890.

Prof. Schlegel's Zoogenaamde kritiek van het Japansch-Nederlandsch en Japansch-Engelsch Woordenboek, deel III. Beantwoord door Mr. L. Serrurier.

Publications du *Progrès médical.* Les Fonctions du cerveau : doctrines de l'École de Strasbourg; doctrines de l'École italienne, par Jules Soury. Deuxième édition. — Paris, 1892.

Les Oiseaux hybrides rencontrés à l'état sauvage, par André Suchetet. Troisième partie, Les Passereaux. (Extrait des *Mémoires de la Société zoologique de France,* t. V, p. 253.) — Lille, 1892.

Curso de analyse infinitesimal, por F. Gomes Teixeira. Calculo integral (primeira e segunda parte). — Porto, 1889-1892.

Sur la nature minérale des silex de la craie de Nouvelles, et contribution à l'étude de leur formation, par A.-F. Renard et C. Klement. Rapport de M. Ch. de la Vallée-Poussin. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 3e série, t. XIV, no 12; 1887.)

Le Contrat de travail (première étude), par Éd. Van der Smissen. (Extrait de la *Revue du Monde catholique.*) — Paris-Bruxelles-Genève, 1891.

Bibliographie militaire belge, par F. Van Ortroy. Deuxième année (1888). Troisième année (1889). — Louvain, 1889 et 1892.

Cours d'algèbre élémentaire, par l'abbé F. Verhelst, t. II. — Bruxelles, 1891.

La Creación, la Redención y la Yglesia ante la Ciencia, la Crítica y el Racionalismo, por el Padre R. Martinez Vigil, Obispo de Oviedo. — Madrid, 1892.

Cirro-stratus et alto-stratus, par J. Vincent. (Extrait du tome III des *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers,* publiés par l'Académie royale de Belgique.) — 1891.

Contrôle des abris thermométriques de l'Observatoire d'Uccle, par J. Vincent.

Die zusammengesetzten Nester und gemischten Kolonien der Ameisen. Von E. Wasmann, S. J. — Münster i. W., 1891.

L'Émigration des campagnes vers les villes; La crise agricole et l'alcoolisme; Remède à ces fléaux, par E. Waltier. — Bruxelles, 1892.

Sound and Music, by the Rev. J.-A. Zahm, C. S. C. — Chicago, 1892.

∴

Actes de la Société scientifique du Chili, deuxième année, tome II (1892), première livraison. — Santiago, juillet 1892.

Annales de l'Observatoire royal de Belgique. Observations météorologiques d'Uccle, janvier-août 1892. — Bruxelles, 1892.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVIII, livraisons 1, 2 et 3. Tome XIX, livraisons 1, 2, 3 et 4. — Liége, 1891-1892.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Tome XV (2e série, tome V, année 1880), fasc. II; tomes XXV et XXVI (4e série, tomes V et VI), années 1890 et 1891.

Annuaire pour l'année 1893, publié par le Bureau des longitudes. — Paris.

Ministère de l'Agriculture. Direction de l'Agriculture, Bulletin, dixième année, n° 1. — Paris, mars 1891.

Bulletin of the Minnesota Academy of Natural Sciences, vol. III, n° 2. — Minneapolis, 1891.

University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska, n° 17, vol. IV; n° 21, vol. V. — Lincoln, Nebraska, U. S. A.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie (Bruxelles). Quatrième année, tome IV, fascicules II et III, 1890. — Cinquième année, tome V, fascicules I et II. 1891. — Sixième année, tome VI, fascicule I, 1892. — Bruxelles.

Ministère de la Justice. Congrès international pour l'étude des questions relatives au patronage des détenus et à la protection des enfants moralement abandonnés. Anvers, 1890. Compte rendu sténographique. — Bruxelles, 1891.

La Ciudad de Dios, revista religiosa, cientifica y literaria dedicada al gran Padre San Agustin, 3a época, año XII. Volumen XXVII, núm. 1 (5 de Enero de 1892). — Madrid, 1892.

Documents relatifs à l'unification de l'heure et à la légalisation du nouveau mode de mesurer le temps, imprimés par ordre du Parlement. — Ottawa, 1891.

Encyclopédie scientifique des Aide-Mémoire.— Section de l'ingénieur : Alheilig, Corderic;—Travail des bois. — Berthelot, Traité pratique de calorimétrie chimique. — Bertin, État actuel de la marine de guerre. — Croneau, Canons, torpilles et cuirrasse. — Dudebout, Essai des moteurs à vapeur. — Dusquesnay, Résistance des matériaux. — Dwelshauvers-Dery, Étude calorimétrique de la machine à vapeur. — Ferdinand Jean, Industrie des cuirs et des peaux. — H. Gautier, Essais d'or et d'argent. — Gouilly, Transmission de la force motrice par air comprimé ou raréfié. — Langlois, Le lait. — de Launay, Formation des gîtes métallifères. — Le Chatelier, Le Grisou. — Lecomte, Textiles végétaux. — Lindet, La Bière. — Madamet, Détente variable de la vapeur; — Distribution de la vapeur; épures de régulation; — Tiroirs et distributeurs de vapeur. — Magnier de la Source, Analyse des vins. — Picou, Distribution de l'électricité: Installations isolées; — Usines centrales. — Éd. Sauvage, Moteurs à vapeur. — Schlœsing, Chimie agricole. — de Viaris, L'Art de déchiffrer les dépêches secrètes.

Section du Biologiste : Auvard : Gynécologie, Séméiologie génitale; — Menstruation et fécondation. — Bazy, Maladies des voies urinaires. — Bergé, Guide de l'étudiant à l'hôpital. — J. Bergonié, Physique du physiologiste, I. — Brocq et Jacquet : Dermatologie; Pathologie générale cutanée. — Charrin, Poisons de l'organisme. — Cuénot, Moyens de défense dans la série animale. — Demelin, Anatomie obstétricale. — Faisans, Maladies des organes respiratoires. — Laveran, Paludisme. — Magnan et Sérieux, Délire chronique. — Méguin, Les Acariens parasites. — Dr A. Olivier, Pratique de l'accouchement normal. — Polin et Labit, Examen des aliments suspects. — H. Roger, Physiologie normale et pathologique du foie. — Trousseau, Hygiène de l'œil. — Weiss, Technique d'électrophysiologie. — Wurtz, Technique baltériologique.

Essai sur le principe du mouvement et la marche des corps célestes. — Hasselt-Bruxelles-Gand, 1892.

Estados Unidos Americanos. Informes y Documentos relativos á Comercio interior y exterior, agricultura é industrias. N° 69, mes de Marzo 1891; N° 70, mes de Abril 1891. — México, 1891.

Journal de l'école polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement, 60e, 61e, 62e, cahiers. — Paris, 1890, 1891, 1892.

La Luz canónica, tomo 1, núm 1, 31 de Octubre 1891. — Madrid, 1891.

La Medicina cientifica basada en la fisiologia y la experimentacion clínica. — México, 1892-1893.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3e série, tome V, 2e cahier. — Paris-Bordeaux, 1890.

Moniteur bibliographique du clergé, des communautés religieuses, des écoles catholiques, des bibliothèques paroissiales, etc. Première année, n° 5, mai-juin 1891. — Lyon.

Moniteur bibliographique, revue mensuelle. 2e année, nouvelle série, n° 1. 25 décembre 1891. — Lyon.

Proceedings of the California Academy of Sciences, Second Series, vol. III, Part I. — September 1, 1891.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol. XVII, session 1889-90.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Natural Science, of Halifax, Nova Scotia. Vol. VII, 1889-90, Part IV; Second Series, Vol. I, Part. I. — Halifax, 1890-1891.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique, 6 septembre 1890 à 6 août 1892. — Bruxelles.

Exposition internationale d'Anvers. Rapport du jury de l'exposition de microscopie générale et rétrospective, 7 août - 23 septembre 1891, organisée à l'occasion du 300e anniversaire de l'invention du microscope. — Anvers.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia, anno I. 1° semestre 1891, fasc. 1° e 2°. Anno II. 1° semestre 1892, fasc. 1° e 2°. — Roma, 1891.

La Réforme sociale, treizième année. — Paris, 1893.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year ending June 30, 1888. — Item to July, 1888. — Item for the year ending June 30, 1889. — Item to July, 1889. — Item to July 1890. — Washington, 1890-1891.

University of Nebraska. Agricultural Experiment Station of Nebraska. Firth Annual Report, presented December 31st, 1891; Fourth annual Report, presented January 29, 1891. — Lincoln, Nebraska, U. S. A.

Reports from the Laboratory of the Royal College of Physicians Edinburgh, vol. IV. — Edinburgh and London, 1892.

Reports on the Observations of the Total Eclipse of the Sun, December 21-22, 1889, and of the Total Eclipse of the Moon, July 22, 1888, to wich is added a Catalogue of the Library, published by the Lick Observatory. — Sacramento, 1891.

Revue de l'aéronautique théorique et appliquée, Directeur : Henri Hervé, 4e année, 1891, 3e et 4e livraisons. — Paris, 1891.

Revue des Facultés catholiques d'Angers, première année, n° 1. — Angers, 1891.

Revue annuelle de l'École d'anthropologie de Paris, publiée par les professeurs. Première année. VII. 15 juillet 1891. — Paris.

Revue des sciences naturelles de l'Ouest, t. II, nos 1, 2, 3, 1892. — Paris. 1892.

Rivista internazionale di scienze sociali e discipline auxiliarie, anno I. — Roma, 1893.

Soluciones católicas, revista religiosa, scientifica y literaria, año I, vol. I, núm. 1, 1° de Marzo de 1893. — Valencia.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXIV (Meteorology of Ben Navis, by Alexander Buchan, L. L. D.). — Edinburgh, 1890. — Vol. XXXVI, part. I, Nos 1-8. — Edinburgh, 1891.

Les Ouvriers des deux mondes. Tome Ier, 2e livraison ; tomes II, III, IV, V. — Paris, 1857-1885.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

ANATOMIE

DES

ORGANES SEGMENTAIRES DES HIRUDINÉES

D'EAU DOUCE

D'APRÈS LES RECHERCHES CYTOLOGIQUES (*)

PAR

H. BOLSIUS, S. J.

Professeur au Collège de la Compagnie de Jésus
à Louvain.

AVANT-PROPOS.

Pour arriver à un but sans trop s'exposer à faire fausse route, il faut prendre les moyens les plus propres à cette fin. C'est là une vérité reconnue à tel point par tout le monde, qu'il semble presque ridicule de la mentionner.

Et cependant, lorsqu'il s'agit de l'application, cette vérité est trop souvent méconnue.

La matière que nous allons traiter après tant d'autres savants en donne une preuve palpable.

L'anatomie des organes segmentaires des Hirudinées d'eau

(*) Ce Mémoire a été présenté à la troisième section de la Société scientifique de Bruxelles, dans les séances du 30 octobre 1890 et du 5 février 1891 (Annales de la Soc. scient. de Brux., 1891, t. XV, 1re partie, pp. 17-18, 44-45).

douce a été le sujet de bien des recherches. Néanmoins la structure exacte de ces merveilleux organes n'a pas été mise en lumière par nos savants devanciers.

La seule raison en est que les moyens dont ils se sont servis n'étaient point en proportion avec le but qu'ils se proposaient d'atteindre.

Dans une question aussi délicate que celle-ci, il est absolument nécessaire de recourir aux moyens les plus aptes à découvrir toute la finesse microscopique de l'objet. La macroscopie peut nous donner quelques faibles renseignements sur les contours extérieurs; elle est muette sur les détails intérieurs. Aussi tous nos devanciers se sont servis du microscope pour scruter cet organe.

Mais cela ne suffit pas : il faut encore réaliser les conditions favorables au but; et pour un organe si compliqué et en même temps si fragile, la condition la plus impérieusement requise est de ne pas l'endommager par les manipulations.

Et certes, les extirpations, les dissociations et autres procédés analogues nuisent beaucoup à l'étude de la relation et même de la conformation de ces faibles organes. Il faut les étudier *sur place*, dans l'animal même.

Ensuite — et c'est là le grand avantage que nous avons eu sur nos devanciers, — la cytologie, l'étude de la *cellule*, est une condition *sine qua non* de l'anatomie des organes segmentaires.

Sans l'étude approfondie des *cellules*, c'est-à-dire des noyaux, des membranes et du protoplasme, l'anatomie des organes segmentaires est un hors-d'œuvre. Tant qu'on ne s'est pas rendu un compte exact des *limites* des cellules, il est impossible de décider, par exemple, si les cavités qui se présentent sont *intercellulaires* (*entre* les cellules) ou *intracellulaires* (*dans* les cellules). C'est ainsi que les devanciers de A.-G. Bourne plaçaient les canaux *entre* les cellules, tandis que ce savant a découvert leur *intracellularité*.

Cependant le fait *cytologique* de la nature intracellulaire, découvert par Bourne, est insuffisant pour résoudre la question *anatomique* du nombre des cavités ou des canaux *dans* les cel-

lules de l'organe segmentaire de certaines espèces d'Hirudinées d'eau douce. Pour ces détails, qui décident néanmoins de l'anatomie de ces organes, nous avons poussé plus loin l'étude *cytologique;* et l'examen des membranes, des noyaux et du protoplasme nous a révélé la structure merveilleuse de l'organe segmentaire chez la *Nephelis,* les *Clepsines* et les *Hemiclepsis.* Tous nos devanciers n'y voyaient qu'*un seul canal* replié sur lui-même; nous y avons démontré *trois canaux* parallèles, logés dans l'épaisseur d'une seule cellule.

Pour plusieurs autres détails, que le lecteur trouvera dans le présent Mémoire, il a fallu également se servir des données *cytologiques* que nous avons publiées déjà ou qui paraîtront sous peu dans la revue *La Cellule* (t. V, fasc. 2, et t. VII, fasc. 1).

Le succès de nos recherches est dû à la méthode rigoureuse et scientifique à laquelle nous ont habitué nos savants et bienveillants professeurs de l'Université de Louvain, MM. le chanoine J.-B. Carnoy et G. Gilson. Nous leur exprimons ici la plus sincère reconnaissance.

INTRODUCTION.

La littérature des Hirudinées, soit de la famille entière, soit de genres et même d'espèces en particulier, témoigne que l'étude de ces animaux n'est pas sans intérêt, comme nos propres observations nous l'ont montré.

Parmi tous les organes que possèdent ces animaux, nous nous arrêterons à un seul : c'est l'*organe segmentaire.*

La constitution vraiment admirable de cet organe a attiré l'attention de beaucoup de savants, depuis sa découverte par *von Siebold* (1848).

Après avoir été décrit et admis quelque temps comme organe respiratoire et aquifère, il fut enfin généralement reconnu comme organe sécrétoire ou excrétoire. Il a donc une certaine analogie avec les reins des animaux supérieurs.

Quoique aujourd'hui la nature de ces organes soit ainsi caractérisée, les noms sous lesquels on les indique sont encore très variés. On les appelle *canaux en lacets* (Schleifenkanäle), à cause de leur structure; d'autres disent *corps* ou *organes en lacets.* Un autre nom est celui de *corps*, ou *glandes*, ou *organes néphridiens*, ou *nephridia* tout court, à cause de leur fonction. On les trouve encore désignés sous le nom de *corps* ou *organes segmentaires*, à raison de leur position dans l'organisme.

Cette dernière dénomination, qui a pour elle l'ancienneté, nous rappelle que cet organe se présente dans une classe d'animaux dont le corps est composé d'une manière spéciale, c'est-à-dire dans les *vers*. Le corps des Hirudinées, comme celui des vers en général, est formé de *segments* semblables entre eux et se répétant sur presque toute la longueur de l'animal. La ressemblance est extérieure et intérieure, excepté pour certains segments peu nombreux, comme les segments extrêmes et ceux qui contiennent quelques parties des organes reproducteurs; dans tous les autres, dont le nombre peut être considérable, on trouve les mêmes parties de l'organisme répétées régulièrement. Ainsi,

chez beaucoup d'espèces, nous rencontrons dans chaque segment le même nombre d'anneaux extérieurs, un diverticule de l'intestin, une paire de testicules, une paire de canaux sanguins dorso-ventraux, et ainsi de suite.

La partie organique qui nous occupera uniquement dans ce travail, c'est l'*organe segmentaire,* ainsi que nous venons de l'indiquer.

Comme les Hirudinées sont des êtres à symétrie bilatérale, les *organes segmentaires* sont au nombre de deux dans chaque segment, situés à gauche et à droite de la ligne médiane. Ils ont une forme extérieure qui varie avec les espèces.

Le titre que nous donnons à notre travail indique que l'*anatomie* de l'organe en est la matière principale, le véritable objet.

Les questions *purement* cytologiques, sur la nature des cellules, de leurs noyaux, de leurs protoplasmes et de leurs membranes, seront écartées le plus possible. Si un de ces éléments est nommé, ce sera seulement comme partie intégrante de l'*anatomie,* ou encore comme preuve absolument indispensable de nos assertions.

APERÇU HISTORIQUE.

La découverte des organes excréteurs des Hirudinées, d'après ce que rapporte Gegenbaur [6], est due à von Siebold ; le nom d'*organes segmentaires* leur fut donné par Williams (*).

I. Leydig. — Leydig [4], dans son traité d'histologie, retrace et complète ce qu'il a écrit antérieurement sur la structure intime de ces organes. Comme il comprend dans une seule et même description les organes segmentaires des Synaptes, des Trématodes, des Turbellariés, des Rotateurs et des Hirudinées, il est facile de voir qu'elle ne peut pas contenir beaucoup de détails sur ces derniers, car les points de comparaison chez ces différentes classes de vers sont peu nombreux. Nous verrons bientôt que, même dans la seule famille des Hirudinées, le type de l'organe varie beaucoup.

La description, d'après les données de Leydig, revient sommairement à ceci :

L'organe segmentaire des Hirudinées, à sa portion supérieure, est constitué par un grand nombre de canaux très fins et anastomosés entre eux. La connaissance de cette particularité, dit-il, est due aux observations de Gegenbaur (**). Ces canaux circulent *entre* des séries de cellules. Ce treillis de canaux et le canal qui résulte enfin des anastomoses sont constitués par une « tunica propria ». Vers la surface du corps, la paroi du canal acquiert un aspect glandulaire.

Selon le même auteur, l'organe s'ouvre librement à sa partie supérieure, dans tous les animaux qui ont une cavité périviscérale. Ces ouvertures portent, chez les Hirudinées, des entonnoirs en forme d'arabesques ou de rosaces.

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin du Mémoire.

(**) Malheureusement Leydig ne cite pas l'ouvrage de Gegenbaur où ces observations sont données.

Je n'ai pas pu découvrir si Leydig mettait un entonnoir au bout de chaque petit canal du treillis de Gegenbaur, ou bien si, d'après lui, tous ces petits canaux avaient un entonnoir commun.

Chez beaucoup d'Hirudinées, la partie terminale inférieure du canal se dilate en guise d'outre ou de vessie.

Leydig lui-même fait remarquer que l'entonnoir, dont il orne la partie supérieure, n'avait pas encore été vu ni par lui ni par d'autres chez l'*Hirudo* et l'*Aulastomum*.

Huit ans plus tard, Leydig [5] déclare définitivement que l'entonnoir fait complètement défaut dans ces deux genres. Vingt ans après, un autre observateur ressuscitera cet entonnoir dans ces mêmes genres, et le maintiendra avec le même droit que Leydig le maintient chez la *Nephelis* et la *Clepsine*.

II. Gegenbaur. — C. Gegenbaur [6] donne de l'organe segmentaire des Hirudinées une description qui ne s'éloigne pas essentiellement de celle que nous a fournie le traité de Leydig. Cependant il distingue deux parties : l'une glandulaire, contenant le treillis de canaux fins, l'autre tubulaire, conduisant le canal excréteur (*).

D'après les données de ces deux auteurs, nous pouvons encore nous figurer ces organes comme des glandes *ordinaires*, à canaux *intercellulaires*, c'est-à-dire que la lumière des canaux se trouve *entre* les cellules, comme dans les cavités méatiques des plantes.

III. Hoffmann. — C.-K. Hoffmann [9] ne traite que des organes segmentaires de la *Clepsine complanata*. Il s'étend bien plus sur la partie réputée « entonnoir » que sur l'organe proprement dit. A propos de cet « entonnoir », il est d'un avis contraire à celui de Withmann [8], qui le trouve déjà dans l'embryon. Mais relativement à l'organe lui-même, Hoffmann donne très peu de détails anatomiques. Une phrase cependant est inté-

(*) Dans la deuxième édition de 1878, Gegenbaur donne beaucoup moins de détails que dans la première édition.

ressante au plus haut degré : « Parfois, dit-il, c'est comme si la lumière du canal passait par le milieu des cellules en question, » c'est-à-dire des cellules de l'organe. Le doute sur la nature du canal commence à percer. C'est avec la plus grande réserve, et seulement dans la phrase citée, que Hoffmann hasarde cette conjecture.

IV. Bourne. — Aussi longtemps que la nature des cavités de l'organe segmentaire était supposée *intercellulaire*, ou du moins tant qu'un doute était possible sur ce point, l'anatomie ne pouvait être exacte.

C'est pour cette raison que nous n'hésitons pas à dire qu'avant la découverte de A.-G. Bourne, en 1880 [10], toute tentative d'une description anatomique exacte devait nécessairement échouer.

A cet observateur patient est due la découverte de la nature *intracellulaire* du système canaliculaire des organes segmentaires.

A partir de cette date, 1880, la question entre dans une phase nouvelle. Bourne lui-même, en publiant l'anatomie de l'organe chez l'*Hirudo medicinalis*, en a posé les fondements, et non sans mérite, comme on le verra. Mais puisqu'en 1884 [18] il a repris et modifié les descriptions de 1880, nous nous contenterons de donner ici ce qu'il y de plus caractéristique dans sa première publication, en relevant surtout sa découverte importante.

Les canaux faibles, anastomosés, labyrinthiformes, que Gegenbaur et Leydig signalaient à l'origine de l'organe, ne sont pas placés *entre* les rangées de cellules, mais ils se trouvent *dans le corps* des cellules mêmes ; ces canaux ne sont pas *en dehors de la membrane*, ils sont *au dedans du protoplasme*. Et ce ne sont pas seulement ces faibles extrémités, mais aussi les tronçons les plus gros, résultant de la confluence des canaux faibles, qui sont *intracellulaires*.

Deux ans plus tard, en 1882 [12], après quelques incertitudes et de nouvelles expériences, il démontre que le gros canal central évecteur de la glande est, lui aussi, *intracellulaire*.

Voilà donc un organe glandulaire, multicellulaire, d'un volume même assez considérable, une glande à cavités innombrables, et toutes ces cavités logées *dans* les cellules de l'organe. Ou plutôt, il faut dire avec Bourne que, dans tout l'organe, il n'y qu'*une* cavité ; mais celle-ci est divisée, subdivisée, ramifiée à l'infini, de manière qu'à elle seule elle s'insinue dans toutes les cellules de l'organe. Cette cavité se présente sous la forme d'un canal et d'une infinité de canalicules.

A l'anatomie maintenant de nous conduire à travers ce labyrinthe.

Bourne le premier s'est engagé à nous faire parcourir d'un bout à l'autre cet inextricable dédale.

Partant de l'ouverture la plus large, à l'extrémité inférieure du canal, il remonte le courant. Après bien des tours et des détours du canal, qu'il trouve partout *intracellulaire,* il indique enfin un endroit où le canal, unique jusqu'ici, se diviserait en deux branches. Celles-ci se diviseraient encore en ramifications en nombre incalculable. Nulle part, d'ailleurs, aucune partie du système ne sort du protoplasme des cellules.

Sur le trajet de ce curieux labyrinthe *intracellulaire,* Bourne signale un détail qui a eu du retentissement dans les recherches d'un autre observateur : c'est que, dans une portion du canal, le courant serait de *sens contraire* à celui de la portion qui lui est parallèle dans le même lobe de l'organe. Ceci revient à dire que le canal retourne sur ses pas, et qu'un tronçon court en se repliant le long d'un tronçon précédent. Il appelle cette partie du système le « recurrent-duct ».

V. Lang. — A. Lang [11], dans une étude comparative des Plathelminthes avec des Cœlentérées et des Hirudinées, consacre un paragraphe spécial aux organes segmentaires.

Quoiqu'il parle avec éloge du travail de A.-G. Bourne, il n'estime pas, ce semble, à sa juste valeur l'importance de la découverte de ce dernier, quand il appelle ses observations « des compléments aux recherches classiques de *Leydig* ». Elles nous paraissent plutôt les remplacer que les compléter, car, par sa

découverte, Bourne transporte ces organes glandulaires dans une nouvelle catégorie, celle des glandes *multicellulaires* à cavités *intracellulaires*.

Cette nature *intracellulaire* des canaux de tout l'organe est admise par Lang, qui la dit typique autant qu'elle peut l'être. Il complète ensuite l'anatomie donnée par Bourne. Chez les Hirudinées à mâchoires (*Gnathobdellides*), dit-il, le canal central, dans la partie glandulaire, entre en communication avec le treillis canaliculaire qui l'environne.

Chez les Hirudinées à trompe (*Rhynchobdellides*), Lang admet encore dans l'organe segmentaire un canal collecteur et une partie environnante, à canaux ramifiés, arrangés en treillis. Tout ce système est aussi *intracellulaire*. Ici, comme chez les précédents, il y aurait communication directe, à divers endroits, entre le grand canal central et les canaux en treillis; seulement, dit-il, ces communications ne sont pas nombreuses.

La différence la plus marquée entre les *Rhynchobdellides* et les *Gnathobdellides*, autant qu'il est permis d'en juger par ce qui est constaté jusqu'ici, dit l'auteur, se trouve dans les extrémités terminales des canalicules ramifiés. Chez les *Rhynchobdellides*, le canal principal aboutirait directement à un entonnoir, qui est aussi à canal intracellulaire et muni de cils vibratiles. Cette partie ferait défaut dans tous ou presque tous les *Gnathobdellides*.

Nous voyons donc que Lang n'est pas très favorable au « recurrent-duct » de Bourne, qui certes présuppose l'absence de communications latérales entre le canal central et le manchon treillisé qui l'entoure. En même temps Lang admet la correction apportée par Leydig, en 1865, à ses idées antérieures sur l'existence des entonnoirs chez l'*Hirudo* et l'*Aulastomum*.

VI. Schultze. — Osc. Schultze [15] a soumis à des observations minutieuses diverses espèces d'Hirudinées d'eau douce. Il se proposait surtout de vérifier l'existence des communications directes du canal central avec les canaux ramifiés. Ensuite l'auteur chercha à découvrir si, dans les Hirudinées autres que l'*Hirudo* et l'*Aulastomum*, le « recurrent-duct » se présente également.

Inutile de dire qu'Osc. Schultze admet l'*intracellularité* complète de tout le système de canaux.

Les résultats auxquels l'ont conduit ses recherches sont d'abord la confirmation générale des données de Bourne sur la structure de l'organe segmentaire chez l'*Hirudo.*

Ses observations sur cet organe chez l'*Aulastomum* sont traduites par une figure schématique de tout le système. Elle ressemble fort à la figure que Bourne a donnée plus tard de l'organe entier de l'*Hirudo,* et que nous reproduirons plus loin.

Pour ces deux genres, Osc. Schultze constate le « recurrent-duct » de Bourne, et en même temps il nie pour tous les deux l'existence de communications directes entre le canal central et les canaux environnants.

Les entonnoirs n'apparaissent ni dans l'une ni dans l'autre.

L'organe segmentaire de la *Nephelis* et des *Clepsines* prend, d'après ses données, une structure d'un type profondément différencié de celui des genres précédents.

Osc. Schultze les trouve constitués par une série de cellules placées bout à bout et traversées par *un seul canal.* L'assise de cellules *à l'intérieur* desquelles est creusé *le canal unique,* n'est pas entourée d'autres assises de cellules à canaux en treillis. Il rejette donc l'idée de Lang, qui admettait un pareil manchon, au moins à la partie supérieure de l'organe, et qui croyait y avoir même observé la communication directe des ramifications avec le grand canal.

Mais l'anatomie de l'organe est poursuivie plus loin par l'infatigable travailleur. Schultze décrit et figure ce canal *unique* dans tout son trajet, depuis l'origine jusqu'à l'embouchure inférieure.

Afin de faciliter l'exposition des idées d'Osc. Schultze, nous donnons, dans la figure 1, l'ensemble du schéma projeté par l'auteur et, dans les figures 2, 3, 4, les détails agrandis.

L'organe segmentaire, selon lui, débute par une série de grandes cellules (fig. 1, F).

A l'origine de cette série, l'auteur dessine un entonnoir en pointillé, indiquant ainsi qu'à cet endroit d'autres auteurs ont

placé cette formation. Pour lui, il ne l'a pas trouvée, du moins chez la *Clepsine complanata,* dont il figure le schéma.

La série F est formée par une seule assise de cellules, placées bout à bout et réunies par des « commissures », comme le représente la figure 2 sous un grossissement plus fort.

Le canal segmentaire, formé dans cette série F, arrive au point *b'* (*).

Nous l'indiquons par une ligne ponctuée ...., partant de l'origine et se prolongeant le long de *b'* et de B jusqu'en *b*.

A partir de *b*, le canal se continue par la ligne barrée ++++++ ; il s'avance de *b* en D, longe *a* et A et arrive en *a'*. C'est à cet endroit que Schultze fait retourner brusquement le canal sur ses pas pour constituer le « recurrent-duct ». Nous continuons le dessin du canal par un trait mixte —.—.—.—.

En partant de *a'*, le canal revient donc le long de A, *a*, D, *b*, B, jusqu'en *b'*. Le courant, dans tout ce dernier trajet, d'après les idées de Schultze, est nécessairement de sens contraire à celui qu'il avait en allant de *b'* en *a'*, passant par B, D, A.

Cependant, comme la portion *b*, D, *a* de l'organe ne contient que deux anses du canal, tandis que le reste en contient trois, c'est à elle de préférence que Schultze réserve le nom de « recurrent-duct ».

De *b'* en *a'* il est simple, mais il rencontre bientôt la partie double de son trajet antérieur. A partir de là, nous traçons le canal jusqu'à l'embouchure par une ligne continue.

Dans la portion A, il y a donc trois parties du canal parallèles : deux qui s'avancent dans la même direction, ce sont les parties marquées par le trait continu et le trait mixte ; dans la troisième partie, indiquée par la ligne barrée, le courant a une direction opposée à celle des deux autres.

Cette troisième section, arrivée en C, saute brusquement de

(*) Remarquons que pour suivre sans trop de peine le canal dans son trajet si compliqué, nous avons cru bien faire en donnant aux différentes parties du parcours un trait particulier. L'auteur a tracé tout le canal comme une ligne continue, ce qui embarrasse parfois le lecteur pour se retrouver dans les divers tronçons.

a en *b*, sans pénétrer dans ce que l'auteur appelle le « recurrent-lobe ». A partir de *b*, le canal continue à longer ses trajets antérieurs jusqu'en *b'*, en passant par B.

En *b'*, il se dirige définitivement vers la surface du corps par une série de cellules placées les unes à la suite des autres sur une assise unique.

A coup sûr, dans le schéma d'Osc. Schultze, nous trouvons une lucidité très grande dans la représentation du trajet supposé du canal depuis son origine jusqu'à l'embouchure inférieure.

Des détails que le schéma ne pouvait présenter sont donnés par l'auteur dans les autres figures que nous avons reproduites.

La figure 2 donne quelques cellules de la portion F ; elles sont placées sur une seule rangée. L'auteur dit qu'il ne voit pas clairement comment se fait le passage du canal de l'une à l'autre.

La figure 3 est prise dans la portion D de l'organe. Nous y voyons distinctement que, d'après l'auteur, les deux canaux passent par deux conduits différents, formés chacun de cellules placées bout à bout. L'auteur déclare que le canal, au passage d'une cellule à l'autre, *s'atténue et s'étire à tel point qu'il ne saurait le suivre;* il ne le retrouve que lorsque le canal gagne en diamètre dans la cellule suivante.

La figure 4 représente une partie de A. Malheureusement, cette figure est moins claire que la précédente. Nous y distinguons bien les trois tronçons du canal, les noyaux qui semblent accompagner chacun de ces tronçons; mais la division en trois conduits indépendants juxtaposés n'est pas bien caractérisée. En nous basant sur la figure 3 et sur les données du texte, nous nous croyons autorisé, forcé même, à voir dans la figure 4 trois conduits cellulaires juxtaposés et accolés.

L'anatomie de l'organe segmentaire de la *Clepsine complanata*, que nous venons de donner d'après Osc. Schultze, s'applique, suivant l'auteur, à la *Clepsine bioculata*, à ce détail près, que celle-ci lui a présenté un « entonnoir » à la partie terminale interne.

L'organe segmentaire de la *Nephelis vulgaris*, dit-il, est aussi

du même type; il faut remarquer seulement que l'auteur signale ces particularités : que les cellules ne sont pas réunies par des « commissures », et que le canal, au passage d'une cellule à l'autre, au lieu de se rétrécir et de devenir invisible, comme chez la *Clepsine,* s'élargit au contraire notablement.

En résumé, pour ce qui nous intéresse, les données d'Osc. Schultze sont celles-ci :

1° L'organe segmentaire des *Clepsines* et de la *Nephelis* est constitué par *un seul canal* parcourant l'organe d'un bout à l'autre ;

2° Ce canal est *intracellulaire,* et les cellules qui le contiennent sont placées bout à bout sur une seule rangée ;

3° Cette rangée de cellules, et avec elle le canal, revient sur elle-même et forme un « recurrent-duct » ;

4° Après un troisième circuit, moins grand que les deux premiers, le canal gagne la surface ventrale du corps.

Quant à la vésicule terminale, l'auteur la trouve bien developpée chez la *Nephelis ;* chez la *Clepsine,* au contraire, il se prononce contre son existence.

VII. Vejdovsky. — A la fin de la même année qui vit apparaître le travail d'Osc. Schultze, le professeur de Prague Fr. Vejdovsky [14] donna un mémoire sur le même sujet. L'intracellularité des cavités n'est plus mise en doute. La structure générale de l'organe segmentaire est surtout examinée dans ce travail. Ce savant décrit les organes segmentaires de la *Nephelis,* des *Clepsine complanata* et *bioculata,* et des *Hemiclepsis* (*Clepsines*) *tessulata* et *marginata.*

Dans toutes ces espèces, il signale un canal *unique,* traversant la série de cellules qui constituent l'organe. Partout il trouve l'origine de ce canal dans des ramifications ou des lacunes ramifiées à la portion supérieure de l'organe; cette origine est complètement intracellulaire.

L'auteur n'a constaté nulle part la disposition en « recurrent-duct »; le canal est très irrégulièrement pelotonné.

Dans aucune espèce, la vésicule urinaire ne fait complètement

défaut. Cette vésicule, d'après lui, est même pourvue à sa surface interne de cils raides et immobiles. Mais, sur les dessins de l'auteur, on ne distingue pas si la vésicule est une dilatation du canal lui-même, ou une cavité séparée, garnie d'un épithélium.

A l'extrémité supérieure de l'organe, il constate l'absence constante de cette partie qu'on a nommée l'*entonnoir;* et il ne pourrait l'admettre que d'une manière dubitative dans l'âge embryonnaire. Sur ce point, Vejdovsky prend donc le contre-pied de Hoffmann (*).

Les « commissures » de Schultze, chez les *Clepsines*, ne sont pas mentionnées par Vejdovsky.

VIII. Bourne. — Le travail le plus détaillé est celui de A.-G. Bourne, en 1884. Il nous rend les vues d'alors sur la structure anatomique des organes segmentaires dans beaucoup d'espèces d'Hirudinées, tant marines que d'eau douce. Ce mémoire est accompagné de nombreux dessins des organes segmentaires et de leurs détails, les uns schématiques, les autres d'après nature. Il sera utile de donner l'analyse détaillée du chapitre consacré par l'auteur à ces organes dans les diverses espèces. Nous accompagnerons le résumé de quelques figures de l'auteur.

Le paragraphe VII est intitulé : *Nephridia.* C'est le nom dont se sert Bourne pour indiquer l'organe que nous nommons segmentaire. Voici l'abrégé du paragraphe :

Depuis qu'il a publié son mémoire [10] sur l'organe segmentaire de l'*Hirudo,* A. Lang et Osc. Schultze ont traité le même sujet. Schultze surtout a augmenté nos connaissances en corrigeant à bon droit quelques points importants de ses données. Les recherches de Schultze sur la *Clepsine,* la *Nephelis* et l'*Aulastomum,* mais surtout ses propres recherches sur la *Pontobdella,*

(*) Le professeur Fr. Vejdovsky vient de nous communiquer qu'il n'admet « l'entonnoir » en aucun âge pour les Rhynchobdellides. Il n'y a, dit-il, que des « Trichterzellen » dans l'embryon, jamais un véritable « entonnoir » (Trichter, *Nephridiostome*); et ces « Trichterzellen » mêmes dégénèrent bientôt.

en relation avec les résultats de Schultze, le mettent en état de donner une description comparative des organes segmentaires du groupe des Hirudinées. Les points les plus importants de la comparaison sont les « entonnoirs intérieurs » et le canal collecteur (*).

Après avoir donné la description des organes segmentaires de la *Pontobdella* (Hirudinée de mer) avec leur « entonnoir » et leur vésicule terminale, il passe rapidement sur ceux de la *Branchellion* (espèce marine), chez laquelle « l'entonnoir » fait défaut, et sur ceux de la *Piscicola*, où « l'entonnoir » n'est pas mentionné non plus.

Vient ensuite la *Clepsine*, dont il donne avec beaucoup de précision, selon ses idées, l'anatomie de l'organe segmentaire.

Il y a peu de chose à ajouter, dit-il, à ce qu'Osc. Schultze expose sur l'organe segmentaire de ce genre. Les « entonnoirs » sont parfaitement visibles sur des préparations en coupe. Après « l'entonnoir » et la dilatation qui y fait suite, on trouve une série de cellules arrondies, placées bout à bout (fig. 5, *b*-*c*). Dans ces cellules, il y a un canal à lumière très faible, portant des ramifications. Les cellules depuis *c* jusqu'en *e* sont beaucoup plus volumineuses que celles de la portion précédente *b*-*c*; mais le canal, qui vient de plus haut, y continue son chemin en portant des ramifications.

(*) Remarquons ici que nous réservons la question des « entonnoirs » à un mémoire spécial. La raison de cette division est que nous avons déjà la preuve que les parties réputées « entonnoirs intérieurs » ne dépendent nullement des organes segmentaires, mais constituent des organes à part. Pour la *Nephelis vulgaris*, nous possédons toutes les données qui le prouvent clairement. A la réunion de la Société scientifique de Bruxelles, le 5 février 1891, nous avons montré des préparations microtomiques de la *Nephelis vulgaris*, qui attestent cette indépendance. (Voyez *Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles*, 1891, tome XV, pp. 44-45.) Pour d'autres espèces, nous effectuons en ce moment les recherches nécessaires.

Pour cette cause, notre résumé ne fera que mentionner les « entonnoirs » là où Bourne en parle; les détails sur ces étonnantes conformations trouveront leur place naturelle dans un travail suivant, consacré spécialement à ces organes.

Puisque, dans le présent mémoire, nous ne traitons, en outre, que des Hirudinées d'eau douce, nous nous bornerons à retracer ce que Bourne expose par rapport à celles-ci.

Depuis *e* jusqu'en *g*, la lumière du canal parcourt des cellules allongées dans le sens de la direction du canal. En *g*, le conduit se replie sur lui-même et revient en *e*.

Ici le canal, *avec sa propre paroi*, passe à *l'intérieur* des cellules très larges *e-c*. Cette paroi propre du canal, qui entre à l'intérieur de ces cellules, est *elle-même constituée par des cellules* ayant un noyau et une membrane distincts.

Le canal, avec sa paroi cellulaire, sort de la série de cellules en *h*, décrit une nouvelle spire en longeant les points *g* et *f*, et rentre une seconde fois dans la même série de cellules en *e*; le canal, à cette rentrée, emporte encore *à l'intérieur* des cellules *e-c* sa paroi cellulaire.

La section transversale de la portion *c-e* présente donc l'aspect que l'auteur lui-même a rendu par la figure 6.

La légende qui accompagne cette figure est si détaillée, qu'elle ne laisse aucun doute sur les idées de l'auteur; la voici :

« La section A-B est une cellule du lobe principal avec son » noyau *n'*, et elle contient des ramifications; et en outre, elle » entoure en deux endroits des cellules perforées contenant le » conduit dans deux portions subséquentes de sa course, comme » font voir les noyaux *n''*, *n'''*, dans leurs parois (*). »

En vérité, si cette merveilleuse constitution se vérifiait, Bourne aurait le droit de dire qu'il a découvert des cellules du caractère histologique le plus remarquable.

D'après l'auteur, une section, dans la partie *e-f*, pratiquée suivant C-D, et représentée fig. 7, montre deux cellules simplement accolées, ayant chacune le canal à l'intérieur de leur masse.

Observons déjà à ce moment que la figure, le texte et la légende du schéma de l'organe de la *Clepsine* sont encore plus clairs et plus précis chez Bourne que chez Osc. Schultze. Quant à la valeur objective, nous la discuterons, pour cette espèce-ci

(*) « Section AB is a cell of the main lobe with its nucleus *n*, and contains branching » ductules; and in addition to these, it surrounds in two places perforated cells containing » the duct in two subsequent portions of its course, also showing nuclei *n*, *n*, in their » walls. » P. 483, *op. cit.*, 1884

comme pour les autres, dans la dernière partie de notre travail.

Passons à la description de l'organe chez d'autres espèces.

Dans le genre *Hirudo,* l'auteur croit avoir trouvé enfin « l'entonnoir » que tous ses devanciers et lui-même jusqu'ici avaient nié. Il le représente en *a*, fig. 10.

A la suite de cet « entonnoir », dit l'auteur, se présente une masse spongieuse avec des canalicules très irrégulièrement arrangés (*b-c*, fig. 10). Dans la portion suivante, *c-d*, qu'il appelle « le lobe principal », le canal, venant de la première portion *b-c*, acquiert des canalicules latéraux, ramifiés d'une façon remarquable. Ces ramifications cessent en *e;* il n'y a que les portions du canal sans ramifications qui s'avancent jusqu'en *g*. A ce point *g* commence le canal collecteur qui, après bien des détours, arrivera à la vésicule.

En nous guidant sur le schéma de la figure 10 et sur les sections représentées par l'auteur dans les petites figures qui l'accompagnent, le lecteur saisira d'une manière très facile les idées de Bourne.

La portion *b-c* contient peu de cellules en épaisseur, et beaucoup en longueur. Ces cellules sont creusées de canaux de calibre assez forts, anastomosés entre eux, mais sans ramifications plus fines à l'intérieur des cellules.

C'est dans la portion de *c* en *d* que Bourne, outre les canaux assez larges et communiquant entre eux de distance à distance, trouve dans les cellules des ramifications nombreuses de canalicules qui se réunissent et se jettent dans le canal le plus fort de chaque cellule.

Cette ramification cesse en *e*. A cet endroit, notre auteur fait confluer en deux troncs toute la canalisation anastomosée du « lobe principal ». Nous les voyons, de *e* en *f*, représentés par les deux traits noirs qui longent le canal plus large du milieu de cette portion *e-f*.

De *f* à *g* la structure rappelle celle de la portion *b-c*. Il y a des canaux (trois ?) parallèles et anastomosés entre eux à maint endroit.

L'auteur indique pour cette partie l'absence des ramifications en arbrisseaux de la partie précédente, de *c* en *d*.

Au point *g*, Bourne fait concourir tout ce qu'il y a de canaux formés jusqu'ici en un seul canal de dimension plus considérable, le canal central.

Ce canal central commence à s'avancer en sens inverse des canaux qui lui ont donné naissance. De *g* il revient en *f*, et constitue déjà dans ce trajet un « recurrent-duct ». Néanmoins la portion *f-e* a reçu le nom de « recurrent-lobe », parce que là il y aurait, selon l'auteur, la plus simple structure des deux courant opposés.

En *e* le canal central s'engage entre les cellules du « lobe principal »; il le quitte près de *c*, pour sauter brusquement dans le lobe qui l'a vu naître en *g*. S'insinuant entre les cellules de ce lobe, il le parcourt de nouveau d'un bout à l'autre, parallèlement au premier trajet.

Arrivé en *f*, le canal fait encore un bond, et va s'engager dans la portion cæcale, *d*, du « lobe principal ». Ce lobe est traversé aussi, pour la deuxième fois, dans toute sa longueur, par le canal central, qui enfin, en *h*, le quitte définitivement pour se diriger vers la vésicule terminale.

Quelques détails importants nous sont encore révélés par les coupes de plusieurs endroits de l'organe.

La figure 11 représente une coupe suivant la ligne C-D de la figure 10. Le petit îlot à droite est la coupe du « recurrent-lobe ». Une assise de cellules à canaux circulairement anastomosés entoure le canal central, qui revient de plus haut.

Le canal central a sa paroi propre formée de cellules perforées, et placées bout à bout. Le noyau *n*, dans la paroi du canal central, est là pour témoigner de l'*intracellularité* du canal.

A gauche se trouve la coupe de la partie cæcale, *d*, du « lobe principal ».

Le canal central, revenant pour la deuxième fois de la partie supérieure, se distingue nettement, avec sa paroi propre, au centre d'une assise de cellules, simple d'un côté, double de l'autre. Dans ces cellules-ci nous rencontrons les ramifications terminales en même temps que les canaux communiquant de cellule à cellule.

La figure 12 nous montre la disposition du « lobe principal » sectionné suivant la ligne A-B. Les deux coupes du canal central, dans ces deux trajets successifs du lobe, sont entourées chacune d'une assise de cellules à canaux anastomosés et à ramifications. Les deux figures 10 et 12 s'accordent à donner *une* assise de cellules autour du chaque coupe du canal central. En outre, ce canal central semble très indépendant de cette assise, et passe librement comme par un manchon.

La figure 13 prouve que la partie terminale du canal central est dépourvue de manchon, et que la lumière du canal est *intracellulaire;* témoin encore le noyau *n*, présent dans la paroi du canal.

Au point *j*, fig. 10, le canal débouche dans la vésicule urinaire.

Bourne est d'avis que cette vésicule et le conduit depuis celle-ci jusqu'à la surface du corps ne demandent pas de description détaillée ; seulement il ajoute une remarque, c'est que la cavité de cette région est tapissée de nombreuses cellules ciliées.

L'*Aulastomum*, l'*Haemopis* et l'*Haemadipsa* présentent tous, d'après l'auteur, la même anatomie générale que l'*Hirudo*, sauf quelques détails secondaires.

La *Nephelis* et la *Trocheta*, dit-il, ont des organes segmentaires semblables à ceux des *Gnathobdellides* que nous venons de passer en revue. Cependant la structure, ajoute-t-il, est légèrement simplifiée pour quelques détails. Ces quelques détails ne sont pas indiqués. La différence capitale, d'après l'auteur, se trouve dans « l'entonnoir », qui a une autre structure et une autre position que chez les genres précédents.

Des conclusions générales de l'auteur nous relevons encore certains points intéressants. D'abord, les diagrammes de l'organe entier de l'*Hirudo* et de la *Clepsine*, rendus dans nos figures 15 et 16. L'auteur appelle l'attention sur la portion *d*, figure 15, correspondant à la partie *d* en forme de cæcum de la figure 10. Il croit y trouver probablement l'indice d'une formation régressive. Les organes segmentaires auraient été autrefois réunis d'un segment à l'autre, comme cela se voit, dit-il, encore aujourd'hui dans la *Pontobdella* ; et la partie *d* rappellerait cette disposition.

La structure la plus simple, d'après l'auteur, est celle de l'organe de la *Clepsine*, figure 16. Ici le diagramme se réduit à un canal simple, portant quelques ramifications à la partie supérieure.

L'organe segmentaire, d'une manière générale, s'ouvre dans l'espace cœlomique d'un côté, et, de l'autre côté, à l'extérieur. La lumière du canal est creusée dans l'intérieur des cellules; elle est *intracellulaire* et ininterrompue.

Dans la vésicule et, peut-être, dans « l'entonnoir », dit l'auteur, la cavité est intercellulaire. Dans quelques régions les cellules sont creusées de ramifications qui s'anastomosent avec le canal principal de la cellule.

IX. Leydig. — Dans un article du *Biologisches Centralblatt* du 18 août 1890, Leydig revendique pour lui la priorité de bien des détails de l'anatomie et de la cytologie des organes segmentaires des Hirudinées. Guidé par les citations de ses ouvrages antérieurs que l'auteur a eu l'obligeance d'indiquer dans cet article, nous avons prouvé : 1° que Leydig, dans ses publications successives, a complètement changé d'avis sur la question de la structure de l'*Haemopis*, qui est surtout le point de litige entre lui et nous; et 2° que, jusque dans ses dernières publications, citées par lui-même dans cet article, il n'a pas reconnu la nature *intracellulaire* du canal central de l'organe segmentaire de l'*Haemopis*. (Voyez *Nouvelles recherches sur la structure des organes segmentaires des Hirudinées*, dans La Cellule, t. VII, fasc. 1, pp. 44-59.)

MÉTHODES DE PRÉPARATION.

Dans toutes les espèces d'Hirudinées, mais principalement chez la *Nephelis* et les *Clepsines*, les organes segmentaires étant d'une délicatesse extrême, l'extirpation et la dissociation à frais est très nuisible à des observations exactes. Par ces opérations, toutes les parties sont dérangées, disloquées et souvent endommagées.

Nous avons employé une autre méthode : elle est laborieuse et longue, mais elle est sûre. C'est la méthode des coupes en séries.

Ces coupes ne doivent pas être faites dans des organes retirés de l'individu : il faut les faire dans des organes maintenus en place, c'est-à-dire dans le corps même de l'animal. Alors seulement il y aura une véritable *inspectio in loco*. Ce qu'on observera de cette façon sera bien autrement exact que dans n'importe quel autre traitement.

Voici comment nous avons procédé :

Pour les petits individus de quelques millimètres jusqu'à 1 ou 2 centimètres, on se sert du corps entier; pour les grands, on le coupe en tronçons convenablement petits.

Ces individus ou ces tronçons sont fixés et durcis en même temps par une liqueur appropriée; nous nous servons de préférence de la liqueur mercurique de Gilson.

Les matériaux, colorés ou non, sont enrobés dans la paraffine. Puis on les débite en coupes microscopiques.

En composant dans la mémoire ou, mieux encore, sur le papier, par des dessins suffisamment exacts, les aspects des sections pratiquées dans un bon nombre d'organes segmentaires, la structure vraie se découvre à la fin.

Pour plus de garantie, les sections doivent être faites dans les trois directions de l'*organe* ou, ce qui revient au même dans notre méthode qui prend des individus entiers, dans le sens transversal et dans le sens de la longueur de l'animal suivant deux directions perpendiculaires.

C'est ainsi que nous avons opéré sur un grand nombre d'individus de toutes les espèces dont ce mémoire traitera.

D'ordinaire nous débitons d'abord l'individu enrobé, en tranches suivant la longueur, commençant par le bord latéral jusqu'à la ligne médiane. Puis, tournant le bloc de paraffine, nous coupons la moitié restante en sections transversales depuis la partie buccale jusqu'à la moitié de la longueur. Le dernier quart qui reste est coupé horizontalement.

Puisque les organes segmentaires se retrouvent identiquement dans les segments successifs, placés par paires, à gauche et à droite de la ligne médiane, on obtient de la sorte les coupes dans les trois directions sur un seul individu; ce qui peut avoir un avantage réel.

Quant on se figure que souvent un organe segmentaire s'étend dans les trois dimensions sur plusieurs millimètres, et que leur nombre peut dépasser une dizaine de paires; ensuite qu'un millimètre est débité parfois en quatre-vingts on cent tranches, on pourra se former une idée des milliers de coupes qui ont servi aux observations dont les conclusions sont déposées ici.

La plupart des préparations sont conservées dans nos collections, et pourront servir à l'occasion comme pièces de conviction pour ce que nous avancerons.

Il va de soi que nous n'avons pas négligé la pratique des dissociations. Celle-ci nous sert de contrôle pour constater sur l'objet à frais que les détails des pièces durcies et sectionnées ne sont pas des formations artificielles et accidentelles.

Un mot sur les figures qui accompagnent nos descriptions. Dans cette étude d'*anatomie*, nous nous sommes contenté de donner des contours; nulle part nous ne représentons des détails *cytologiques* comme tels. Quiconque voudra entrer dans l'étude de la constitution *des cellules* et de leurs parties constituantes, pourra consulter nos mémoires sur la *cytologie* des organes segmentaires, publiés dans la revue La Cellule (t. V, fasc. 2, et t. VII, fasc. 1). Là on trouvera bon nombre de figures avec toutes les particularités de structure dont nous reproduisons ici les simples contours, souvent encore légèrement schématisés.

Cette remarque tend à prévenir le lecteur qu'il ne doit pas juger de certaines questions d'après des figures qui ne sont pas faites en vue de ces questions.

Nos mémoires dans La Cellule, avec les figures qui s'y trouvent, traitent des questions *cytologiques;* ce mémoire-ci et ses figures ne touchent qu'à la question *anatomique*.

DIVISION DES ESPÈCES EXAMINÉES.

L'ordre dans lequel les Hirudinées seront examinées dans ce mémoire est tiré des *types* que nous avons reconnus chez les divers genres, par rapport à l'organe segmentaire.

La division, d'après ces *types*, est celle-ci :

I. Les grandes Hirudinées d'eau douce ;

II. Les petites Hirudinées d'eau douce.

Le premier groupe contient trois espèces de *Gnathobdellides* examinées par nous. Cependant nous ne saurions donner à ce groupe le nom de *Gnathobdellides,* puisque la *Nephelis* est comptée parmi ceux-ci par les zoologistes. Et pour nous, la *Nephelis* a un organe segmentaire d'un *type* profondément différent de celui des véritables *Gnathobdellides.* Puisque, au contraire, le *type* de l'organe chez les *Clepsines* et les *Hemiclepsis* (*) est très rapproché de celui de la *Nephelis,* nous la rangeons dans le même groupe que celles-ci.

Cette classification, par conséquent, nous défend de nommer *Rhynchobdellides* le deuxième groupe ; car, quoique toutes les *Clepsines* et les *Hemiclepsis* possèdent des trompes protractiles, il n'en est pas ainsi de la *Nephelis,* qui ne possède ni mâchoires à dents ni trompe.

(*) Nous avons trouvé le nom d'*Hémic'epsis* appliqué par Vejdovsky à deux espèces appelées communément *Clepsines,* la *H. tessulata* et la *H. marginata.* Avec ce savant, nous trouvons la structure de ces deux espèces tellement différente de celle des *Clepsines,* que nous préférons les en séparer par le nom donné par le savant Bohémien. Quoique la différence entre ces deux espèces soit encore si profonde qu'elles mériteraient des noms *génériques* divers, nous nous en tiendrons pour le moment au nom commun d'*Hemiclepsis* qu'il leur a donné.

CHAPITRE PREMIER.

Description anatomique des organes segmentaires.

I. Grandes Hirudinées d'eau douce.

A. *Hirudo medicinalis*. B. *Aulastomum gulo*. C. *Haemopis vorax*.

L'organe présente à peu près la forme extérieure de la figure 17, quand on l'observe à l'œil nu ou à un faible grossissement, après la dissection de l'animal.

C'est un organe assez nettement limité et compact, plongé dans le tissu conjonctif. Les deux extrémités se rapprochent ordinairement et présentent toutes les deux un aspect effilé.

Il y a trois parties à distinguer :

a) La partie supérieure, à canaux en treillis (figure 17, *a*).

b) La partie moyenne, à canaux en treillis, entourant le canal collecteur ou central, *b*, *c*, *d*.

c) La partie inférieure, à canal collecteur, sans canaux en treillis, *e*.

La partie supérieure de l'organe *a* est située près des testicules. De là l'organe croît en grosseur ; vers le milieu *c* elle est la plus grande, pour diminuer ensuite jusqu'à la partie terminale *e*.

Chez l'*Haemopis vorax*, l'arrangement des détails varie un peu. Mais comme la structure est typiquement la même, nous ne la séparons pas des deux autres espèces.

a) Partie supérieure *a* de la figure 17.

La figure 18 représente une coupe faite dans la partie la plus effilée, *a*, de la figure 17. Les cellules de cette partie sont toutes plus ou moins arrondies, cependant de formes très différentes. Elles se touchent mutuellement, mais sur une étendue variant de cellule à cellule. Elles laissent entre elles des interstices. Ces interstices sont occupés par le tissu conjonctif et par un réseau de capillaires sanguins. Ce réseau n'occupe donc pas

seulement la surface de l'organe, mais il le sillonne aussi dans toutes les directions.

La partie supérieure de l'organe ne contient à l'intérieur des cellules que des canaux assez étroits, que nous avons nommés les *canaux latéraux*, *cl*, parce qu'ils constituent les branches latérales du canal *collecteur* ou *central*, comme nous verrons après.

Les petits canaux de cette partie sont *intracellulaires*, et passent d'une cellule à l'autre à l'endroit où celles-ci se touchent. Et puisqu'il y a des anastomoses de tous les côtés entre les canaux des diverses cellules, il en résulte un magnifique *treillis*, occupant toute la partie supérieure de l'organe.

Les origines de ces canaux *en treillis* se trouvent dans ces cellules mêmes.

Pour étudier ces origines, il faut examiner avec un fort grossissement une des nombreuses cellules que chaque coupe de cette partie présente toujours.

Nous en donnons un exemple dans la figure 19.

On y reconnait une espèce d'arbrisseau dont les ramuscules terminaux, *rt*, se trouvent surtout à la circonférence de la cellule. Ces ramuscules, en se réunissant, donnent des rameaux plus forts, qui, à leur tour, produisent, par leur confluence, des branches. Celles-ci, enfin, donnent naissance à un tronc unique, qui va passer de la cellule où il a pris son origine à une cellule voisine, pour s'anastomoser avec le tronc qui se trouve dans celle-ci.

Il est facile de constater que les communications entre ces canaux sont nombreuses; il est impossible, néanmoins, d'y trouver une régularité marquante et un accroissement prédominant de calibre pour quelques-uns des nombreux canaux.

Nous voulons dire par là qu'on ne distingue pas un canal principal, qui puisse être considéré comme l'origine du *canal central* que nous rencontrons dans la seconde partie.

b) Partie moyenne, *b-c-d*, de la figure 17.

Une section de cette partie, de *x* à *y* environ, est donnée dans la figure 20. Cette partie moyenne de l'organe contient d'abord

plusieurs assises de cellules sillonnées de canaux en *treillis*, *cl*. La disposition y est essentiellement la même que dans la partie supérieure. On y trouve les faibles canaux anastomosés, avec leurs origines ramifiées, *rt*.

Cependant une certaine régularité se fait jour : les assises de cellules ne sont plus entièrement désordonnées comme dans la partie supérieure, mais les cellules les plus rapprochées du *canal central* CC rayonnent plus ou moins régulièrement autour de celui-ci. On le constate sans trop de difficultés sur les coupes nettement transversales de ce canal central. La coupe du *canal central* CC, en bas de la figure, le prouve.

Lorsque la coupe est oblique, comme la deuxième de la figure 20, la structure rayonnante des cellules à *canaux en treillis* est presque effacée.

Le détail le plus remarquable de cette partie de l'organe est le *canal central* CC. Il parcourt la portion moyenne en décrivant plusieurs courbes, ainsi que la figure 17 l'indique schématiquement.

C'est à cause de ces courbes que la section microtomique dont nous donnons le dessin dans la figure 20 contient deux coupes de ce canal. En se figurant le canal central montant et descendant alternativement dans le sens vertical à la figure, on se forme une idée exacte de toute cette partie moyenne de l'organe.

A mesure qu'on descend vers l'orifice inférieur de l'organe (figure 17, *d*), les assises de cellules diminuent en nombre; bientôt il ne reste plus qu'une seule assise près de *e*, dont la figure 21, A et B, donne l'image.

C'est d'après ces deux coupes, A transversale, B longitudinale, qu'on se figure le plus facilement la structure du canal central et celle de l'assise environnante de cellules à *treillis*.

La coupe transversale, figure 21 A, montre le *canal central* CC logé dans une cellule *unique* dont il occupe le centre. Le noyau placé à côté du canal élimine le doute sur la pluralité de cellules en forme d'épithélium.

La coupe longitudinale, figure 21 B, met en évidence la suite de cellules parcourues par le canal central CC. Ces cellules sont

placées bout à bout; leur nombre est indiqué par les élargissements du canal, au niveau de passage d'une cellule à l'autre, et, en outre, par le noyau de chaque cellule *n*.

Pour ce qui est de l'*intracellularité* du canal central, il n'y a qu'une seule difficulté qu'on puisse lui objecter. La cellule, *unique* évidemment, qui délimite la lumière du canal CC, n'est-ce pas une cellule *aplatie*, dont les bords se sont recourbés de façon à se toucher et à se souder dans le sens longitudinal du canal? Dans ce cas aussi, nous obtiendrions une série de cellules placées bout à bout, dont chacune entoure à elle seule toute la lumière du canal. Mais le canal, au lieu d'être *dans* la cellule, *intracellulaire*, serait limité par la paroi *extérieure* de la cellule; il serait *hors* de la cellule, *intercellulaire*. Et ceci n'aurait rien d'étonnant, puisque nous savons déjà qu'ailleurs, par exemple dans les tubes de Malpighi des trachéates, la chose se passe ainsi.

Pour répondre d'une manière exacte à cette difficulté, il faudrait entrer dans le domaine de la *cytologie*. Et nous nous sommes proposé de nous abstenir des questions purement cytologiques.

Il ne nous reste donc qu'à renvoyer le lecteur à notre mémoire du 25 décembre 1889, dans la revue La Cellule, tome V, fascicule 2, où cette question est examinée *ex professo*, et où la conclusion est établie, qu'ici la cellule n'entoure pas de sa paroi extérieure, *de sa membrane*, la lumière du canal, mais que celui-ci est réellement creusé dans le *protoplasme*, et qu'il est par conséquent *intracellulaire*.

L'arrangement des cellules environnant le canal central mérite aussi notre attention.

Toutes ces cellules sont appliquées par la base sur la cellule centrale, avec laquelle elles entrent très souvent en fusion au niveau de contact. Elles forment une espèce de manchon autour de la série centrale de cellules.

Entre elles, les cellules du manchon présentent des particularités de relation qui en font un tissu *sui generis*.

Une coupe transversale, aussi bien qu'une coupe longitudinale, montre que ces cellules, sur tout leur pourtour, excepté à la

base, peuvent être entièrement indépendantes les unes des autres, comme le prouvent les coupes A et B de la figure 21.

Mais un canal se présente-t-il passant d'une cellule à l'autre, aussitôt nous voyons les deux cellules voisines se toucher, s'accoler sur une surface plus ou moins étendue et livrer ainsi un passage au canal.

Remarquons à cet endroit que les cellules ne contiennent jamais plus d'*un* canal qui passe à la *même* cellule voisine; en d'autres termes, que la communication entre deux cellules est toujours *unique*.

Ensuite, les cellules ne portent pas de prolongements pour effectuer le passage du canal, mais elles sont en contact immédiat.

Enfin, dans une seule cellule on ne rencontre pas *deux* ou plusieurs tronçons de canal *indépendants*, mais tous les tronçons de canaux que contient *une* cellule appartiennent à un *système unique*, communiquant par des anastomoses, soit que ces canaux aient pris naissance dans cette cellule même, soit qu'ils lui arrivent de cellules voisines. Ce détail se voit clairement dans les figures 18, 19 et 20.

L'endroit que nous avons représenté figure 21 B montre un détail important : c'est la communication directe, *em*, du réseau de canaux *en treillis* avec le canal collecteur central.

Quoique nous n'ayons pas réussi à constater *de visu* cette même communication dans la partie moyenne, à plusieurs assises de cellules, il ne serait pas raisonnable de nier son existence, puisqu'elle existe dans la partie à assise simple, et que cette partie ne diffère en rien de l'autre, si ce n'est par le nombre d'assises cellulaires.

Une autre conclusion qui en découle, c'est que le nombre de ces communications est fort restreint; s'il en était autrement, les points de communication se seraient présentés plus fréquemment dans les milliers de coupes qui ont passé sous nos yeux.

c) Partie inférieure *e* de la figure 17.

Déjà dans la figure 21, A et B, le manchon du canal collecteur était réduit à une seule assise de cellules. Descendant encore

vers l'orifice de l'organe segmentaire, nous rencontrons bientôt le canal collecteur dénué de tout entourage glandulaire et poursuivant seul son cours à travers le tissu conjonctif.

La figure 22, CC, représente le bout extrême qui se jette dans la vésicule urinaire V.

La nature du tissu qui forme la paroi du canal se dévoile ici dans toute sa simplicité admirable.

Pour former la paroi tout *autour* de la lumière du canal, il n'a fallu qu'*une seule cellule*. Et l'étude comparée des coupes longitudinales et des coupes transversales de CC, figure 22, ne laisse aucun doute sur la parfaite *intracellularité* du canal collecteur.

De cette structure du canal central CC, par une série de cellules perforées et placées bout à bout, la conséquence immédiate est que *tout* cet organe segmentaire, si volumineux et si compliqué, est mis en relation avec la vésicule *par une cellule unique*, CP, la dernière de la série, qui permet au canal collecteur de s'ouvrir librement dans la cavité vésiculiforme V. A cette cellule importante, qui soutient en quelque façon tout l'édifice segmentaire, nous avons donné le nom de *cellule porte*.

La disposition des parties constituantes de l'organe segmentaire chez l'*Haemopis vorax* s'éloigne quelque peu de celle que nous avons indiquée chez l'*Hirudo medicinalis* et l'*Aulastomum gulo*.

Tout l'organe ne forme pas une masse aussi compacte, aussi ramassée. Cela tient à ce que le canal collecteur n'est nulle part entouré de plus d'*une assise* de cellules. Il se présente sous l'aspect que nous avons trouvé dans la partie moyenne extrême, entre *d* et *e* (figure 17) des deux espèces mentionnées plus haut, et dont la figure 21 A et B représente la structure.

Il s'ensuit que l'organe, dans l'*Haemopis vorax*, est plus déroulé et plus sinueux que dans les deux autres espèces.

La conséquence nécessaire de cette assise *unique* est aussi que le réseau des canaux en treillis est moins riche, puisque les communications ne peuvent s'effectuer que dans la direction de la longueur et dans celle du pourtour du canal central. Les communications dans la direction normale à l'axe du canal collec-

teur sont forcément exclues par l'absence de plusieurs assises dans ce sens.

C'est la seule différence que nous ayons pu constater. Pour tous les autres détails, l'anatomie de l'organe segmentaire de l'*Haemopis vorax* est en parfait accord avec celle des deux espèces que nous venons d'examiner.

d) *Vésicule urinaire.* — Nous pourrions nous arrêter ici. Cependant l'organe complémentaire du système excrétoire, la vésicule urinaire, est intimement uni à l'organe décrit, et, en outre, il nous a révélé un détail important qui a échappé jusqu'ici à l'œil scrutateur de nos devanciers. Ces raisons nous semblent suffisantes pour donner brièvement l'anatomie de la vésicule, comme appendice naturel de l'anatomie de l'organe segmentaire.

La vésicule urinaire, dans les grandes espèces qui nous occupent à présent, est très volumineuse, ainsi qu'on le voit clairement par notre figure 22 V. C'est une cavité creusée dans le tissu conjonctif, et qui s'étend jusqu'à la surface ventrale de l'animal, en traversant les couches musculaires.

Toute cette cavité est revêtue d'un épithélium à cellules arrondies (figure 22, *ep*). Ces cellules ne portent pas de cils vibratiles. Elles occupent en profondeur une seule assise. Seulement, à l'endroit où entre le canal collecteur CP, on observe un bourrelet formé généralement par une assise double de cellules épithéliales.

La vésicule présente toujours une partie renflée qui en occupe la portion supérieure V'. Avant d'arriver à l'extrémité inférieure, on rencontre souvent un rétrécissement local. Puis la cavité s'élargit de nouveau, et on obtient ainsi l'aspect d'une seconde vésicule V'', toujours beaucoup plus petite que la première. Les deux divisions communiquent alors par une faible lumière.

Cette seconde partie va en s'amincissant vers la surface du corps, et finit par un pore *p*, qu'il est difficile de distinguer sur le vivant, même avec une bonne loupe. En effet, la position de ce pore est telle qu'il se cache facilement, dès que l'animal se contracte tant soit peu. La figure 17 montre le pore *p*, non pas



sur le bourrelet d'un anneau extérieur, mais dans le sillon qui sépare deux anneaux consécutifs. Il faut par conséquent que l'animal soit entièrement étendu pour qu'on puisse voir ce pore sur le vivant.

La vésicule tout entière est-elle contractile? Voilà une question à laquelle les auteurs répondent en général affirmativement.

Notre attention a été attirée spécialement sur ce détail. Nous allons donner les résultats de nos recherches.

Une coupe dans n'importe quelle direction, affectant la vésicule et les parties avoisinantes, offre toujours une quantité de cellules musculaires, placées à quelque distance de l'épithélium de la vésicule. De ces cellules, les unes sont coupées transversalement, les autres longitudinalement; par exemple *m*, *m*, dans la figure 24.

Mais l'étude comparée de toutes les coupes, faites dans des directions diverses, prouve toujours que ces cellules musculaires appartiennent au système moteur du corps. Ce sont des muscles longitudinaux, ou transversaux, ou verticaux, qui passent à côté de la vésicule, mais qui ne sont pas constitués en *système particulier* pour donner du mouvement à sa paroi.

Outre ces cellules musculaires éparses le long de la paroi, nos recherches ont dévoilé une série de cellules musculaires, *sph*, figure 22, placées plus près de la paroi que les autres. En coupe, ces cellules sont beaucoup plus petites que les cellules musculaires en général du même individu; voyez la figure 24.

On voit ces cellules, dans notre figure 22, échelonnées le long de la partie rétrécie de la vésicule, sur une faible longueur.

La proximité de la paroi de la vésicule et la répartition régulière sur les deux bords de la cavité permettent déjà de soupçonner que ces cellules musculaires sont en relation plus intime avec elle que toutes les autres.

Cela se vérifie complètement si, à côté de la coupe longitudinale, figure 23, nous examinons la coupe transversale, figure 24. En effet, cette dernière figure présente des fibres musculaires *sph* qui entourent la paroi de la vésicule V.

La parfaite harmonie entre les détails des deux figures 23 et 24 est établie quand nous ajoutons que ces fibres circulaires se

retrouvent dans un *petit* nombre de coupes transversales, et que ni plus haut, ni plus bas, il n'y a rien qui indique des muscles dont la disposition soit en relation directe avec la vésicule.

Nous nous trouvons donc devant un *système particulier*, spécialement destiné à fonctionner pour la vésicule. Ce système constitue un véritable *sphincter*.

Ce *sphincter* rétrécit ou élargit le col de la vésicule.

Il s'ensuit que l'*évacuation* des matières n'est pas *continue* dans ces espèces d'Hirudinées, mais qu'elle est *intermittente*.

Par cette particularité, les grandes Hirudinées d'eau douce se rapprochent des animaux supérieurs.

II. Petites Hirudinées d'eau douce.

A. *Nephelis vulgaris* ou *octoculata*.

Cette espèce d'Hirudinée, nous l'avons remarqué, est indiquée dans les classifications comme appartenant à la famille des *Gnathobdellides*, à la suite de l'*Aulastomum*. Seulement les dents font défaut, dit-on, et les mâchoires ne sont que des plis longitudinaux sur le pharynx.

Nous ne nous arrêtons pas à examiner si la place qu'on a assignée à la *Nephelis* est bien justifiée; d'après l'anatomie de l'organe segmentaire, elle s'éloigne totalement des grandes espèces que nous venons de passer en revue et s'approche singulièrement des *Clepsines*.

1° *Vue d'ensemble de l'organe segmentaire de la* Nephelis vulgaris (fig. 25).

Une vue d'ensemble de l'organe segmentaire était facile à donner pour l'*Hirudo medicinalis* et les espèces voisines; car, déjà à l'œil nu, on voit un corps compact et bien limité, tel que le représente la figure 17.

Chez la *Nephelis vulgaris*, nous nous trouvons arrêté par la structure, particulièrement délicate, de l'organe. Un ruban de

l'épaisseur d'une seule cellule le constitue. Ce ruban est très long et s'insinue entre les autres tissus du corps; il est comme un peloton de fil désordonné, enchevêtré, enlacé de toute façon.

Pour le débrouiller et pour donner un schéma tant soit peu exact de l'organe, il faut des circonstances particulièrement favorables.

La partie du corps la plus propre à cette fin est sans contredit le segment qui précède les orifices sexuels. La raison en est bien simple. Dans les segments postérieurs à ces orifices, les diverticules de l'intestin et les lobes testiculaires, développés outre mesure et très nombreux, resserrent les circonvolutions de l'organe segmentaire dans un espace excessivement réduit; il est presque impossible de le débrouiller dans ces circonstances.

Le segment antérieur aux orifices sexuels ne possède ni testicules ni diverticules de l'estomac. Il n'y a rien qui s'oppose à ce que l'organe segmentaire se déploie librement entre les fibres musculaires et le vaisseau sanguin. Cette circonstance a décidé notre choix.

Dans ce segment, nous avons examiné une série non interrompue d'une vingtaine de coupes pratiquées dans un sujet fixé en entier. Les coupes avaient une épaisseur de 10 μ; elles étaient verticales et faites dans la longueur de l'animal.

Les dessins de ces vingt coupes ont été superposés, allant de l'extérieur à l'intérieur. Chacune des coupes ne contient que des tronçons de l'organe; mais elles se suppléent mutuellement et produisent par leur réunion un fil *continu*.

C'est cette reconstruction que nous représentons dans la figure 25. Les faibles dimensions du dessin nécessitent une simple représentation de contours.

Il va sans dire que cette figure n'a pas la prétention de donner la forme *extérieure constante* de l'organe; la forme extérieure change selon les dispositions des organes environnants dans les divers segments.

Seulement, l'idée générale d'un fil ou ruban circulant dans l'épaisseur du tissu conjonctif est donnée fidèlement et d'après nature autant que possible.

2° *Description de l'anatomie de l'organe.*

Dans cet organe si fantastiquement entortillé, comme le montre la figure 25, CS, les diverses portions ne sont pas juxtaposées sur le vivant avec cette régularité que nous voyons chez l'*Hirudo medicinalis*, figure 17. Il n'y a que les recherches à l'aide des coupes microtomiques en série et l'emploi de grossissements convenables qui révèleront les portions suivantes :

a) La partie supérieure, contenant les ramifications ;

b) La partie moyenne, logeant les canaux définitivement formés ;

c) La partie inférieure, occupée par le canal collecteur.

d) La vésicule urinaire.

Après avoir établi l'existence et la structure de ces trois parties, ainsi que leur relation, nous construirons, par manière de synthèse, un diagramme schématique de l'organe entier.

a) *Partie supérieure.* — En examinant des séries de coupes microtomiques qui contiennent un organe segmentaire complet, nous avons rencontré, après de longues recherches, un petit nombre de coupes dans une cellule où on ne voit, en fait de lumières et de cavités *intracellulaires*, que quelques ramifications. Cette cellule constitue l'extrémité intérieure de l'organe.

L'observation patiente et minutieuse de toutes les coupes qui affectent une pareille cellule conduit toujours à la conclusion que ces ramifications sont en communication les unes avec les autres, que c'est un *système* de cavités. La superposition et reconstruction de l'ensemble des coupes prouve que de ces cavités résulte un *canal intracellulaire*.

La figure 26, produit d'une pareille superposition, montre les ramifications *rt* et le canal C^1 auquel elles donnent naissance. Si nous suivons la série de cellules que parcourt ce canal C^1, nous trouvons bientôt, à côté de celui-ci, un nouveau système de ramifications en tout égal au premier système. La figure 27 donne une coupe transversale de l'endroit où ce deuxième système *rt* se présente à côté du premier canal C^1. Ce deuxième

système de ramifications donne naissance à un *deuxième canal* indépendant du premier et s'avançant de pair avec lui d'une cellule à l'autre; la figure 28 montre *deux* canaux, C^1 et C^2.

Indépendamment de ces *deux canaux*, il se rencontre un troisième système de ramifications *rt* dans la figure 28. De celui-ci résulte un *troisième canal* qui s'avance à côté des *deux autres*, mais toujours à l'intérieur d'une assise *unique* de cellules; la figure 29 présente *trois* sections de canaux, C^1, C^2, C^3.

Lorsque le troisième système de ramifications s'est fondu dans un canal définitivement formé, nous ne trouvons plus nulle part un nouveau système de ramifications, ni pour former un quatrième canal, ni pour se réunir à un des canaux existants.

Là donc où cesse le troisième système, nous nous trouvons sur la limite de ce que nous avons nommé la partie supérieure de l'organe segmentaire de la *Nephelis vulgaris*.

Nous avons préféré donner des sections *transversales* du ruban segmentaire dans cette région d'origine. Les figures sont plus saisissables et plus faciles que les coupes *longitudinales*. D'ailleurs, nous aurons à nous occuper de ces dernières dans la portion que nous allons examiner à présent.

b) *Partie moyenne.* — La partie moyenne de l'organe segmentaire de la *Nephelis vulgaris* est de beaucoup la plus volumineuse. Elle s'étend depuis les cellules, peu nombreuses, de la partie supérieure jusque près de la vésicule. Elle comprend les centaines de cellules placées bout à bout, qui réunissent la partie supérieure à la partie inférieure, c'est-à-dire qu'elle constitue, à peu de chose près, tout le ruban représenté dans la figure 25, CS.

Toutes les coupes de cette partie moyenne présentent toujours *trois* lumières de canaux, figures 29, 30 et 31.

La question de l'*unicité* de la cellule dans laquelle se trouvent réunis les *trois* canaux est assez facile à résoudre.

Examinez une coupe microtomique, pratiquée dans un individu enrobé en entier dans la paraffine. Vous y rencontrez des sections sans nombre du ruban segmentaire, surtout si vous avez soin de prendre un très jeune individu, ou de couper la partie du corps qui précède les orifices sexuels.

Toujours, à quelques rares exceptions près, à l'intérieur de la limite membraneuse qui circonscrit le protoplasme longeant les *trois* canaux, vous trouverez *un seul* noyau *n;* voyez figures 29, 30 et 31.

Pour s'assurer que d'autres noyaux ne se trouvent pas dans une partie du territoire que ne contient pas la coupe présente, il faut scruter toute la série de coupes affectant toute la profondeur du ruban segmentaire.

Cet examen vous conduit constamment à la conclusion que, dans l'épaisseur d'une portion de protoplasme contenant les *trois canaux,* et visiblement limitée par une membrane *extérieure unique,* le noyau est *unique* également (figure 31).

Il y a un autre argument pour cette *unicité* de la cellule à trois canaux.

Une section *transversale* du ruban segmentaire, telle que la représentent les figures 29 et 30, nous montre le noyau *n* à un endroit qui semble indifférent. Le noyau se trouve rejeté tantôt d'un côté, tantôt de l'autre, souvent très près de la périphérie. On se figurerait aisément que, dans une section supérieure ou inférieure à celle qu'on examine, il pût se trouver encore un autre noyau qui indiquerait ainsi l'origine *multicellulaire* de l'assise apparemment unique dans l'épaisseur de l'organe.

Cette hypothèse, cependant, ne saurait se maintenir vis-à-vis de ce que présentent les coupes *longitudinales* d'un tronçon de l'organe.

Ici, figure 31, la place du noyau paraît bien plus déterminée que dans une section transversale. C'est toujours vers la moitié de la longueur du territoire que se rencontre le noyau *n.*

Le déplacement du noyau, lorsqu'il a lieu, est donc seulement *latéral.* Ce sont les cavités *intracellulaires,* les *canaux* qui, en se formant, repoussent le noyau sur le côté de la cellule. C'est là un phénomène très fréquent; il se voit presque partout où surgissent des *vacuoles.*

A la vérité, dans beaucoup de tissus, par exemple le tissu graisseux, les vacuoles se forment à la fois dans plusieurs endroits d'une cellule et peuvent, en grandissant, repousser le noyau en

un point quelconque de la périphérie; mais dans la *Nephelis vulgaris*, les canaux segmentaires, suivant toujours plus ou moins l'axe des cellules, n'exercent sur le noyau d'autre influence que de le déplacer dans un plan transversal.

Dans le cas exceptionnel de *deux* noyaux présents dans une seule cellule, tous les deux occupent à peu près le même plan *transversal* de la cellule segmentaire; ils sont tous les deux au milieu de la cellule. Jamais, dans une section *longitudinale* d'une cellule, deux noyaux ne se trouvent rejetés chacun à une extrémité de la cellule.

La limite *latérale* des cellules est assez évidente : c'est la limite même qui circonscrit l'épaisseur d'une coupe de l'organe, comme le montrent à divers niveaux les figures 27, 28 et 29.

La limite *transversale*, entre deux cellules consécutives, est moins nette. Cependant il y a assez d'indices irrécusables de son existence.

Une section *longitudinale* d'un tronçon de l'organe, tel que celui de la figure 31, montre très souvent un *rétrécissement, re*, sur les deux côtés du ruban. Si la coupe affecte en même temps les canaux que la figure 31 représente schématiquement dans *un seul* plan, et que l'on mène une ligne droite par les deux rétrécissements extérieurs *re*, on est sûr de rencontrer la dilatation des canaux à leur plus grande largeur. Cette ligne, par conséquent, indique l'endroit où, à l'origine, se trouvait la membrane; elle indique donc la limite *transversale* de la cellule (*).

Les *trois* canaux s'avancent parallèlement, en passant d'une cellule à l'autre. Pendant tout le trajet dans la partie moyenne, ces trois canaux sont *indépendants* l'un de l'autre : il n'y a nulle part une communication, une anastomose entre eux. La figure schématique 31 donne l'idée de la structure de la partie moyenne de l'organe.

(*) On aura remarqué que, en traitant l'anatomie de l'organe segmentaire de la *Nephelis*, nous nous occupons beaucoup de la *cellule;* et cependant ce n'est pas de la cytologie que nous faisons. Mais comme le *tissu* de cet organe est un tissu complètement *sui generis*, ne consistant qu'en une suite de cellules placées bout à bout, il était nécessaire, en faisant l'*histologie* de cet organe, de traiter des *cellules*.

Examinons de plus près cette figure 31 ; elle peut nous renseigner sur tout ce qu'il y a d'important dans la longue série de cellules de cette partie moyenne.

Sur toute son étendue, la structure est typiquement identique. Partout on voit une cellule précédente A, unie par la base à une cellule suivante B, et celle-ci unie de la même façon à la cellule qui la suit C, et ainsi de suite.

Comme nous venons de le dire, la séparation des cellules successives est accusée par les rétrécissements *re.*

Chaque cellule de *toute* la série présente *trois* lumières de canaux.

Pour s'assurer de ce fait, les coupes *longitudinales* du ruban segmentaire sont moins aptes que les coupes *transversales.* Cela se conçoit aisément. Que le lecteur veuille jeter un coup d'œil sur les figures 29 et 30. Ce sont, toutes les deux, des sections *tranversales* des cellules cylindriques qui constituent la série. Qu'on se figure maintenant dans ce cylindre une coupe microtomique *parallèle* à l'axe, c'est-à-dire *normale* au plan de ces figures. Dans ce cas, il est très facile de retrouver dans la préparation une section *longitudinale* de l'*un* des canaux, C^1 par exemple. Il sera même très possible que la tranche, taillée dans le cylindre, présente *deux* canaux parallèles, soit C^1 et C^2, soit C^1 et C^3, soit C^2 et C^3. Mais pour peu que les coupes soient minces — et ce sont là les meilleures, — il sera physiquement impossible de rencontrer du même coup les *trois* canaux gisant dans des plans différents, comme on le voit dans la figure 29.

Il est vrai néanmoins que *toutes* les coupes longitudinales pratiquées dans l'épaisseur d'une cellule contiennent nécessairement les *trois* canaux. Seulement, il faut superposer les figures de toutes ces coupes pour avoir la preuve palpable de l'existence des *trois* canaux. C'est ce que nous avons fait dans la figure 31, en la schématisant légèrement.

Un détail que les coupes *longitudinales,* de préférence aux coupes *tranversales,* révèlent avec évidence, c'est la position *réciproque* des *trois* canaux indépendants.

Ces *trois* canaux C^1, C^2, C^3 ne sont pas exactement parallèles :

ils subissent fréquemment des torsions autour de l'axe de la cellule. De cette façon le canal C^1, par exemple, qui, dans la projection de la partie moyenne de la cellule A, c'est-à-dire vers le haut de la figure 31, occupe l'extrême gauche, passe à la place du milieu au niveau de la cellule B. Dans cette cellule B, il décrit une courbe assez forte, et, à l'entrée de la cellule C, ce même canal C^1 se trouve à la droite.

Il en est de même des deux autres canaux C^2 et C^3, comme le prouve ladite figure.

Les *trois* canaux cheminent de cette manière par toute la série des cellules, qui peuvent atteindre un nombre très considérable.

Nulle part il ne se présente de nouvelles ramifications qui s'uniraient à l'un ou à l'autre des trois canaux ; nulle part non plus ces trois canaux ne s'anastomosent. Ils restent indépendants jusqu'à la troisième partie de l'organe, dont nous allons nous occuper maintenant.

c) *Partie inférieure.* — Les *trois* canaux, indépendants dans la partie moyenne de l'organe, finissent pourtant par se réunir en un seul canal, que nous avons nommé le *canal collecteur*, figure 32, CC.

Ce nom de *canal collecteur* rappelle ce que nous avons dit à propos des grandes espèces, *Hirudo medicinalis*, *Aulastomum gulo* et *Haemopis vorax.*

Il y a néanmoins une grande différence entre le *canal collecteur* de l'organe des grandes espèces et celui de l'organe de la *Nephelis vulgaris.*

Dans les premières, ce canal est long et serpente dans la masse glandulaire, pour recevoir de temps en temps les *canaux latéraux*, qui résultent des *canaux en treillis*, figure 21, *em.*

Ici, au contraire, ce canal est très réduit et prend son origine à l'endroit où les *trois canaux* se réunissent.

Cet endroit est très près de la vésicule V, figure 32, ainsi que nos séries de coupes nous l'ont démontré. Le point de confluence s'est constamment dérobé à nos regards, chez la *Nephelis vulgaris.*

Néanmoins ce point existe, ou, pour être exact, il se peut

qu'il y ait deux points d'union, d'abord pour *deux* canaux seulement, ensuite pour le canal résultant et le canal indépendant restant. Nous y reviendrons en traitant du *canal collecteur* des *Clepsines* (fig. 38).

d) *Vésicule urinaire.* — Comme dans les grandes espèces, nous trouvons aussi dans la *Nephelis* une vésicule V, qui reçoit dans sa cavité le produit de sécrétion de l'organe segmentaire.

Les dimensions de la vésicule, chez la *Nephelis,* sont très inférieures à celles de la vésicule chez les grandes Hirudinées, dont nous avons parlé plus haut.

La forme de la vésicule est plus simplifiée (voyez la figure 32, V). Elle est large en haut et s'amincit de plus en plus vers la face ventrale, sans présenter un second renflement, comme dans l'*Hirudo medicinalis* et ses congénères.

Ce dernier détail s'explique aisément par le fait que, dans la *Nephelis,* toute musculature propre à la vésicule fait défaut. Il n'y a pas de *sphincter* comme dans les Hirudinées précédentes, et par conséquent il n'y a pas de rétrécissement suivi d'un second renflement.

Le revêtement de la cavité vésiculaire est formé par une assise unique de cellules épithéliales, *ep.* L'endroit où la *cellule porte* CP est enchâssée dans cet épithélium n'est pas caractérisé par un bourrelet.

Toutes les cellules de revêtement ont une forme allongée et pointue ; elles sont dirigées vers l'intérieur de la cavité, la pointe en bas. Néanmoins des cils ne se sont pas montrés dans le courant de nos recherches.

Les cellules épithéliales, à la surface de la vésicule, sont la continuation directe des cellules épidermiques, comme le montre la figure 32. La cuticule *cu,* qui couvre le corps de l'animal, cesse à l'entrée du pore inférieur *p.*

3° *Diagramme schématique de l'organe.*

Les résultats de l'examen consciencieux accumulés dans les pages précédentes nous paraissent suffire pour composer enfin

le *diagramme* définitif de l'organe segmentaire de la *Nephelis vulgaris*.

Réduisant à l'état de schéma nos données sur les trois parties constituantes, nous obtenons la figure 33.

La partie supérieure de l'organe, I, est subdivisée en trois sections, selon le nombre des systèmes d'origines ramifiées.

La section *a* représente ce que montrait la figure 26 : c'est la cellule extrême de tout l'organe. Quoique dans quelques cas cette section nous ait paru contenir une cellule *unique*, nous n'entendons par trancher la question de savoir si parfois plus d'une cellule à ramifications ne concourt pas à donner naissance au premier canal, de manière que le deuxième système de ramifications, *b*, ne se présenterait qu'après deux ou trois cellules.

La même remarque porte aussi sur la deuxième et la troisième section, *b* et *c*. Néanmoins nous avons cru permis, dans un diagramme, de représenter ces sections de la manière la plus simple.

Ce n'est pas seulement la clarté qui nous a porté à représenter chaque canal *longeant* les ramifications terminales de celui qui prend plus bas son origine. C'est qu'en réalité les origines sont rejetées typiquement dans une région du protoplasme que n'occupe pas un canal déjà formé, ainsi que le montre surtout la figure 28. Nous y reviendrons à l'occasion des *Clepsines*, où ce détail est plus marqué encore (fig. 34 et 35).

La partie moyenne, II, que nous disons commencer là où les trois canaux sont définitivement formés, s'étend sur presque toute la longueur de l'organe. C'est dans cette partie que chaque cellule présente en coupe *trois* lumières appartenant chacune à un canal spécial.

Nous avons dit plus haut que ces canaux ne sont pas juxtaposés constamment dans la même relation réciproque : le *schéma*, pour la lucidité, les maintient dans une position constante.

Les cellules du tissu, dans toute la partie moyenne, sont allongées dans le sens de la direction des canaux ; dans la section transversale, elles sont circulaires ou aplaties selon que les canaux sont placés sur une ligne ou sur les sommets d'un triangle : voyez les figures 29 et 30.

Entre x-x' et y-y', le pointillé indique qu'il faut intercaler presque tout le ruban segmentaire CS de la figure 25. Toute cette série de cellules présente la répétition de ce qu'on voit dans le diagramme depuis c jusqu'à x-x'.

La partie terminale III est la plus petite de toutes. Elle contient le *canal collecteur*, c'est-à-dire le canal résultant de la confluence des *trois* canaux. Cette partie, que nous indiquons par CP, peut être constituée par la seule *cellule porte* et même par une partie seulement de celle-ci, comme nous le verrons dans la *Clepsine complanata.*

Quant à la *Nephelis*, nous constatons que le canal collecteur est très court, et nous l'avons représenté *schématiquement* dans la seule *cellule porte* CP, sans vouloir préjudicier si, objectivement, il n'y a peut-être pas quelques cellules de plus.

B. *Clepsine et Hemiclepsis.*

Après ce que nous venons de dire sur l'anatomie de l'organe segmentaire de la *Nephelis vulgaris*, nous pourrons marcher plus rapidement dans l'exposition de l'anatomie de ce même organe chez la *Clepsine* et l'*Hemiclepsis.*

Nous avons soumis à l'examen bon nombre d'espèces de *Clepsines : Clepsine complanata, Clepsine bioculata, Clepsine hyalina, Clepsine Carenae, Clepsine* (*Hemiclepsis*) *marginata* et *Clepsine* (*Hemiclepsis*) *tessulata.*

Par rapport à leurs organes segmentaires, toutes se ressemblent si bien que nous les traiterons en même temps, sauf à indiquer quelques petites divergences.

Dans les grandes lignes, leurs organes segmentaires se rattachent au type de l'organe de la *Nephelis.* C'est un organe rubané ou filoïde, *dans toutes les espèces.* Nous avons trouvé encore les *trois* canaux indépendants parcourant de concert la chaîne des cellules qui constituent tout l'organe.

Inutile de redire ce que nous venons de développer sur la structure de l'organe chez la *Nephelis,* sur l'*origine* des *trois canaux* par *trois systèmes* de ramifications indépendants, sur la

division de l'organe en trois régions, selon qu'elles contiennent les origines, les canaux définitivement formés ou le canal collecteur.

Indiquons seulement les détails de ces trois régions qui ne sont pas identiquement les mêmes que dans l'organe de la *Nephelis*.

1° *Des ramifications d'origine.*

Ce ne sont pas toujours de simples ramifications en forme de *canalicules;* mais parfois il y a des *lacunes* ramifiées qui donnent naissance aux canaux, chez les *Clepsines* et les *Hemiclepsis*.

Nous représentons ces lacunes dans la figure 34. Nous en avons trouvé dans plusieurs espèces, comme on peut le voir dans notre mémoire du 6 décembre 1890 (*).

Le fait de l'indépendance des trois origines et l'absence de communication des ramifications avec un canal définitivement constitué a été observé par nous avec la dernière évidence chez la *Clepsine bioculata*.

Les figures 34 et 35 représentent un canal C^1, ayant à côté de lui, dans la même cellule, des lacunes ramifiées *lr*. Les lacunes de la cellule A (figure 34) donnent naissance au premier canal, C^1; celles de la cellule B constituent l'origine du deuxième canal.

Remarquez que les ramifications *lr*, dans la cellule B de la figure 34 et dans les cellules B et C de la figure 35, sont nettement confinées dans la portion opposée à celle où passe le canal C^1. Celui-ci passe donc visiblement *à côté* de ces lacunes, et occupe même une sorte de territoire distinct.

Ce qui prouve mieux encore cette séparation, ce sont les prolongements distincts *prl* par lesquels passent le canal et les lacunes.

Ce détail sera mieux saisi par la description de la particularité intéressante de l'organe segmentaire des *Clepsines* que nous allons donner.

(*) H. Bolsius, S. J., *Nouvelles recherches sur la structure des organes segmentaires des Hirudinées* (La Cellule, t. VII, fasc. 1).

2° *Prolongements des cellules segmentaires.*

Nous avons dit que le mode d'union des cellules qui logent le canal chez la *Nephelis* est la soudure de cellule à cellule, sur toute la surface de contact.

Dans les *Clepsines* et les *Hemiclepsis* ce mode est différent. Les cellules, au lieu de se toucher immédiatement comme dans la *Nephelis,* portent des prolongements qui conduisent les canaux d'une cellule à l'autre.

Prenons comme exemple la figure 36. L'explication de cette figure rendra facile l'intelligence de ce que nous avançons.

La partie A est la portion inférieure d'une cellule qui contient les trois canaux indépendants *a, b, c*; c'est donc une cellule de la partie moyenne de l'organe, d'après ce que nous avons dit sur l'organe segmentaire de la *Nephelis.*

Chaque canal passe séparément à la cellule B. Mais le passage ne s'effectue pas par une simple ouverture pratiquée, dans la surface de contact, par absorption ou toute autre manière de disparition de la membrane.

Pour chacun des trois canaux il existe typiquement un prolongement, une *commissure,* selon l'expression d'Osc. Schultze; et ces trois prolongements, prl^1, prl^2, prl^3, réunissent les deux cellules consécutives A et B.

La longueur des divers prolongements n'offre aucune régularité. Dans l'exemple que nous avons choisi pour la figure 36, les trois prolongements sont de longueurs très différentes, ce dont un seul coup d'œil nous convaincra aisément.

Observons encore la position respective de ces prolongements entre eux. Ils se croisent et s'entortillent pendant le trajet même d'une cellule à l'autre. Peut-être un micrographe, habitué au maniement des objets microscopiques, y verra-t-il un simple accident de préparation. Nous avons de quoi écarter cette supposition. D'abord, il serait bien difficile de redresser les deux cellules A et B de manière à faire marcher les trois prolongements parallèlement : leurs dimensions, tout à fait différentes, s'y opposeraient nécessairement.

[illegible] il y a mieux encore : nous maintenons q[illegible] [illegible] prolongements, telle que nous la des[illegible] [illegible] 36, est la position réelle qu'ils occupaient [illegible] [illegible] à l'endroit où nous les avons trouvés.

Voici les arguments à l'appui de notre assertion : [illegible]

L'organe où nous avons puisé ce détail n'était pa[illegible] dérangé d'une façon quelconque : l'individu a été f[illegible] en entier, de manière à maintenir tout en place à l'in[illegible] corps.

Il est vrai que l'immersion dans la liqueur merc[illegible] Gilson produit une certaine contraction de tout l'anim[illegible] il est impossible qu'une contorsion autour de son axe se [illegible] duite dans un organe qui n'est pas commandé par des [illegible] et dont toutes les parties sont environnées et comme noy[illegible] le tissu conjonctif.

Quant à la reconstruction des douze coupes successiv[illegible] nous ont servi à former cette figure en perspective, nou[illegible] voyons le lecteur à notre mémoire inséré dans le tome V [illegible] La Cellule, fascicule 1 [illegible]. Il y trouvera toute l'explic[illegible] nécessaire avec les figures des douze coupes à l'appui.

En maint endroit nous avons rencontré des prolongem[illegible] plus larges, donnant passage à deux canaux à la fois, ainsi [illegible] le montre la figure 37, entre C et B. Ceci cependant n'affai[illegible] en aucune façon la force de la conclusion que nous voulo[illegible] tirer de l'existence de ces prolongements. La voici : la p[illegible] de trois prolongements nettement séparés, indépendants [illegible] et par conséquent autonomes, prouve l'in[illegible] [illegible] des canaux auxquels ces prolonge[illegible] [illegible] d'une cellule à l'autre.

[illegible] comme dans la figure 33, un pro-[illegible] un autre prolongement pour les [illegible] nous en [illegible] les ramifications et les lacunes d'ori-[illegible] c'est-à-dire que [illegible] qui ne communique pas avec

Si, dans quelques cas, nous rencontrons des communications plus spacieuses entre deux cellules, de manière à donner libre passage à deux canaux à la fois, comme dans la figure 37, il faut y voir une anomalie ou un *lusus naturæ*, qui se présente très souvent dans toute sorte d'organes, surtout là où cet arrangement irrégulier n'entraîne aucun dérèglement dans les fonctions.

Dans l'organe segmentaire qui nous occupe, la structure vraiment *typique* et à laquelle les exceptions doivent être réduites évidemment, c'est le prolongement propre et séparé pour chacun des trois canaux, au niveau de passage de toutes les cellules consécutives qui constituent cet organe.

La différence anatomique la plus profonde que nous ayons pu constater entre l'organe segmentaire de la *Clepsine complanata* et celui de la *Clepsine bioculata*, ainsi que des autres espèces que nous avons énumérées plus haut, consiste surtout dans les dimensions des prolongements dont nous venons de parler.

Partout nous avons constaté le passage indépendant des canaux; mais les prolongements dans les espèces suivantes : *Clepsine Carenae*, *Clepsine hyalina* et *Hemiclepsis tessulata*, étaient en général beaucoup plus faibles, quoique souvent très nettement caractérisés.

Nous nous abstiendrons d'en figurer les preuves, en renvoyant encore le lecteur à nos planches du mémoire du 6 décembre dernier [19].

3° *Canal collecteur.*

Le point de la plus haute importance, et sur lequel nous désirons appeler l'attention, est représenté par la figure 38.

C'est un détail capital qui a échappé à tous nos devanciers.

Abstraction faite de tout ce que nous avons dit précédemment sur la présence des *trois* lumières de canal dans *une seule* cellule, le détail de la figure 38, à lui seul, renverse l'opinion qui admet un canal *unique*.

En effet, que nous apprend cette figure 38 ? Que *le canal collecteur* CC résulte de la confluence de *deux canaux* indépendants, C^1 et C^2. Par conséquent, en supposant même que pour *chaque*

canal indépendant il existe une série de cellules placées boût à bout — ce que nous sommes loin d'admettre, — la figure 38 nous forcerait à dire que pour le moins il y a *deux* canaux parallèles dans l'organe segmentaire des *Clepsines*, et non pas *un seul;* et que ces *deux* canaux se joignent près de la surface du corps pour former un *canal collecteur unique*, CC, qui débouche dans la vésicule urinaire V.

Cette conclusion, basée uniquement sur l'inspection de la figure 38, est déjà en contradiction formelle avec la théorie qui n'admet qu'un *seul canal* pour tout l'organe.

Cependant notre conclusion n'est pas celle que nous venons d'énoncer. Nous appuyant sur tout ce que nous avons dit précédemment, nous tirons du fait de la confluence que représente la figure 38 la déduction suivante : les *trois* canaux qui, dans la partie moyenne de l'organe, marchent indépendamment l'un à côté de l'autre, mais toujours *à l'intérieur d'une seule assise de cellules,* finissent par s'anastomoser. L'endroit de confluence, dans la *Clepsine complanata,* se trouve très près de l'extrémité inférieure, dans la *cellule porte* même CP, pour *deux* de ces canaux, C^1 et C^2. L'un des deux canaux de la figure 38 est lui-même le résultant d'une confluence supérieure du *troisième* canal avec le deuxième. Cette seconde confluence ne s'est pas encore montrée dans le cours de nos recherches; seulement nous pouvons assurer qu'elle ne saurait être très éloignée de la première, vu que les *trois* canaux indépendants se voient déjà à une petite distance de l'extrémité inférieure.

Pour les autres espèces, la *Clepsine hyalina*, la *Clepsine Carenae*, l'*Hemiclepsis tessulata* et l'*Hemiclepsism arginata,* nous avons constaté que le *canal collecteur unique* est beaucoup plus long que celui de la *Clepsine complanata.*

Les figures de notre mémoire du 6 décembre 1890 montrent, dans la *Clepsine hyalina* et l'*Hemiclepsis marginata*, des canaux collecteurs très allongés, montant entre les diverticules de l'estomac jusque près de la surface dorsale.

4° *Vésicule urinaire.*

Un dernier détail anatomique se rapporte à la vésicule urinaire. Cette vésicule, qui dans la *Nephelis vulgaris* est déjà beaucoup plus réduite que dans les grandes Hirudinées de notre premier groupe, devient tout à fait rudimentaire dans les *Clepsines*.

Quant à la structure de cette vésicule V (fig. 38), nous la trouvons tapissée intérieurement par un épithélium *ep*, qui est en continuation avec celui de l'épiderme. La figure représente la vésicule urinaire d'une *Clepsine complanata*. Dans l'*Hemiclepsis tessulata* nous la trouvons la plus volumineuse, mais encore très inférieure à celle de la *Nephelis*.

Il n'y a pas de *sphincter* à cette vésicule ; même toute musculature propre fait défaut dans toutes les espèces de *Clepsines* que nous avons soumises à un examen attentif.

Pour la preuve de cette absence, nous renvoyons à notre mémoire du 6 décembre, où nous donnons une coupe longitudinale et une coupe transversale de la vésicule de la *Clepsine complanata* en même temps que des parties avoisinantes.

Il résulte de l'examen de ces deux figures qu'il n'y a, aux alentours de la paroi vésiculaire, que des muscles destinés aux mouvements du corps, dans les trois directions, et aucun qui soit spécialement préposé à un mouvement quelconque de la vésicule.

Les cellules de revêtement de la vésicule, *ep* (fig. 38), sont généralement un peu allongées vers l'intérieur de la cavité, et dirigées la pointe en bas. Cependant nulle part nous n'avons trouvé le moindre indice de cils raides et immobiles.

La cuticule *cu*, qui couvre les cellules épidermiques, cesse insensiblement à l'entrée inférieure du récessus.

5° *Diagramme schématique de l'organe segmentaire des Clepsines et des Hemiclepsis.*

Ainsi que nous l'avons fait pour la *Nephelis vulgaris*, nous allons résumer nos observations sur l'anatomie de l'organe dans

les deux genres que nous venons d'examiner. Nous obtenons le diagramme que présente la figure 39.

La ressemblance de ce schéma avec celui de la *Nephelis* sera remarquée sans peine. Les mêmes lettres indiquent les mêmes parties et les mêmes détails. Nous ne les répéterons pas ici.

La particularité vraiment remarquable que nous avons trouvée dans les *Clepsines* et les *Hemiclepsis*, ce sont les *trois* prolongements indépendants, un pour chaque canal, et même pour chaque système de ramifications et de lacunes qui constituent l'origine d'un canal.

Les canaux à l'intérieur des cellules s'entre-croisent parfois, chez les *Clepsines* comme chez la *Nephelis;* dans le schéma, le cours de chaque canal est rendu tout à fait régulier.

Ensuite, il est des cas où *deux* canaux passent de front par *un* prolongement; la figure 37 en fait foi. Cette structure, n'étant pas typique, n'apparait pas non plus dans le diagramme.

Enfin, pour le canal collecteur résultant de l'union des *trois* canaux, nous avons représenté le cas de la *Clepsine complanata*, où une réunion se fait dans la *cellule porte*, et l'autre un peu plus haut. Cette conformation nous parait la plus typique. Dans quelques autres espèces, on s'en souvient, la confluence se fait plus haut.

CHAPITRE II.

Aperçu comparatif des descriptions de la structure des organes segmentaires par les divers auteurs.

—

A. L'ORGANE PRIS DANS SON ENSEMBLE.

Les auteurs dont les publications fournissent les données les plus précisées sur l'organe segmentaire pris en entier, sont aussi les derniers qui ont traité de ce sujet. Ils ont donc pu se servir des indications de leurs devanciers pour les perfectionner de plus en plus, et corriger les erreurs.

Les mémoires des trois derniers savants qui ont traité de la

matière qui nous occupe sont de M. Osc. Schultze [13], de M. Fr. Vejdovsky [14] et de M. A.-G. Bourne [15].

Nous constatons et par le texte très explicite, et par les représentations, plus explicites encore, des organes segmentaires du genre *Clepsine*, que tous les trois n'admettent qu'*un canal unique* dans ces organes, depuis l'embouchure inférieure jusqu'à la région des ramifications ou des lacunes.

Ceci ne s'accorde nullement avec nos résultats.

Nous avons observé *trois canaux indépendants* dans ces mêmes organes des *Clepsines* et des *Hemiclepsis*, ainsi que de la *Nephelis vulgaris*.

Pour le genre *Hirudo*, Schultze et Bourne décrivent et figurent une structure d'ensemble de l'organe segmentaire, qui est d'une complication étonnante. Le « recurrent-duct », qui revient sur ses pas pour se frayer un chemin à travers les amas de cellules glandulaires qui lui ont donné naissance, nous paraît inadmissible.

Notre conception de l'ensemble de l'organe chez les grandes Hirudinées simplifie énormément l'idée de la structure, et la rend bien plus facile à expliquer.

La structure des organes segmentaires, prise dans son ensemble, d'après les données de nos savants devanciers, n'est admise par nous pour aucun genre, pour aucune espèce, de toutes celles que nous avons examinées.

B. Détails des organes segmentaires.

I. *Détails dans les grandes Hirudinées.*

a) Partie supérieure, interne.

Par induction, Leydig [4] y trouvait d'abord un « entonnoir »; mais un examen plus approfondi [5] lui a fait rétracter cette opinion.

Gegenbaur [6] semble suivre les dernières idées de Leydig, et nier l'existence de ces entonnoirs.

Lang [11], Bourne [10], Schultze [13] sont aussi de cet avis.

Vejdovsky [14] ne parle pas explicitement des grandes Hirudinées.

Enfin Bourne [15], dernièrement, croit-s'être assuré de l'existence et de la relation des « entonnoirs » avec les organes segmentaires.

Pour nous, ces « entonnoirs » à l'extrémité de l'organe font défaut.

b) Cellules de la portion extrême interne.

Bourne [15] leur dénie explicitement, par le texte et par la figure 10, les ramifications terminales. Il ne trouve ces ramifications que dans les cellules de la partie nommée « lobe principal » par l'auteur.

Nous avons observé des cellules à ramifications terminales dans la portion extrême et dans toutes les parties de l'organe où une assise de cellules glandulaires entoure le canal collecteur.

c) Origine du canal collecteur.

Schultze [13] et Bourne [15] trouvent cette origine à un point très éloigné de la portion extrême de l'organe (fig. 10 et fig. 15, *g*). Le canal résulterait de la confluence de tout le système des canalicules convergeant vers le point *g*.

Pour nous, le canal collecteur commence à quelque distance de la portion extrême. Il est de formation spéciale et ne résulte pas uniquement de la confluence des canaux latéraux.

d) Cours du canal collecteur.

Bourne et Schultze lui font un cours d'une complication incroyable, et, disons-le, génétiquement inadmissible.

Comment se développerait ce « recurrent-duct » ? Par quel moyen le canal collecteur parviendrait-il à s'insérer à deux reprises dans ces massifs de cellules? Ou bien, si c'est le canal qui se forme le premier, comment ces massifs réussiraient-ils à envelopper d'une manière si compliquée le canal préexistant?

Le cours du canal collecteur, selon nous, est tout ce qu'il y a de plus simple. Le canal, tortueux il est vrai, s'avance toujours vers l'orifice inférieur. Durant ce trajet, il est accompagné extérieurement d'une ou de plusieurs assises de cellules à canaux latéraux. Jamais le canal ne revient sur ses pas *à travers un même massif* de ces cellules.

e) Relation de la paroi du canal collecteur et des cellules en assise environnante.

Pour Bourne et Schultze, il n'y a pas de lien entre ces deux sortes de cellules. Les figures 11 et 12 montrent les cellules de l'assise *arrondies* du côté du canal collecteur et *séparées* de la paroi du canal par un espace noir, assez grand.

Certes, cette position indépendante serait en harmonie avec la formation en « recurrent-duct » de ces auteurs.

Mais l'observation directe nous a montré cette assise de cellules toujours intimement soudée à la cellule centrale, paroi du canal collecteur (voyez la figure 21). Cette soudure va souvent jusqu'au fusionnement des membranes au point de contact.

f) Relation des canalicules des cellules en assise avec le canal collecteur.

Bourne [10] et Schultze [13] n'admettent pas la communication directe entre le canal collecteur et les canalicules des cellules en assise. Uniquement au point *g* de la figure 10, ils trouvent une communication entre ces deux systèmes, ou plutôt le passage d'un système à l'autre.

Tout ceci serait la conséquence exacte de l'indépendance du canal central au milieu des massifs de cellules que nous venons de mentionner (*e*).

Lang [11] admet des communications directes, peu nombreuses, entre le canal collecteur et les canaux en treillis.

D'après nos observations personnelles, nous pouvons constater l'exactitude de l'opinion de Lang. Dans les véritables Hirudinées à mâchoires, les canaux latéraux communiquent de distance en distance avec le canal collecteur. Remarquons cependant que Lang n'indique pas la différence de l'organe segmentaire de la *Nephelis* de celui des autres *Gnathobdellides*, parmi lesquelles il la place explicitement. (Voyez *op. cit.*, page 234, et planche XIV, figure 40.)

g) Relation de la *cellule porte* avec la vésicule.

Dans la figure du mémoire de Schultze [13], nous voyons le canal collecteur s'enfoncer très loin dans la cavité vésiculaire.

L'extrémité du canal dépasse la paroi de la vésicule, et la partie extrême flotte librement dans la cavité.

Bourne [15] n'indique nulle part avec quelque précision la relation de l'extrémité du canal collecteur avec la vésicule.

Nous avons montré comment la *cellule porte*, terme extrême du système intracellulaire, est enchâssée dans l'épithélium qui tapisse la vésicule.

h) Nature de la vésicule urinaire.

D'après Fr. Leydig [4], Gegenbaur [6], Lang [11], Schultze [13], Bourne [15], cette vésicule fait partie de *l'organe* segmentaire. Ils en parlent comme d'une simple dilatation vésiculiforme du canal segmentaire. Bourne mentionne cependant que la cavité vésiculaire n'est pas *intracellulaire*, mais *intercellulaire*, c'est-à-dire environnée d'une multitude de cellules. Mais aucun auteur n'y voit un organe nettement séparé de l'organe segmentaire.

Pour nous, l'organe segmentaire cesse avec la cellule porte, puisque c'est là que cesse l'organe *glandulaire* avec son canal déférent. La vésicule, qui fait suite à cet organe, n'a pas la fonction de sécréter ou d'excréter, mais seulement de recevoir le produit de la glande pour le rejeter à l'extérieur. C'est donc un organe distinct du premier. On peut le considérer comme une partie du *système* d'excrétion, mais pas comme une partie du *canal segmentaire*.

i) Structure de la vésicule urinaire.

Leydig [4] et Gegenbaur [6], sans donner de détails précis, disent seulement que cette dernière portion dilatée de l'organe segmentaire est, chez toutes, ou presque toutes les espèces, pourvue d'une couche musculaire qui la rend contractile.

Schultze [13] et Bourne [15] ne nous renseignent pas non plus sur les détails.

Le dernier croit la vésicule suffisamment décrite en disant que la cavité est entourée de cellules ciliées, et que les cellules de la partie rétrécie inférieure sont la continuation des cellules épidermiques. Aussi, observe-t-il, les cellules de la partie rétrécie sont protégées par le prolongement de la cuticule qui recouvre le corps de l'animal et qui entrerait dans le récessus.

Les détails que nous avons publiés sur la structure de la vésicule sont bien plus nombreux et ne s'accordent pas avec ceux que les auteurs cités ont indiqués.

D'abord, la musculature qui rendrait contractile la vésicule comme telle n'existe pas. Par contre, il se présente un *sphincter* qui ouvre et ferme le passage à la matière sécrétée, mais sans contracter la vésicule comme telle, c'est-à-dire sans diminuer sensiblement le volume pour produire l'évacuation. Le *sphincter*, en se contractant, ferme le passage ; par conséquent, son fonctionnement a l'effet contraire à celui qu'aurait une musculature qui rendrait la vésicule contractile.

Ensuite, l'épithélium qui tapisse l'intérieur de la vésicule ne porte nulle part des cils vibratiles.

Enfin la cuticule de l'épiderme cesse visiblement à l'entrée inférieure de la vésicule.

II. *Détails dans les petites Hirudinées.*

a) Partie supérieure interne.

Depuis que Fr. Leydig [2,3] a lancé l'idée des « entonnoirs » chez la *Nephelis* et la *Clepsine*, nous ne trouvons que le seul professeur Vejdovsky [14] qui déclare catégoriquement ne pas pouvoir les trouver à l'extrémité des organes segmentaires. Tous les autres auteurs les ont vus, décrits et figurés, du moins chez quelques espèces.

Nous nions l'existence d'un entonnoir à l'endroit indiqué, et nous traiterons cette question dans un travail spécial.

b) Cellules de la portion extrême interne.

Lang [11] et Bourne [15] maintiennent pour la *Nephelis* le type d · l'organe segmentaire de l'*Hirudo*, c'est-à-dire : canal collecteur et manchon environnant avec cellules à canalicules en treillis.

Schultze [13] et Vejdovsky [14], le trouvant du type de la *Clepsine*, décrivent la partie extrême comme formée de cellules à ramifications. Vejdovsky [14] en donne une figure qui n'admet aucun doute sur les idées de l'auteur.

Personne avant nous n'a découvert, ni chez la *Nephelis*, ni

chez les *Clepsines*, *trois* systèmes indépendants de ramifications terminales, origines des *trois* canaux intracellulaires dans l'assise *unique* de cellules segmentaires.

c) Cours des canaux dans la portion moyenne du *type* de la *Clepsine*.

Bourne [15] dans la *Clepsine*, Schultze [13] dans la *Nephelis* et les *Clepsines*. Vejdovsky [14] dans la *Nephelis*, les *Clepsines* et les *Hemiclepsis*, ne voient qu'*un seul canal*. Le diagramme de Bourne, figure 16, donné en 1884, donc en dernier lieu, est convaincant.

Seulement, comment expliquer le cours de ce *canal unique* et le mettre en accord avec les préparations ?

Schultze, le premier, a donné une explication qui ne laisse pas que d'être ingénieuse.

Sur des préparations à frais, sur des coupes, partout, toujours, on trouve beaucoup d'endroits présentant *deux* et *trois* tronçons de canal à peu près parallèles, ou bien enlacés. Comment *un seul canal* peut-il présenter ces aspects ?

Schultze [13] s'inspire de l'idée de Bourne sur l'organe segmentaire de l'*Hirudo ;* il voit dans la *Nephelis* et la *Clepsine* un « recurrent-duct », et par là tout est expliqué. La figure 1 nous a déjà montré comment Schultze, en enroulant d'une manière assez compliquée le ruban segmentaire, parvient à avoir des endroits dont les sections devront présenter fatalement des coupes à une, à deux et à trois *lumières* juxtaposées. Mais, remarquons-le bien, c'est toujours *le même canal unique* dont on voit les lumières.

Les figures de Schultze, 1-3, ne tranchent pas clairement la question de savoir si, à l'endroit A de la figure 1, les cellules des trois anses du ruban segmentaire sont accolées seulement, ou fusionnées, de manière à produire des cellules multinucléées. La figure 4 n'en dit pas plus.

Bourne [15] est plus explicite dans le texte et les figures. Il s'empare des données de Schultze sur la *Clepsine*, il les examine, il les approuve. Mais, comme nous, il trouve chez l'auteur un point obscur : de quelle façon est arrangée la partie de l'organe où le *canal unique* présente trois anses parallèles ?

Les recherches de Bourne ont abouti à une explication aussi inattendue qu'inadmissible.

Par *deux* fois, d'après lui, le canal *avec sa paroi cellulaire* revient pour se creuser un chemin *à travers les membranes et le protoplasme* des grandes cellules qui ont donné naissance à ce canal lui-même. Les figures, surtout, et le texte de l'auteur, nous l'avons déjà remarqué, sont d'une précision et d'une clarté inéluctables. Impossible de s'y tromper ! Il y a *deux* petites cellules complètes *à l'intérieur* d'une grande cellule (fig. 6.)

Nous voudrions poser ici une question : Laquelle de ces trois cellules est *la première* dans la genèse ?

Est-ce la plus grande, et par conséquent *la série* des plus grandes? Dans ce cas, les cellules de la paroi du canal collecteur ont dû, *par deux fois,* percer toutes ces grandes cellules d'outre en outre.

Et comment, durant le temps de percement de ce double tunnel microscopique, l'excrétion a-t-elle pu avoir lieu, le canal central, le tuyau d'égout, comme dit l'auteur, n'étant pas encore relié avec la surface extérieure du corps?

Ou bien les *petites* cellules, les parois du canal central, se sont-elles formées les premières?

Mais alors, dites-nous, les *deux* petites cellules d'*une même* coupe transversale, comme dans la figure 6, se sont-elles formées simultanément? Cela n'est pas très probable, puisque ces deux cellules contiennent des *portions* du *même* canal, d'après l'auteur, mais dont l'une s'est formée après l'autre, à moins d'admettre que le long canal se soit développé tout d'un coup sur toute sa longeur !

Supposons, sans le concéder, que les *deux* petites cellules, et par conséquent les deux trajets du grand canal, préexistent; supposons encore que ces deux tronçons sont venus se développer le long l'un de l'autre, et cela *toujours* dans tous les organes segmentaires du type de la *Clepsine,* puisque cette disposition est donnée comme *schématique.* Comment les *grandes* cellules vont-elles se développer de telle façon qu'elles enrobent de leur propre substance, *membrane* et *protoplasme,* ces deux séries de cellules *préexistantes?*

Ou bien, en troisième lieu, les *petites* cellules du canal collecteur se forment-elles, se différencient-elles au sein même des *grandes* cellules par une sorte d'endogenèse?

Mais, dans ce cas, quelle merveille doit s'opérer pour que ces cellules endogénétiques viennent s'aboucher exactement avec les cellules du canal collecteur formées en dehors de ces grandes cellules! Et ceci avec tant d'exactitude que la correspondance est *toujours* telle qu'elle aboutit à parfaire le double circuit du canal!

Encore une fois, ceci devrait être *la marche constante* du développement, car ce serait la disposition *schématique*, et par conséquent *essentielle*, de l'organe!

Le mémoire de Vejdovsky parut à une date intermédiaire à celle des deux auteurs cités; mais probablement Bourne n'en a pas eu connaissance. Tout en n'admettant qu'*un seul canal* chez toutes les espèces qu'il a examinées, Vejdovsky ne trouve rien qui justifie la structure en « recurrent-duct ». Il ne voit dans ces organes qu'un ruban irrégulièrement pelotonné, comme le prouvent les figures 1, 4, 11 du mémoire cité.

Pas n'est besoin d'insister sur la différence profonde entre notre explication et celles de nos devanciers. D'après nous, le « recurrent-duct » n'existe nulle part ; par contre il existe, au lieu d'un seul canal, *trois canaux* indépendants.

d) Canal collecteur.

Puisque tous les auteurs n'admettent qu'*un canal*, il n'est pas question, pour eux, de canal collecteur.

Pour nous, c'est le *canal unique* qui résulte de la *confluence* des *trois* canaux.

e) Union des cellules du ruban segmentaire.

Schultze [13] fait observer que les cellules successives du ruban chez les *Clepsines* ne se touchent pas immédiatement, mais sont réunies par un prolongement qu'il nomme « commissure », et qui conduit le canal de l'une à l'autre.

Ni Vejdovsky [14] ni Bourne [15], quoique ayant tous les deux connaissance du travail de Schultze, qui n'admet qu'*un canal*, n'ont jamais décrit et figuré comme nous *trois* prolongements à

une seule cellule pour livrer passage aux *trois canaux* de la cellule. Il ne pouvait en être autrement, puisqu'eux aussi n'admettent qu'*un canal.*

f) Vésicule urinaire.

Chez la *Nephelis,* classée parmi les Hirudinées à mâchoires (*Gnathobdellides*), tous les auteurs admettent la vésicule urinaire.

Nous avons fait remarquer que cette vésicule n'est ni contractile, ni pourvue de *sphincter*, comme celle des grandes Hirudinées.

Chez la *Clepsine,* Lang [11] ne la mentionne pas; Schultze [13] la nie explicitement; Bourne [15] également. Nous ne connaissons que Vejdovsky [14] qui trouve une vésicule à la base de l'organe segmentaire de toutes les *Clepsines* et des *Hemiclepsis* qu'il a examinées.

Nous sommes complètement de l'avis de Vejdovsky pour ce qui est de l'existence de la vésicule, si réduite soit-elle. Pour les détails de la vésicule, nous nous éloignons du professeur de Prague, puisque nous ne la trouvons pas contractile ni ornée, à l'intérieur, de cils raides et immobiles.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Fr. Leydig. 1849. *Zeitschr. f. wissenschaftliche Zool. — Piscicola.*
2. — 1852. *Archiv für Anatomie und Physiologie.*
3. — 1854. *Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie.*
4. — 1857. *Histologie des Menschen und der Thiere.*
5. — 1865. *Archiv für mikroscopische Anatomie.*
6. C. Gegenbaur. 1874. *Man. d'anat. comparée.* Édit. franç. de C. Vogt.
7. — 1878. *Grundriss der vergleichenden Anatomie.*
8. C. Withmann. 1878. *Quart. Journal of Micr. Sc. — The Embryology of Clepsine.*
9. C.-K. Hoffmann. 1880. *Unters. über den Bau und die Entwicklung der Hirudineen.*
10. A.-G. Bourne. 1880. *Quart. Journ. of Micr. Sc. — On the Structure of the Nephridia of the Medicinal Leech.*
11. A. Lang. 1881. *Mittheil. d. zool. Stat. Neapel. — Der Bau der Gunda segm. u. die Verwantsch. der Plathelm. mit Coelenteraten und Hirudineen.*
12. A.-G. Bourne. 1882. *Quart. Journal of Micr. Sc.*
13. Osc. Schultze. 1883. *Arch. f. mikr. Anat. — Beiträge zur Anat. des Excret.-apparates der Hirudineen.*
14. Fr. Vejdovsky. 1883. *Excresni soustava Hirudinei.*
15. A.-G. Bourne. 1884. *Quart. Journ. of Micr. Sc. — Contributions to the Anat. of the Hirudinea.*
16. H. Bolsius, S. J. 1889. *La Cellule. — Recherches sur la structure des organes segmentaires des Hirudinées.*
17. Fr. Leydig. 1890. *Biol. Centralbl. — Intrazelluläre und Interzelluläre Gänge.*
18. H. Bolsius, S. J. 1890. *Biol. Centralbl. — Intrazelluläre Gänge.*
19. — 1890. *La Cellule. — Nouvelles recherches sur la structure des organes segmentaires des Hirudinées.*
20. — 1891. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* tome XV, 1891. Première partie, pp. 17-18, 44-45.

EXPLICATION DES FIGURES.

NOTE. — *Les figures 1-4 et l'explication sont empruntées au mémoire d'Osc. Schultze* [13].

Figure 1. Schéma de l'organe segmentaire de la *Clepsine complanata*.
Figure 2. Grandes cellules de la portion F, dissociées par HNO_3.
Figure 3. Cellules de la portion D, préparées à HNO_3.
Figure 4. Coupe schématique de la portion A.

NOTE. — *Les figures 5-16 et l'explication sont empruntées au mémoire de A.-G. Bourne* [15].

Figure 5. Schéma de l'organe segmentaire de la *Clepsine*.
a, entonnoir; *b-c*, lobe voisin du testicule; *c-e*, lobe principal. De *e*, par *f*, jusqu'au point apical *g*, et de là retournant par *f* jusqu'en *e*, se développe le « recurrent-duct »; de *e* à *h*, le canal passe à travers le lobe principal; de *h*, il gagne le point apical *g*. Passant de nouveau par l'endroit *f*, le canal rentre en *e* dans le lobe principal. En *h*, il émerge et passe comme canal efférent au point *l*, qui est l'ouverture externe.

Figure 6. Section A-B de la figure 5. C'est la vue, en coupe transversale, d'une cellule du lobe principal avec son noyau n' et son canal ramifié. En outre, la cellule principale entoure, à deux endroits, des cellules perforées qui contiennent le canal en deux portions subséquentes de son trajet, comme le font voir les noyaux n'' et n''' dans la paroi de ces portions du canal.

Figure 7. Section C-D de la figure 5. Elle montre deux cellules perforées juxtaposées, contenant chacune une portion du « recurrent-duct ». L'une contient une portion qui va vers le point apical *g*; l'autre contient une portion qui revient de ce point.

Figure 8. Section E-F de la figure 5. Elle montre une seule cellule perforée, contenant le canal à cette portion de son trajet.

Figure 9. Section G-H de la figure 5 Elle montre une cellule analogue, mais plus large, avec le canal déférent.

Figure 10. Schéma de l'organe segmentaire de l'*Hirudo*.
a, entonnoir; *b-c*, lobe voisin du testicule; *c-d*, lobe principal.
e-d, la portion du lobe principal qui n'a pas son analogue chez la *Clepsine*.
e, point où les *canalicules* « recurrent » abandonnent le lobe principal pour s'avancer jusqu'au point apical *g*, et où le *canal* « recurrent » rentre dans le lobe principal à son retour du point apical *g*. — *e-f*, « recurrent-lobe »; pour le reste de leur trajet, les « recurrent-ductules » et le « recurrent-duct » passent par le lobe apical *g-f*. — *g*, point apical où les « recurrent-ductules » s'unissent pour former le « recurrent-duct ». Comme dans la *Clepsine*, ce dernier revient en *e*, rentre dans le lobe principal, d'où il sort en *h*, passe dans la partie apicale et revient en *f*. Ici il passe dans la partie libre, *d*, du lobe principal, d'où il sort en *h*. — *h-j*, canal déférent. — *j-k*, vésicule. — *l*, ouverture extérieure.

Figure 11. Section C-D de la figure 10. Elle passe par la partie du lobe principal *d*, qui a la forme d'un cæcum. En même temps, la section affecte le « recurrent-lobe » *e-f*. La section du « recurrent-lobe » présente les « recurrent-ductules » ramifiés dans les cellules qui sont groupées autour de la cellule perforée médiane; celle-ci contient le « recurrent-duct ». La section de la portion cæcale présente une structure analogue à celle de la section du lobe principal, figure 12.

Figure 12. Section A-B de la figure 10. Elle passe par le lobe principal. On y voit les cellules de ce lobe avec leurs canalicules ramifiés. Les noyaux de ces cellules ne sont pas représentés. Les cellules sont groupées autour de deux cellules perforées. De ces deux cellules, l'une (à gauche) contient une portion du « recurrent-duct » ; l'autre (à droite) contient une portion du canal « principal ». — *n,n*, noyaux dans la paroi de ces deux cellules perforées.

Figure 13. Section E-F de la figure 10. Elle passe par les cellules perforées qui logent le canal déférent.

Figure 14. Section G-H de la figure 10. Elle passe par les nombreuses cellules qui limitent le canal dans l'extrême portion de son trajet. Intérieurement, elles sont limitées par un prolongement de la cuticule qui couvre la surface du corps.

Figure 15. Diagramme de l'organe segmentaire de l'*Hirudo*.
a. entonnoir; *b-c*, canaux du « testis-lobe » ; *c-e*, canaux du lobe principal ; *d*, canaux dans la portion cæcale du lobe principal; *e-g*, canaux dans le lobe apical; *g*, point apical; *g-l*, canal non ramifié qui va à l'ouverture extérieure *l*; *j-k*, vésicule.

Figure 16. Diagramme de l'organe segmentaire de la *Clepsine*.
a, entonnoir; *b-c*, canaux du « testis-lobe »; *c-e*, canaux dans le lobe principal; *g*, point apical; *e-l*, canal non ramifié qui va à l'ouverture extérieure *l*.

Hirudo medicinalis.

NOTE. — *Nous avons emprunté quelques-unes des figures suivantes à nos mémoires antérieurs, en y effaçant les détails cytologiques et en ajoutant parfois des détails anatomiques observés dans des endroits analogues à ceux de la figure originale.*

Figure 17. Représentation de la forme extérieure et schéma de la structure intérieure de l'organe segmentaire de l'*Hirudo medicinalis*.
a, portion supérieure, ne contenant que des cellules à faibles canaux disposés en treillis et à ramifications terminales; toutes ces cavités sont *intracellulaires*.
b-c-d, portion moyenne. Plusieurs assises de cellules entourent une série de cellules placées bout à bout, à l'intérieur desquelles est creusé le canal collecteur. Le canal collecteur est très sinueux. Les cellules des assises possèdent un treillis de canalicules et des ramifications, comme dans la portion *a*.
d-e, extrémité de la portion moyenne, où le canal collecteur n'est entouré que d'une seule assise de cellules à treillis et à ramifications.

e, portion inférieure. Le canal collecteur ne possède plus que sa paroi de cellules perforées, placées bout à bout.

V, vésicule urinaire.

p, pore extérieur de la vésicule. Il est placé dans un sillon entre deux anneaux de l'épiderme.

Figure 18. Coupe microtomique dans la portion *a* de l'organe.

n, noyaux des cellules glandulaires.

cl, canaux latéraux disposés en treillis.

rt, ramifications terminales formant l'origine intracellulaire des canaux.

REMARQUE. — *Entre les cellules, qui ne se touchent que partiellement, se trouve du tissu conjonctif et des canaux capillaires sanguins.*

Figure 19. Coupe microtomique de trois cellules contiguës A, B, C.

n, noyaux.

rt, ramifications terminales qui concourent, dans la cellule A, à former un tronc unique de canal, passant à la cellule B.

cl, canal latéral venant de la cellule A; il reçoit, dans la cellule B, un autre canal latéral qui résulte de ramifications se trouvant dans la partie de la cellule B que le rasoir a emportée.

REMARQUE.— *Le canal, au niveau de passage d'une cellule à l'autre, s'élargit sensiblement.*

Figure 20 Coupe microtomique de la portion moyenne, à peu près dans la direction *x-y* de la figure 17.

cl, canaux latéraux en treillis.

rt, ramifications terminales, origines des canaux latéraux.

CC, canal collecteur. Il y a deux sections du canal : la première, nettement *transversale*, montre la lumière ronde et la paroi du canal formée par une cellule unique, dont le noyau est représenté dans l'épaisseur de cette cellule.

La deuxième section entame *obliquement* le canal collecteur CC, qui par conséquent présente une lumière allongée.

REMARQUE 1.— *Autour de la coupe* transversale *du canal collecteur, l'assise de cellules, en contact avec sa paroi, est visiblement d'une structure* rayonnante; *autour de la coupe* oblique, *cette structure s'efface presque complètement.*

REMARQUE 2. — *Entre les cellules d'entourage il y a de petites lacunes occupées par le tissu conjonctif et les capillaires, comme dans la figure 18.*

Figure 21 Coupes microtomiques dans la partie à assise unique de la portion moyenne. A, Coupe transversale; B, Coupe longitudinale.

CC, canal central.

n, noyau de la cellule perforée qui loge le canal central.

n', noyaux des cellules de l'assise glandulaire.

cl. canaux latéraux en treillis

rt. ramifications terminales des canaux latéraux.

em, embouchure des canaux en treillis avec le canal collecteur.

Remarque 1. — *Les cellules placées bout à bout, logeant le canal collecteur, sont nettement distinctes par les noyaux et par les élargissements de la lumière du canal.*

Remarque 2. — *Les canaux latéraux dans cette région sont souvent fort larges.*

Remarque 3. — *Les cellules de la gaine environnante sont toutes attachées par la base à la cellule perforée qui loge le canal central.*

Figure 22. Coupe microtomique longitudinale de la portion terminale de l'organe et de la vésicule.

CC, canal collecteur en sections longitudinale et transversale.

n, noyaux des cellules perforées. Il n'y a pas d'assise de cellules environnantes.

CP, cellule porte qui fait communiquer tout le système *intracellulaire* avec la vésicule.

V′, vésicule urinaire, portion supérieure, toujours béante.

V″, vésicule urinaire, portion inférieure, souvent réduite à un simple conduit.

p, pore extérieur, à la surface ventrale, placé dans un sillon interannulaire.

ep, épithélium tapissant toute la surface de la cavité vésiculaire.

cu, cuticule qui recouvre l'épiderme et qui cesse à l'entrée du pore *p*.

sph, sphincter entourant la partie rétrécie de la cavité V′ et partiellement la cavité V″

Figure 23. Le sphincter de la figure précédente, sous un grossissement plus fort. Il se compose d'un petit nombre de cellules musculaires circulaires. Les interstices entre ces cellules, et entre celles-ci et l'épithélium *ep*, sont occupés par un tissu conjonctif.

Figure 24. Coupe microtomique transversale de la vésicule au niveau du sphincter.

V, vésicule en coupe transversale.

ep, épithélium de la cavité vésiculaire.

sph, cellules musculaires circulaires constituant le sphincter.

n, noyaux de ces cellules.

m, cellules musculaires longitudinales et dorso-ventrales du corps.

Nephelis vulgaris.

Figure 25. Vue d'ensemble de l'organe segmentaire. Reconstruction d'après vingt coupes microtomiques successives du segment qui précède les orifices génitaux.

CS, Cordon en ruban segmentaire. Il est capricieusement entortillé et ne présente pas un arrangement de forme stable.

Remarque. — *Peu de circonvolutions passent à l'extérieur du sinus sanguin; presque tout l'organe est situé entre ce sinus et l'intestin.*

S, sinus sanguin latéral.

V, vésicule urinaire.

p, pore extérieur de la vésicule, placé dans un sillon interannulaire.

m, muscles longitudinaux du corps.

m, muscles dorso-ventraux
fd, face dorsale.
fv, face ventrale.

Figure 26. Coupe de la cellule extrême supérieure de l'organe, légèrement schématisée.
n, noyau.
rt, ramifications terminales. Elles présentent un aspect arborescent, qui s'étend dans toute la masse du corps de la cellule. Tous les ramuscules et les branches concourent à former un tronc unique, qui passe à la cellule voisine.
C', le premier canal de l'organe, résultant des ramifications.

Figure 27. Coupe microtomique transversale dans l'organe, un peu plus bas que la précédente.
n, noyau à un endroit apparemment indifférent.
C', premier canal définitivement formé.
rt, ramifications terminales, système d'origine du deuxième canal.

Figure 28. Coupe microtomique transversale, encore plus bas que la précédente.
n, noyau à un endroit apparemment indifférent.
C^1, premier canal définitivement formé.
C^2, deuxième canal, issu du deuxième système de ramifications.
rt, ramifications terminales, système d'origine du troisième canal.

Figure 29. Coupe microtomique transversale dans la partie moyenne de l'organe.
n, noyau à un endroit apparemment indifférent.
C^1, C^2, C^3, les trois canaux définitivement formés, indépendants et logés dans la même cellule.

Figure 30. Forme aplatie que présentent souvent les sections transversales des cellules de la portion moyenne à trois canaux juxtaposés.

Figure 31 Coupe longitudinale dans la portion moyenne de l'organe, légèrement schématisée.
n, noyaux; la position sur l'axe *transversal* de la cellule paraît indifférente; sur l'axe *longitudinal*, elle est toujours sensiblement au milieu.
C^1, C^2, C^3, les trois canaux indépendants indiqués schématiquement dans *un seul* plan. Leur position réciproque est soumise à beaucoup de variations à cause de la torsion autour de l'axe longitudinal du ruban segmentaire.
re, rétrécissement à la surface du ruban, au niveau de la soudure de deux cellules consécutives.

REMARQUE. — *La ligne qu'on peut mener entre les rétrécissements correspondants rencontre les élargissements que présentent les canaux au passage d'une cellule à l'autre.*

Figure 32. Coupe microtomique longitudinale de la portion terminale et de la vésicule.
CC, canal collecteur *unique*, résultant de la confluence des trois canaux de la portion moyenne.
CP, cellule porte, terme extrême de tout le système segmentaire à cavité *intra*-cellulaire.
V, vésicule urinaire, dépourvue de musculature propre.
p, pore extérieur de la vésicule, situé au fond d'un sillon interannulaire.
ep, épithélium tapissant la cavité vésiculaire.
cu, cuticule de la surface du corps. Elle cesse à l'entrée du pore

Figure 33. Diagramme de l'organe segmentaire de la *Nephelis vulgaris.*

I. Portion supérieure. Elle contient trois divisions :

a, division supérieure, contenant le système d'origine du premier canal.

b, division moyenne, — — du deuxième canal.

c, division inférieure, — — du troisième canal.

REMARQUE. — *Chacune de ces divisions n'est pas nécessairement constituée par* une seule *cellule, comme pourrait le faire croire le diagramme.*

II. Portion moyenne. Elle comprend tout le trajet des canaux jusqu'à leur confluence en un seul canal.

x-x', *y-y'*, le pointillé remplace toute la série de cellules qu'il faut intercaler pour obtenir un ruban aussi long que l'indique la figure 25.

III. Portion inférieure. Elle ne contient que le canal collecteur.

CC, canal collecteur. Dans ce diagramme il n'a que la longueur de la cellule porte CP; peut-être, en réalité, ce canal occupe-t-il *quelques cellules* de plus.

V, vésicule urinaire, partie supérieure.

Clepsines et Hemiclepsis.

Figure 34. Coupe microtomique de la portion supérieure extrême de la *Clepsine bioculata.*

n, noyaux.

lr, lacunes ramifiées terminales.

REMARQUE. — *Les terminaisons en* simples ramifications *que présentent aussi les* Clepsines *et les* Hemiclepsis, *rappellent entièrement la figure 26 de la* Nephelis vulgaris.

C¹, premier canal, originaire des lacunes de la cellule A, cellule extrême de tout l'organe.

prl, prolongement réunissant les cellules A et B. et livrant passage au canal C¹.

Figure 35. Coupe microtomique à 30 μ de la précédente.

REMARQUE. — *La coupe a encore entamé la même cellule B de la coupe précédente, un peu plus près de la surface, et en même temps la cellule suivante C.*

n, noyau de la cellule C; le noyau de la cellule B se voit dans la figure précédente.

C¹, premier canal, venant de la cellule A, figure 34, et passant par un nouveau prolongement de la cellule B à la cellule C.

prl, prolongement unitif livrant passage au canal C¹.

lr, lacunes ramifiées, système d'origine du deuxième canal.

REMARQUE. — *Ce système de lacunes, communiquant entre elles à différentes profondeurs, passe de B à C par un autre prolongement que celui qui conduit le canal déjà formé.*

Figure 36. Reproduction en perspective de douze coupes transversales superposées dans la portion moyenne de l'organe.

A, extrémité d'une cellule de la série.

B, moitié de la cellule qui fait suite à la précédente.

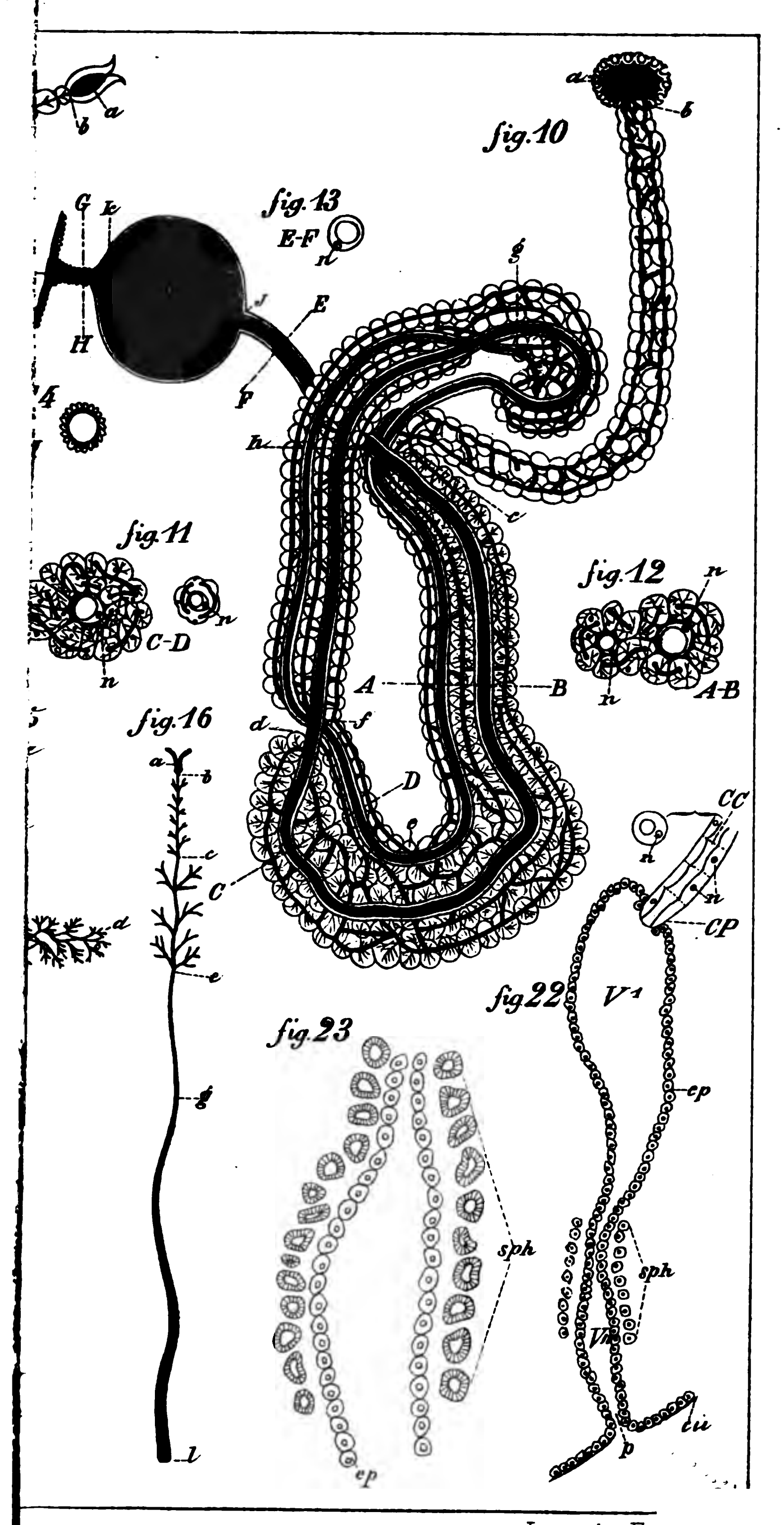
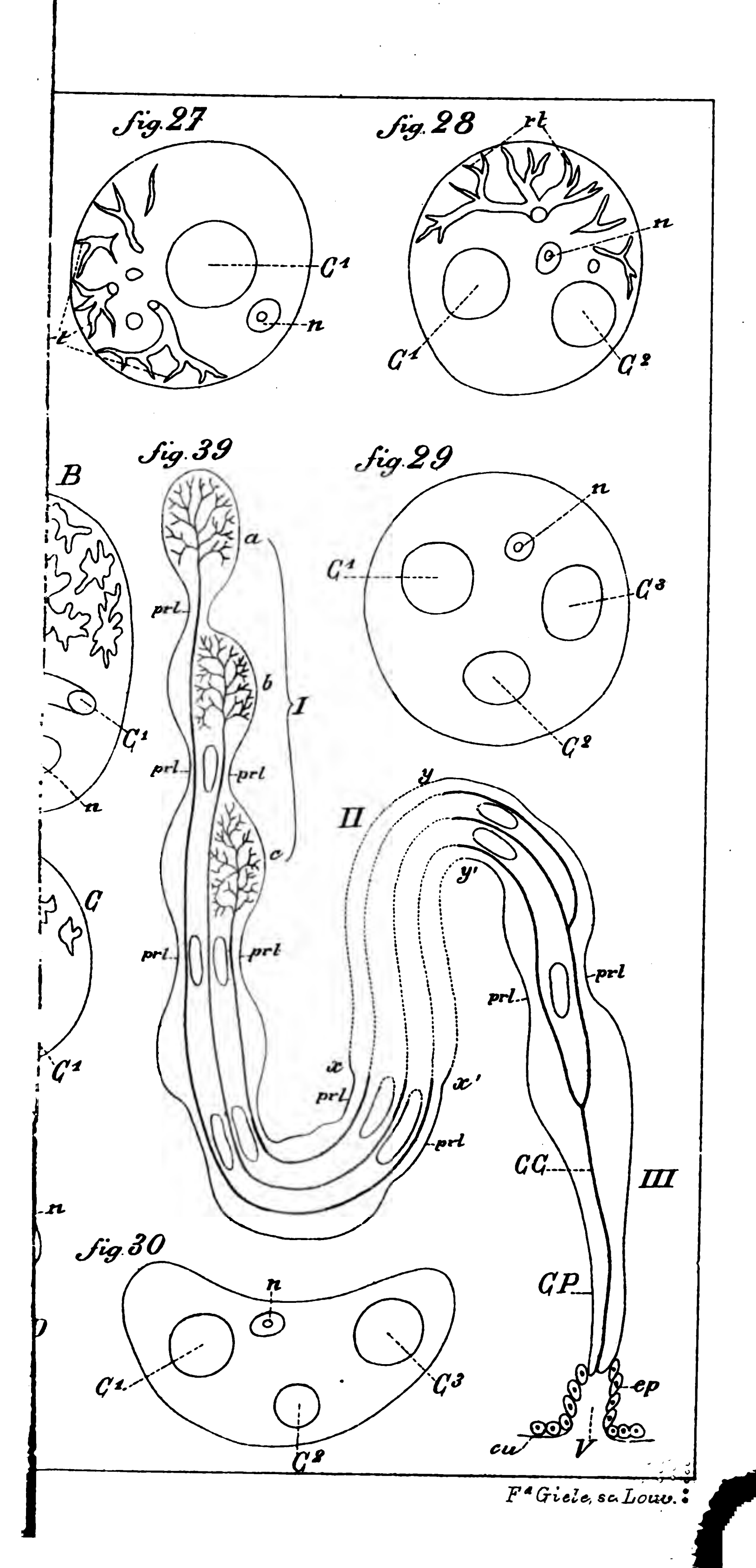


fig.10
fig.13
E-F
fig.11
C-D
fig.12
A-B
fig.16
fig.22
fig.23
sph
ep
CC
CP
cu

Louvain, F


fig. 27
t
C¹
n
fig. 28
rt
n
C¹
C²
fig. 39
a
b
c
I
prl
B
C¹
n
C
fig. 29
n
C¹
C³
C²
II
y
y'
x
x'
CC
III
CP
ep
cu
V
fig. 30
n
C¹
C³
C²
Fᵉ Giele, sc. Louv.

67

a, *b*, *c*, les trois canaux indépendants à l'intérieur de ces cellules.

prl[1], *prl*[2], *prl*[3], les trois prolongements unitifs, conduisant chacun un des trois canaux. Ces prolongements sont de longueurs très inégales. Leur position réciproque est aussi instable que celle des canaux à l'intérieur des cellules.

n, noyau unique du corps B, prouvant l'*unité* de la cellule.

Figure 37. Coupe microtomique dans un tronçon de la portion moyenne.

A, B, C, D, E, cinq cellules consécutives du ruban segmentaire.

n, noyaux de ces cellules.

prl[1], prolongement, situé dans le plan de la coupe, conduisant *un* canal.

prl[2], prolongement entre C et D, dans le plan de la coupe, livrant passage à deux canaux à la fois, cas anormal.

Figure 38. Coupe microtomique dans l'extrémité inférieure de l'organe et dans la vésicule de la *Clepsine complanata* B. (Voyez [19], LA CELLULE, *Nouvelles recherches*, etc.)

n, noyau.

CP, cellule porte de l'organe segmentaire.

C[1], C[2], deux canaux, encore indépendants, dont l'un est le résultant d'une confluence supérieure.

CC, canal collecteur unique.

x, point de confluence des deux canaux en canal collecteur.

V, vésicule très réduite, dans laquelle débouche le canal collecteur.

ep, épithélium tapissant la cavité vésiculaire.

cu, cuticule de l'épiderme, cessant à l'entrée de la vésicule.

Figure 39. Diagramme de l'organe segmentaire des genres *Clepsine* et *Hemiclepsis*.

I. Portion supérieure. Elle contient trois divisions :

a, division supérieure, contenant le système d'origine du premier canal.

b, division moyenne, — — du deuxième canal

c, division inférieure, — — du troisième canal.

REMARQUE. — *L'observation directe nous a révélé que chaque division peut contenir* plus d'une *cellule. Pour la facilité du diagramme, nous représentons le cas, qui est aussi réel, d'une seule cellule pour chaque division.*

II. Portion moyenne.

x-*x'*, *y*-*y'*, trajet des trois canaux par la série de cellules à prolongements en tout semblables aux deux premières cellules, représentées ici après la portion I.

REMARQUE. — *Le trajet à intercaler est moins long que chez la* Nephelis, *puisque l'organe n'est pas aussi développé dans la plupart des espèces examinées.*

III. Portion inférieure. Dans la *Clepsine complanata* B, elle est moins longue que la cellule porte CP; dans d'autres espèces, elle comprend plusieurs cellules dans sa longueur.

Les autres lettres, comme dans la figure précédente.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE II.

SUR L'ORIGINE

DE

CERTAINS SIGNES D'OPÉRATION

PAR

C. LE PAIGE

Membre de l'Académie royale de Belgique (*).

L'emploi de signes particuliers pour marquer les diverses opérations arithmétiques ou algébriques a une si grande importance au point de vue du développement de l'analyse moderne, que l'on s'est toujours préoccupé, avec raison, des premières traces de ce langage symbolique.

Je ne me propose pas de faire l'historique des différents signes employés en algèbre : la tâche serait difficile et longue ; en outre, pour un grand nombre d'entre eux, je ne pourrais apporter de solution nouvelle, présentant un degré suffisant de certitude.

Les symboles qui paraissent s'être présentés les premiers sont ceux de l'addition et de la soustraction.

Longtemps on a fait honneur de leur introduction à Michel Stifel : on les rencontre, en effet, dans l'*Arithmetica integra* de cet auteur, publiée en 1544 (**).

Cependant il ne fut pas difficile de remonter à une époque antérieure : on trouve ces signes dans l'*Arithmétique* de Gemma Frisius, publiée en 1540 (***), et dans la *Coss* de Christophe Rudolff de Jauer, imprimée en 1525.

(*) Mémoire lu à la séance de la première section du 28 janvier 1892.

(**) *Arithmetica integra.* Authore Michaele Stifelio. Norimbergæ apud Iohan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIIII.

(***) *Arithmeticæ practicæ methodvs facilis.* Væneunt Antuerpiæ Gregorio Bontio, 1540 (Univ. Gand, math. 629).

Enfin, en 1840, M. Drobisch signala l'existence de ces signes dans un écrit de Jean Widman d'Eger, paru à Leipzig en 1489 (*).

Ce livre a pour titre :

Behēde vnd hubsche
Rechenung auff alle
Kauffmanschafft.

Il a été longuement décrit, ainsi que ses éditions successives, par M. le prince Boncompagni, dans un article où l'on retrouve l'abondance de renseignements bibliographiques et la minutieuse exactitude que le savant auteur sait mettre dans tous ses travaux historiques (**). On n'a pas manqué de chercher une interprétation de ces symboles. Une des plus anciennes est due à Cossali.

Observant que Diophante a marqué par le signe ⋔ les soustractions à effectuer (***), il pense qu'il a été fort naturel de représenter le mot *plus* par le ⍦ ordinaire.

La rapidité de l'écriture aurait transformé ⍦ en + et ⋔ en T, dont on aurait fini par ne conserver que le trait supérieur horizontal (IV).

M. Ch. Henry, dans un mémoire *Sur l'origine de quelques notations mathématiques* (V), voit dans le signe + le signe abréviatif de la préposition *in*, dans.

Ce mot se rend, en effet, souvent par la lettre *i* surmontée d'un trait vertical, et parfois traversée d'un trait incliné ɨ, c'est-à-dire par un signe qui rappelle assez le *t* de l'écriture cursive

---

(*) *De Joannis Widmanni Egerani compendio arithmeticæ mercatorum.* Lipsiæ, imp. Leop. Vossii, MDCCCXXXX, in-4°.

(**) *Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widman di Eger* (BULLETTINO DI BIBL. E DI STORIA DELLE SC. FIS. E MATEM., t. IX, pp. 188-210).

(***) Voir, sur la véritable forme et la signification de ce signe, L. RODET, *Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVIe siècle.* Paris, 1881, pp. 37, 45 et ss.

(IV) P. COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra.* Parma, 1798, pp. 48-49. Voir aussi *Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali pubblicati da B. Boncompagni,* Roma, 1857, p. 391.

(V) *Revue archéologique,* nouv. série, t. XXXVIII, p. 3 (Univ. Leod. XX, 75, 25).

où la barre horizontale se relèverait de la gauche vers la droite.

D'autres voient dans les signes + et — le dernier stade de la déformation des lettres *p* et *m*, initiales des mots *plus* et *minus*, initiales que l'on rencontre d'ailleurs soit sous leur forme ordinaire, soit surmontées d'un trait horizontal, indication de la suppression des finales *lus* et *inus*, soit traversées par un trait horizontal (*). C'est vers cette hypothèse que semble pencher le savant historien des mathématiques, M. M. Cantor (**).

Enfin, Aug. de Morgan a introduit une hypothèse entièrement différente, que nous allons exposer.

Le savant bibliographe de l'arithmétique observant que les signes + et — se présentent pour la première fois dans un traité de calcul à l'usage des marchands, pense qu'il faut en attribuer l'origine à la pratique commerciale (***).

Supposons, dit Aug. de Morgan, que, dans une maison de commerce, on reçoive un grand nombre de balles de marchandises du poids moyen de 300 livres. Si l'on veut vérifier le poids des différentes balles, on mettra dans un des plateaux de la balance trois poids de 100 livres. Suivant que la balle à peser aura un poids supérieur ou inférieur à 300 livres, on devra placer des poids supplémentaires du côté des poids ou du côté des marchandises. On marquera alors dans un livre ou l'on indiquera à la craie sur les balles elles-mêmes les quantités en excès ou en défaut : l'emploi de signes simples, un trait horizontal ou deux traits perpendiculaires, se présente naturellement pour distinguer ces deux cas.

(*) Les lettres *p* et *m* seules sont employées, entre autres, par Buteon, *Logistica*, Lugduni, 1559; J. Peletier, *L'algebre*, Lion, 1554; Unicorno, *De l'arithmetica universale*, Venetia, 1598, etc. Les mêmes lettres, surmontées d'un trait horizontal, se réncontrent dans Nicolas Chuquet, *Le triparty en la science des nombres* (1484), Rome, 1881, et dans son imitateur, pour ne pas dire son plagiaire, Estienne de la Roche, *Larismetique et geometrie*, Lyon, 1538 (La première édition est de 1520). Enfin Fludd fait usage de *p* et *m* traversés d'un trait horizontal.

(**) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2ter Bd., S. 293.

(***) Aug. de Morgan a fait connaître son hypothèse d'abord dans un article de l'*Athenaeum*, 29 octobre 1864, p. 565; il l'a ensuite développée et appuyée de citations du livre de Widman dans les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XI, p. 203, 1871. Le mémoire a été lu le 28 novembre 1864.

Le résultat final de l'opération du pesage s'obtiendra par l'addition des quantités en excès, celle des quantités en défaut et la soustraction définitive des deux sommes obtenues.

A la suite d'un long usage de ces signes, de la façon indiquée, on aura fini par employer l'un comme signe d'addition, l'autre comme signe de soustraction.

Sans nier l'ingéniosité de cette explication, comme d'ailleurs de celle qui voit dans + et — les abréviations de *p* et *m*, nous nous permettrons d'en faire connaître une autre, au moins pour le signe +, qui nous semble présenter un caractère de probabilité beaucoup plus grand.

M. Aug. de Morgan l'a, au surplus, signalée en passant, mais sans y attacher aucune importance. J'ajoute que l'hypothèse que je vais développer s'est présentée à moi depuis longtemps, et que je n'ai connu le passage de l'article d'Aug. de Morgan que bien plus tard, lorsque j'ai voulu examiner les différents travaux consacrés à l'explication des signes d'opération.

Je pense que le signe d'addition n'est autre qu'une déformation très légère du signe qui, pendant toute la durée du moyen âge, a été usité pour représenter la conjonction latine *et*.

Pour se rendre compte des variations qu'a présentées cette abréviation, il suffit de consulter les traités de paléographie : on verra en quelque sorte la forme typique de ce mot dans le second passage du fac-similé joint à cette note.

Les mots

Nos li maires et li eskevin

sont empruntés à une charte liégeoise de 1298.

Le trait initial de cette abréviation a souvent été réduit et presque entièrement supprimé.

On le voit sous cette forme, au troisième groupe du fac-similé, dans les mots

por mi et por,
chouze et estable

empruntés à deux chartes liégeoises de 1384 et 1383.

C'est sous cette forme encore qu'on rencontre *et* dans deux passages d'arithmétique.

La dernière phrase se lit :

> *Multiplica igitur primum per quartum* et *divide per secundum* et *quotiens erit quesitum.*

Ce passage se lit dans un manuscrit du commencement du XVe siècle (Univ. Leod., Ms. 354).

Je transcris enfin le passage du commencement, le plus important au point de vue qui nous occupe :

> *Si scire scito progressionem volueris debes respicere quot figuras tu habebis. Si sint impares debes multiplicare numerum medium per numerum positionum. Sicut 1. 2. 3. 4. 5. Quis est numerus medius? 3. Quot sunt figure? 5. Multiplica ergo tria per quinque vel econtra* et *habebis 15. Numera ergo valorem figurarum sic : unus cum duobus tria sunt. tria cum tribus 6 sunt. 6* et *4, 10 sunt. 10* et *5. 15 sunt* et *sic poteris cognoscere numerum imparem...*

Ce passage est emprunté à un manuscrit de la fin du XIIIe siècle (*), faisant partie de la Bibliothèque de Darmstadt, où il est coté 2640 ; il y occupe les lignes 23-36, col. 1 du f° 108.

Ce manuscrit contient l'arithmétique en vers d'Arnold de Villedieu, entremêlée, en forme de commentaire, d'une explication en prose empruntée en grande partie à l'Arithmétique de Jean de Sacrobosco ; il provient de l'ancienne abbaye de Saint-Jacques, à Liége, et figure dans le catalogue, rédigé par Paquot, de la vente des livres de cette abbaye, sous le numéro 511 (**). Il est rubriqué I, 68, LX, 6.

Au point de vue paléographique, il ne semble donc exister aucune difficulté à identifier les signes *et* et +.

(*) Au moins le traité auquel le passage est emprunté est de cette époque ; le manuscrit est composé de parties diverses, d'âges différents.

(**) *Catalogue des livres de la bibliothèque de la célèbre ex-abbaye de Saint-Jacques.* Liége, 1788.

Il ne sera pas superflu de montrer que la pratique des arithméticiens, au XVe siècle et au XVIe, confirme cette manière de voir.

Dans son *Arithmetica integra*, Stifel, qui a employé, comme les Italiens, pour la règle de fausse position, les mots *plus* et *minus* et même leurs abréviations *p* et *m*, définit, au commencement du livre II, les signes + et —. Il appelle le premier *signum additorum*, le second *signum subtractorum*, sans dire comment ils se lisent; mais, dans sa *Deutsche Arithmetica inhaltend die Hauszrechnung, Deutsche Coss und Kirchrechnung*, Nürnberg, 1545, il dit clairement : « où vous voyez + vous devez lire *und* oder *mer* (*et* vel *plus*), et où vous voyez —, *weniger* oder *minder* (*paucius* vel *minus*) (*) ».

Dans son *Compendium Arithmeticæ* (1549), Scheubel, au chapitre de l'addition, écrit (**) :

> *ADditio est duorum vel plurium numerorum in unam summam collectio. In hujus tractatione plerunq; usurpamus particulam ad, vel & : dicendo. 6 ad. 9. vel 6 & 9. sunt 15.*

Et Maurice Steinmetz (***), en 1568, dit :

> *Vtimur particulis ad vel et.*

A une époque beaucoup plus rapprochée de nous, le célèbre Albert Girard écrit encore (IV) :

> Le signe + s'appelle *plus*, vaut autant à dire que &, ou bien *encore*.

(*) Je cite ce passage d'après le *Catalogue of the Mathematical, ... Portion of the Library of M. G. Libri*, n° 594, Londres, 1861.

(**) *Compendium arithmeticæ artis*, Basileæ, anno 1549, f^t^ (A8) v° (Univ. Gand., Math. 626 B).

(***) *Arithmeticæ Praecepta*. Anno M.D.LXVIII, f^t^ (B6) v°.

(IV) *Invention nouvelle en l'Algebre*. A Amsterdam chez Guillaume Iansson Blaew. M.DC.XXIX, f^t^ B. r°.

Ce passage est reproduit dans la réimpression donnée par M. Bierens de Haan, en 1884, avec la seule différence que le caractère & est représenté par &.

Mais il y a plus. Dans un traité d'algèbre en allemand, écrit à la fin du XV[e] siècle et publié par le docteur E. Wappler (*), l'auteur anonyme fait constamment usage des mots *vnd* et *minner;* le second est parfois remplacé par le signe —, le premier est toujours écrit explicitement.

Si nous nous reportons au traité de la *Coss* d'Adam Riese, resté manuscrit et dont quelques extraits ont été reproduits par M. Wappler, on trouve, à différentes reprises, que le signe + doit nécessairement se lire *et* ou *und.*

Ainsi (*loc. cit.*, p. 5) :

Item gib mir Zwu Zalnn die sich zusamen haltenn als 3 + 2. In proporcione sesqualtera.

Cet usage se confirme encore par l'important manuscrit C. 80 de Dresde, publié par M. Wappler.

On y lit, par exemple, f° 351 v°, à la fin :

Quando 3 *assimilatur* ℭ + 33

et f° 351 v° :

Quando ℭ *assimilatur* 3 *et* 33

f° 354 v° :

Sint 2 Socij A + B.

Il est visible que, dans tous ces cas le signe + qui, dans le manuscrit, indique l'addition, doit se lire *et.*

Enfin, dans le traité de Widman lui-même, ce signe doit visiblement se lire *et* ou *und.*

Ainsi f° 109 r°, le titre d'un chapitre est :

Regula augmenti + decrementi.

(*) *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert.* Zwickau, R. Zückler, 1887.

Je dois un exemplaire de cette intéressante étude à l'obligeance de M. le D[r] E. Wappler.

La *Coss* d'Adam Riese a été publiée par M. Berlet, Annaberg, 1860, comme annexe au programme du Progymnase d'Annaberg.

M. de Morgan, auquel ce passage n'a pas échappé, ajoute (*Cambridge Phil. Trans.*, p. 207) :

> *The heading* Regula augmenti + decrementi *is probably a sort of joke, a use of + for logical aggregation.*

Mais f° 84 r° on lit encore :

$$\frac{1}{3}\ vnd\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

et, plus loin,

$$Addir\ \frac{1}{3}\ vnd\ \frac{1}{4}\ vnd\ \frac{1}{5}$$

Je ne pense pas qu'il puisse subsister le moindre doute sur l'origine du signe +.

J'ai été moins heureux, je l'avoue, dans l'explication de la barre de soustraction; j'ai fait connaître plus haut les différentes interprétations auxquelles cette notation a donné lieu.

On peut observer, en passant, que — n'a pas la même fixité que +.

On le retrouve sous cette forme simple dans Widman et dans le Ms. C. 80 de Dresde, mais Adam Riese, dans sa *Coss*, écrit ÷.

La bibliothèque de l'Université de Liége possède un exemplaire de l'édition originale de l'immortel ouvrage de Copernic (*), qui renferme de nombreuses notes marginales et même plusieurs feuillets d'additions ou d'explications écrites au XVI[e] siècle : on y retrouve ce même signe ÷.

Le passage, déjà cité, d'Albert Girard continue ainsi :

> mais — ou ÷ signifie *moins*.

C'est, d'ailleurs, dans les Pays-Bas que cette forme s'est perpétuée le plus longtemps; ainsi je la retrouve dans l'*Arithmetica van Mr. Johan Coutereels van Antwerpen* (édition donnée par

---

(*) NICOLAI COPERNICI *Torinensis de revolutionibus orbium cœlestium*. Norimbergæ, Anno M.D.XLIII. (Univ. Leod. I, 100 S.)

Corn.-Fr. Eversdyck, à Middelburgh, en 1657), dans la *Regula Cos of Algebra door J.-B. Brasser*, Amsterdam, 1663, etc. (*).

L'indication de la soustraction se rencontrant dès la fin du XVe siècle, il faut évidemment chercher son origine soit dans une abréviation, soit dans une pratique des arithméticiens du moyen âge.

Le signe $\div$ est fort voisin de $\div$ que l'on trouve avec la signification de *est;* mais il me paraît bien difficile d'y rattacher les lectures *paucius, minus, minner.*

Faut-il voir dans — une déformation de *m*, dont les formes varient à l'infini dans les manuscrits? Nous n'avons cependant rencontré jusqu'ici, ni dans les nombreux manuscrits que nous avons lus, ni dans les traités de paléographie, rien qui ressemblât à une abréviation de *moins* ou de *minus* sous la forme d'un simple trait.

Nous pouvons observer qu'un signe particulier pour les quantités soustractives est le premier dont la nécessité a dû se faire sentir.

L'addition peut en effet se marquer par la simple juxtaposition des quantités à ajouter, et c'est ce qui a lieu aussi bien chez Diophante que chez Léonard de Pise et Jordan Nemorarius.

Une convention particulière, une marque spéciale doit, au contraire, être employée pour les quantités à retrancher.

L'histoire de l'écriture mathématique confirme cette induction. Diophante, nous l'avons rappelé, a un signe pour les quantités négatives; les algébristes de l'Inde emploient un point surmontant les nombres pour indiquer ceux qui doivent être pris soustractivement.

Ceci nous a suggéré la conjecture suivante, que nous donnons sans pouvoir l'appuyer de preuves directes, à l'inverse de ce que nous avons fait pour le signe de l'addition.

Dans toute l'arithmétique du moyen âge, il est fait usage d'un

---

(*) Voir encore Ch. Hoornaert, *Arithmetica*, Deventer, 1659; Andr. Helmreich, *Rechenbuch*, Leipzig, 1595, f° 243.

signe qui n'est pas, à proprement parler, un signe d'opération, mais plutôt un aide-mémoire, une indication que des nombres doivent être combinés l'un à l'autre par l'une quelconque des opérations arithmétiques : je veux parler des *barres de direction*.

Il est probable qu'elles étaient en usage dès le temps de Léonard de Pise. Dans tous les cas, elles étaient employées au commencement du XIV[e] siècle, car elles figurent dans le manuscrit de cette époque qui a servi au prince Boncompagni pour éditer le *Liber Abbaci* (*).

On les retrouve dans les traités imprimés du XV[e] au XVII[e] siècle.

Voyons, par exemple, comment s'indiquait la pratique de la multiplication complémentaire en usage dès les premiers temps de l'introduction des méthodes de l'algorisme (**).

Je reproduis la figure schématique de cette multiplication telle qu'on la rencontre dans la plupart des traités du XVI[e] siècle (***), qui, on n'en peut douter, ne faisaient que répéter les traités plus anciens, restés manuscrits, ou les pratiques employées dans les écoles.

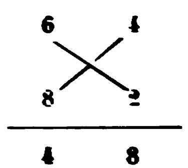
(*) Le manuscrit a été décrit par le prince Boncompagni dans son mémoire intitulé : *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo* (ATTI DELL' ACCAD. PONTIF. DE' NUOVI LINCEI, t° V, pp. 32-34).

(**) Il n'est pas nécessaire, pour le but que nous poursuivons, de rechercher l'origine de ce procédé : il suffit de constater qu'on le trouve dans *Joannis Hispalensis Liber algorismi de pratica arismetrice*, p. 97 des *Trattati d'Aritmetica* publiés par le prince Boncompagni, Rome, 1857; dans le *Liber algorizmi* de la fin du XII[e] siècle, édité par M. M. Cantor d'après un manuscrit de Heidelberg (*Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. X, p. 5); dans l'Algorisme en vers d'Arnold de Villedieu, dans l'Algorisme en prose de Jean de Sacrobosco, etc

La division complémentaire est en outre une caractéristique des procédés des abacistes. C'est assez dire que la formation des *différences* est perpétuelle dans l'arithmétique du moyen âge.

(***) Je citerai entre autres : Oronce Finée, *Arithmetica practica*, Parisiis, 1535; Gemma Frisius, *Arithmeticæ practicæ methodus facilis*, Antverpiæ, 1540; Michel Stifel, *Arithmetica integra*, Norimbergæ, 1544 (sans les lignes de direction); Jean Scheubel, *Compendium arithmeticæ artis*, Basileæ, 1549 (même observation); Jacques Micyllus, *Arithmetica logistica*, Basileæ, 1555; Maurice Steinmetz, *Arithmeticæ præcepta*, 1568.

Le produit de 6 par 8 sera marqué de la manière suivante :



Les nombres 4 et 2 sont les différences (*differentiae*) entre 10 et les facteurs 6 et 8.

Dans l'expression du produit, 8 est le produit des deux différences, toutes les deux moindres que 5, les facteurs donnés étant supérieurs à 5; le nombre des dizaines 4 est la différence entre l'un des facteurs et la *difference* de l'autre.

La règle qui en résulte s'énonce de trois façons différentes, qui ne sont, pour nous, que la traduction des trois formules :

$$ab = 10[a-(10-b)] + (10-a)(10-b),$$
$$ab = 10[(a+b)-10] + (10-a)(10-b),$$
$$ab = 10a - a(10-b).$$

La figure précédente correspond à la première formule.

Ne pourrait-on supposer, avec quelque apparence de raison, que ce trait simple —, la première indication d'opération usitée, a fini par s'appliquer spécialement à la soustraction ?

Dans la figure ci-dessus, les liaisons 6 —— 2; 8 —— 4, indiquent en réalité des soustractions à effectuer.

Les historiens des mathématiques jugeront s'il y a là autre chose qu'une simple conjecture.

Il me paraît qu'un autre symbole, celui de la multiplication (×), se rattache aux barres de direction.

Observons tout d'abord que ce signe semble avoir été introduit par Oughtred (*) en 1631, donc à une époque où la langue de

(*) *Clavis mathematicae*, 1631. Je ne puis citer cet ouvrage que d'après Wallis, *Operum mathematicorum volumen alterum*, Oxoniæ, 1693.

l'algèbre était assez avancée pour que l'on pût introduire une notation qui fût véritablement un symbole d'opération.

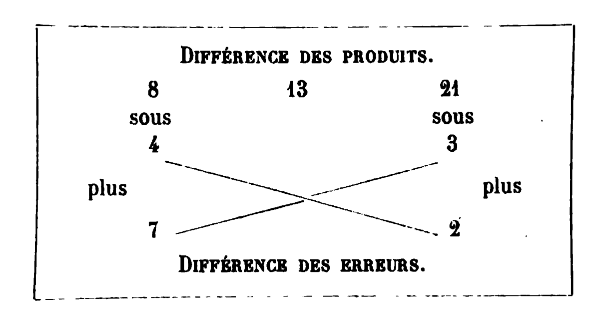
Exposons, pour commencer, la solution d'un problème par la règle de deux fausses positions, ou *regula augmenti et diminucionis.*

Supposons qu'on sache que l'hectolitre d'une marchandise vaut 13 francs de 20 sous et que l'on demande le prix du litre.

Si le litre valait 4 sous, l'hectolitre vaudrait 20 francs, somme trop forte de 7 francs; s'il vaut 3 sous, l'hectolitre vaudra 15 francs, somme encore trop élevée de 2 francs.

Le prix du litre sera $\frac{3.7-2.4}{7-2} = \frac{13}{5}$ de sou.

Le calcul est ainsi indiqué par Léonard de Pise (*) :



Cette opération s'appelle *multiplier en croix.*

On la rencontre, avec le même signe, dans l'addition des fractions (**) et dans d'autres questions. (Voir, par exemple, Butéon, Stifel, etc.)

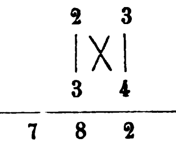
Mais le signe de la multiplication en croix s'emploie encore dans la simple multiplication des nombres entiers.

(*) *Liber Abbaci*, p. 349.

(**) On le trouve encore, sous la forme d'un X majuscule, dans des ouvrages du XVIIIe siècle. V. *De vernieude Cyfferinge van M. Willem Bartjens.* Leeuwarden, 1744.

Butéon appelle cette opération *multiplicare decussatim. (Op. cit.*, pp. 292, 341, etc.), Stifel, *multiplicare in cruce* (*Op. cit.*, f° 231 v°, f° 299 v°, etc.) Ceux qui voudront se donner la peine de parcourir les traités du XVIe siècle ne manqueront pas d'y rencontrer le signe en question. On le verra déjà dans l'arithmétique de Trévise de 1478. (Voir *Atti dell' Accad. de' nuovi Lincei*, t. XVI, p. 570.)

S'il s'agit de multiplier 23 par 34, l'opération s'indiquera de la manière suivante :



Les Italiens appellent ce procédé *moltiplicare per crocetta.*

La méthode est indiquée, sans l'emploi de la figure, dans le célèbre traité d'arithmétique publié à Trévise en 1478 (*).

Signe et procédé sont employés par Luca di Borgo San Sepolcro (*), par Joseph Vnicorno (**) et, sans doute, par une foule d'autres.

N'est-il pas hautement probable que, ce signe étant toujours lié à l'indication de certaines multiplications, un auteur comme Oughtred, auquel la symbolique n'était pas étrangère, l'ait pris comme marque, non plus de combinaisons de certains nombres par voie de multiplication, mais comme signe général d'une multiplication à effectuer?

(*) Le passage de cette arithmétique relatif au mode en question a été reproduit en fac-similé, comme d'ailleurs plusieurs autres, par M. le prince Boncompagni dans son mémoire intitulé : *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478* (ATTI DELL' ACCAD. DE' NUOVI LINCEI, t. XVI, p. 101).

(**) Voir l'article cité, note précédente, où se trouvent reproduits, page 102, un passage de la *Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita,* de Luca di Borgo San Sepolcro, édition de 1494, et page 131, le passage correspondant de l'édition de 1523.

On peut encore consulter *Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali,* pubblicati da B. Boncompagni. Roma, 1857, p. 117.

(***) *De l'Arithmetica vniversale del S. Joseppo Vnicorno.* In Venetia appresso Francesco de' Franceschi, 1598, f° 20 r°.

La multiplication de 78 par 56 est indiquée ainsi :

7 8

X

5 6

4 3 6 8

[illegible]

Nos li maires et li Eskevin

por nos et por

chouze et estable

[illegible]

ÉTUDE COMPARÉE

DE LA RÉACTION

DE L'ACIDE OXALIQUE ET DU CHLORURE FERRIQUE

SOUS L'INFLUENCE DE LA CHALEUR

ET SOUS L'INFLUENCE DE LA LUMIÈRE

PAR

M. Georges LEMOINE

Examinateur de sortie à l'École Polytechnique (*).

Je me suis proposé d'étudier numériquement une même décomposition, en l'effectuant, d'une part, sous la seule influence de la lumière, d'autre part sous la seule influence de la chaleur. Il n'y a qu'un très petit nombre de corps pour lesquels ces actions se produisent toutes deux dans des conditions facilement mesurables. J'ai choisi comme sujet d'expérience la décomposition qu'exercent l'une sur l'autre les dissolutions d'acide oxalique et de chlorure ferrique :

En équivalents : $C^4O^8H^2 + 2Fe^2Cl^3 = 4FeCl + 2HCl + 2C^2O^4$.
En atomes : $C^2O^4H^2 + Fe^2Cl^6 = 2FeCl^2 + 2HCl + 2CO^2$.

(*) Présenté à la seconde section, le 25 octobre 1888 et le 4 mai 1889 (*Annales de la Société scientifique*, 1889, XIII, première partie, pp. 61 et 64).

PREMIÈRE PARTIE

Réaction de l'acide oxalique et du chlorure ferrique sous l'influence de la chaleur.

Caractères généraux de la réaction. — La décomposition mutuelle de l'acide oxalique et du chlorure ferrique a lieu dans l'obscurité par la chaleur seule, et elle se produit assez lentement, mais régulièrement vers 100°.

Cette réaction est corrélative de la décomposition qu'éprouve vers 100°, en présence de l'eau, l'oxalate ferrique ($Fe^2O^3, 3C^2O^3$) obtenu en épuisant l'action de l'acide oxalique sur un excès d'oxyde ferrique précipité; il se dégage de l'acide carbonique et il se forme un dépôt jaune qui, d'après l'analyse, est l'oxalate ferreux ($FeO, C^2O^3 + 2HO$); ce corps reste en dissolution quand on ajoute de l'acide chlorhydrique. On peut donc admettre que si l'acide oxalique décompose le chlorure ferrique, c'est qu'au début de la réaction il y a un certain partage de l'oxyde ferrique entre les deux acides, et qu'ensuite l'équilibre est rompu incessamment, par suite de la décomposition de l'oxalate ferrique sous l'influence de la chaleur.

Mode d'expérience. — Pour étudier quantitativement cette réaction, les expériences étaient faites en prenant toujours comme terme de comparaison le mélange à volumes égaux, c'est-à-dire en proportions équivalentes, des deux dissolutions *normales* ($C^2O^4H + 2HO = 63$ grammes par litre et Fe^2Cl^3 correspondant à 56 grammes de fer par litre).

Le liquide, à différents états de dilution, était introduit sous un volume de 10, 20, 30 c. c. dans des tubes fermés à un bout, qui étaient chauffés au bain-marie.

Pour mesurer la décomposition produite, on recueillait le gaz

sur de la glycérine à 28° Baumé, dans laquelle l'acide carbonique est sensiblement insoluble.

Dans quelques expériences, la mesure se faisait par une méthode chimique consistant à doser le chlorure ferreux formé. A cet effet, on traite un volume déterminé du liquide par 2 grammes de carbonate de chaux précipité, dans une petite fiole à fond plat; après avoir laissé digérer environ une heure, on filtre rapidement et on lave à l'eau bouillie. Le chlorure ferreux, recueilli dans de l'eau acidulée par de l'acide sulfurique, est dosé par le permanganate de potasse.

Vitesse de la réaction. — L'expérience montre tout d'abord que la réaction du chlorure ferrique et de l'acide oxalique pris en proportions équivalentes n'est pas constante : elle devient de moins en moins rapide à mesure qu'elle se prolonge. Ce ralentissement tient à la diminution progressive qu'éprouve, par le fait même de la réaction, la quantité de matière décomposable. Il peut s'interpréter et se calculer de la manière suivante :

Soit, à l'origine, p la quantité du mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique pris en proportions équivalentes. Au bout du temps t, soit y la quantité du mélange déjà décomposée, la quantité non décomposée sera $(p - y)$. Si la réaction dépend seulement de la proportion du mélange actif existant à un moment donné, on doit avoir, en appelant K′ une constante,

$$\frac{dy}{dt} = K'(p - y);$$

d'où

$$\log\left(1 - \frac{y}{p}\right) = -Kt,$$

en changeant la constante pour employer les logarithmes vulgaires au lieu des logarithmes népériens.

L'inverse de la constante K a une signification très claire : c'est le temps nécessaire pour que les neuf dixièmes de la décomposition possible soient effectués, car dans ce cas on a $Kt = 1$ d'où $t = \frac{1}{K}$

Considérons aussi la réaction à l'origine; on a, d'après la formule différentielle,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = -K'p,$$

ou

$$\left(\frac{d\frac{y}{p}}{dt}\right)_0 = -K',$$

de sorte que K' est proportionnel à la fraction de décomposition observée au début de la réaction, en appelant *fraction de décomposition* le rapport de la quantité de matière décomposée à la quantité totale de matière susceptible de décomposition.

D'après ce qui précède, lorsqu'on a recueilli une série d'observations, on doit pouvoir les calculer toutes en partant d'*une seule* d'entre elles $\left(t_0, \frac{y_0}{p_0}\right)$. Il suffit pour cela d'introduire ces données dans la formule.

$$\log\left(1 - \frac{y}{p}\right) = -Kt.$$

On obtient ainsi la valeur de K, et l'on s'en sert pour calculer les différentes valeurs de $\frac{y}{p}$ correspondant à celles de t.

Les quantités y et p peuvent s'exprimer par les volumes de gaz dégagé : p est alors le volume total de gaz susceptible d'être dégagé, après épuisement complet, et se calcule d'après l'équation chimique de la réaction :

$$C^4O^8H^2 + 2Fe^2Cl^3 = 4FeCl + 2HCl + 2C^2O^4.$$

Il en résulte que pour 20 c. c. du mélange de liquides actifs normaux, c'est-à-dire avec 10 c. c. de chlorure ferrique normal (1 équivalent $162^g,5$ de chlorure ferrique ou 56 grammes de fer par litre) et 10 c. c. d'acide oxalique normal (1 équivalent ou 63 d'acide oxalique cristallisé $C^2O^3,3HO$ par litre), le volume de gaz dégagé est 243 c. c. à la température de 25°.

Le spécimen qui suit, donnant tout le détail d'une détermina-

tion faite à 100°, montre qu'il y a concordance entre l'expérience et la théorie.

Expériences simultanées faites à 100°, avec 20 c. c. et 10 c. c. de mélange de liquides normaux.

Le volume total de gaz susceptible d'être dégagé à 25° : 243 c. c. pour 20 c.c. et 121c5 pour 10 c. c.

DURÉE de l'expérience en heures.	EXPÉRIENCE avec 20 c. c. Volume de gaz		EXPÉRIENCE avec 10 c. c. Volume de gaz.	
	Expérience	Théorie	Expérience.	Théorie.
	c. c.	c. c.	c. c.	c. c.
0,533	21,3	19,7	10	10,1
1	37,1	35,6	17,4	18,2
1,533	53,3	52,4	26,0	26,7
2	66,7	66,1	33,3	33,7
2,5	80,8	79,5	40,8	40,5
3 (donnée	92	92	46,8	46,8

D'après la donnée admise, on a . . . K = 0,0689 K = 0,0704

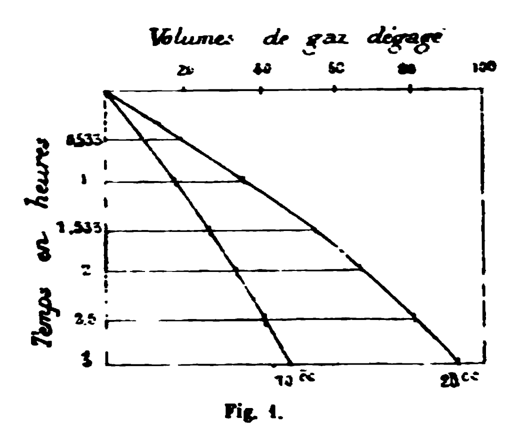


Fig. 1.

Influence de la température. — La décomposition de l'acide oxalique par le chlorure ferrique est accélérée par l'élévation de température, ainsi que la plupart des réactions chimiques. J'ai

précisé cette influence par diverses séries d'expériences. Au-dessus de 100°, le mélange des deux liquides était chauffé en tubes scellés dans des dissolutions saturées bouillantes de chlorure de sodium (108° environ), de chlorhydrate d'ammoniaque (115° environ), d'acétate de soude (124° environ). Au-dessous de 100°, on opérait avec un bain-marie maintenu à une température constante au moyen de régulateurs Schloesing, Chancel ou Moitessier.

Voici, à titre de spécimen, le détail de l'une de ces expériences.

Expérience faite à 85° avec 20 c. c. du mélange de liquides normaux,

d'où volume totale de gaz susceptible d'être dégagé à 25° : 243 c. c.

DURÉE de l'expérience en heures.	VOLUME DE GAZ. Expérience.	Théorie.
h.	c.c.	c.c.
5 ½	19	21,4
8	27,5	30,5
24	79.5	80.6
28	89,5	91,1
32 (donnée)	101	101

D'après la donnée admise, on a . . . . $K = 0,0073$.

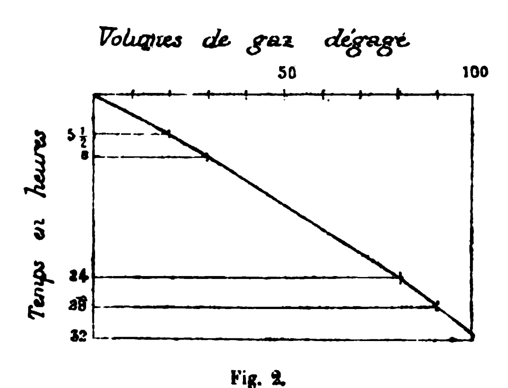


Fig. 2.

Les valeurs de la constante K, déterminées par le calcul indiqué plus haut, résument toutes les expériences de ce genre. Cette constante augmente très rapidement avec la température, suivant les allures d'une fonction exponentielle. Les variations sont tellement considérables, qu'il est assez délicat de fixer rigoureusement les valeurs absolues de K pour une température donnée : ainsi, dans le voisinage de 100°, on passe de 0,067 à 0,072 pour 0°,5 de variation de la température.

D'après de nombreuses déterminations, voici les valeurs de K que j'admets comme les plus probables :

Au-dessous de 100° :

Températures t . .	49°	71°	85°	91°	94°	99°,5 *
Valeurs de K . . .	0,000025	0,00061	0,0071	0,0165	0,027	0,067

Au-dessus de 100° :

Températures t . .	108°	115°	123°,5
Valeurs de K . . .	0,20	0,50	1,35

Ces résultats de l'expérience sont sensiblement d'accord avec la formule suivante :

$$\log K = -20{,}57 \frac{121 - t}{273 + t}.$$

Étude spéciale des basses températures. — Je me suis attaché particulièrement à l'étude de la décomposition du chlorure ferrique par l'acide oxalique à de basses températures. Il était en effet intéressant de savoir si, dans l'obscurité absolue, la réaction se produit, bien qu'avec une lenteur extrême, aux mêmes températures où elle a lieu très rapidement sous l'influence de la lumière. Dans les expériences ordinaires faites au

---

* La température de l'eau bouillante a été prise de 99°,5 parce que, dans la plupart des déterminations, la pression barométrique était moindre que 760 millimètres. Le nombre 0,067 adopté pour K est la moyenne de cinquante et une expériences, trente-trois faites en mesurant le gaz dégagé et dix-huit en appréciant la décomposition par le permanganate de potasse.

soleil, dans la belle saison, la température du mélange insolé s'élève à Paris jusque vers 44° (exceptionnellement dans des journées très chaudes, j'ai observé 51° après une longue insolation). J'ai donc étudié spécialement la réaction dans l'obscurité, à une température d'environ 40°.

Un volume de 100 c. c. du mélange des deux liquides actifs a été chauffé vingt-six jours, sans interruption, à une température variant de 37° (minimum) à 42° (maximum). On a recueilli sur la glycérine 4^{cent},4 de gaz, mais il faut y ajouter l'acide carbonique resté dissous, car la solubilité dans le mélange actif, sensiblement nulle à 100°, n'est plus négligeable vers 40°. On a pris 10 c. c. du liquide et on a fait l'extraction du gaz dissous avec une pompe à mercure, en dosant l'acide carbonique au moyen de son absorption par la potasse. Ce gaz, ramené aux 100 c. c. de volume total, correspondait à 6 c. c. L'acide carbonique total produit en vingt-six jours est donc (4$^{c.c.}$,4 + 6$^{c.c.}$,0), soit 10$^{c.c.}$,4, c'est-à-dire environ un quart pour cent (0,0025) du gaz total susceptible d'être dégagé. Il résulte de cette expérience que la réaction des deux liquides a lieu encore, mais avec une lenteur extrême, vers 40°.

A la température ordinaire, vers 15°, il y a peut-être encore dans l'obscurité une très légère réaction, mais, si elle a lieu, elle ne se produit qu'avec une infinie lenteur. Des mélanges actifs conservés pendant deux ans indiquent à peine un commencement de décomposition.

Influence de différents excès d'eau à la température de 100°. — Supposons qu'on chauffe deux tubes contenant le premier 100 c. c. du mélange de liquides actifs normaux, le second 50 c. c. de ce mélange avec 50 c. c. d'eau. Il semble, à première vue, que le second tube devrait, dans un temps quelconque, dégager moitié moins de gaz que le premier, puisqu'il contient moitié moins de matière décomposable. Il n'en est pas ainsi. L'expérience montre que l'addition d'eau *augmente* la décomposition, à peu près dans le rapport de 1,4 à 1 pour le cas qui vient d'être cité.

Ce résultat est probablement corrélatif de la décomposition progressive du chlorure ferrique par l'eau, établie par les expériences de MM. Debray, Berthelot, Wiedemann, Krecke (*). Un excès d'eau décomposant le chlorure ferrique, l'acide oxalique exerce plus facilement son action réductrice.

On ne peut pas pousser trop loin cette étude de l'influence de la dilution, car avec le mélange des liquides $^1/_{50}$ normaux et même $^1/_{20}$ normaux, il se produit, au bout de quelques heures, un dépôt ocreux assez considérable qui modifie l'état chimique du système ; au contraire, j'ai chauffé pendant neuf heures à 100° le mélange des liquides $^1/_{10}$ normaux sans avoir de dépôt : à froid le mélange des liquides $^1/_{50}$ normaux se conserve plusieurs années parfaitement limpide. Ces dissolutions $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{50}$ normales correspondent respectivement à des teneurs de $5^{gr},6$, — $2^{gr},8$, — $1^{gr},1$ de fer par litre de chlorure ferrique, soit $16^{gr},2$, — $8^{gr},1$ — $3^{gr},2$ de chlorure ferrique supposé anhydre.

Pour coordonner les résultats des expériences, reprenons la formule donnée plus haut :

$$\log\left(1 - \frac{y}{p}\right) = -Kt.$$

Chacune des réactions, dans les solutions plus ou moins diluées, suit, pour son compte, la marche progressive indiquée par cette formule, mais la constante K prend une valeur propre à chaque dilution.

Voici un spécimen d'expériences comparatives de ce genre :

(*) Voir surtout, à cet égard, les mémoires suivants : Péau de Saint-Gilles : *Annales de chimie et de physique*, 3e série, tome XXXVI. — Graham, *Annales de chimie et de physique*, 3e série, tome LXV, page 177. — Debray, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, année 1869, tome LXVIII. — MM. Favre et Valson, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tome LXXXIV, page 1165. — M. Berthelot, *Annales de chimie et de physique*, année 1873, tome XXX, page 145, et *Essai de mécanique chimique*, tome II, page 283. — M. Wiedemann, *Annales de Poggendorff*, année 1878, tome V, page 45. — M. Krecke, *Journal für praktische Chemie*, année 1871, tome III, page 286.

Expériences simultanées faites à 100°, avec 20 c. c. de mélanges de liquides normaux, $^2/_3$, $^1/_2$, $^1/_4$ normaux,

d'où volume total de gaz susceptible d'être dégagé à 25° par 20 c. c. de mélange de liquides normaux : 243 c. c.

Durée de l'expérience.	VOLUME DE GAZ DÉGAGÉ PAR 20 C. C. DE mélange de liquides normaux.		mélange de liquides $^2/_3$ norm.		mélange de liquides $^1/_2$ norm.		mélange de liquides $^1/_4$ norm.	
	Expér.	Théorie.	Expér.	Théorie.	Expér.	Théorie.	Expér.	Théorie.
h.	c.c.	c.c.	c.c.	c.c.	c.c.	c.c.	c.c.	c.c.
$^1/_2$	20	19	20	17	12	14	10	9
1	38	37	35	32	26	26	18	17
1 $^1/_2$	55	53	48	45	36	36	24	24
2	69	68	59	57	45	46	30	29
2 $^1/_2$	82	82	68	68	54	57	33	34
3 (données)	95	95	78	78	62	62	38	38
Gaz total susceptible d'être dégagé		243		162		121,5		60,8
D'après la donnée admise, on a	K = 0,0718		0,0951		0,1029		0,1434	
Rapports entre les valeurs de K	1		1,52		1,43		2,00	

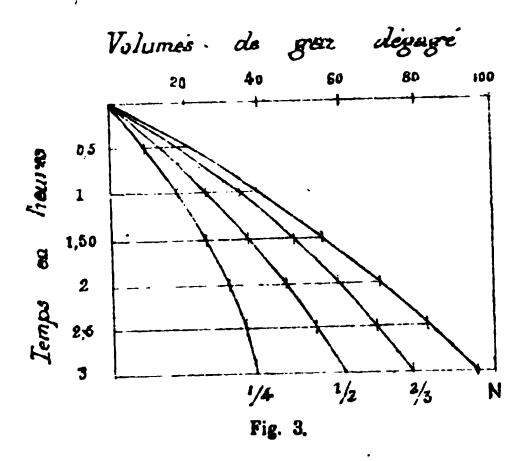


Fig. 3.

Pour résumer toutes les expériences de ce genre, le plus simple est de prendre le rapport des valeurs de K à celles qu'on a obtenues pour le mélange de liquides normaux. D'après de nombreuses déterminations, voici les valeurs que j'admets comme les plus probables :

Mélanges plus dilués que le mélange des liquides normaux :

Concentration du mélange .	$^1/_{10}$ norm.	$^1/_4$ norm.	$^1/_2$ norm.	$^2/_3$ norm.	normal.
Poids de fer par litre de chlorure ferrique. . . .	5gr,6	14gr	28gr	37gr,7	56gr
Rapports entre les valeurs de K.	2,5	1,9	1,43	1,32	1

Mélanges plus concentrés que le mélange des liquides normaux :

Concentration du mélange .	normal	$^3/_2$ norm.	binormal.	trinormal.
Poids de fer par litre de chlorure ferrique . . .	56gr	84gr	112gr	168gr
Rapports entre les valeurs de K.	1	0,77	0,55	0,32

On peut coordonner ces résultats au moyen d'une formule exprimant que la valeur K augmente avec la dilution, mais de plus en plus lentement. Soit Δ la dilution, de sorte qu'avec le mélange de liquides $^1/_{10}$ normaux on ait $\Delta = 10$: nous adopterons une relation de la forme

$$\frac{dK}{d\Delta} = \frac{c}{\Delta + b}.$$

En intégrant et déterminant les constantes de manière à satisfaire aux principales données de l'expérience, on arrive à :

$$K = 0,968 + 1,533 \log(\Delta + 0,05).$$

Influence d'un excès d'eau à différentes températures. — On peut se demander si la relation que nous venons de trouver entre la dilution et l'action chimique pour la température de 100° reste la même aux autres températures.

Les expériences faites à ce point de vue montrent que la différence, s'il y en a une, est très minime. Cependant elles tendent à indiquer que l'influence de l'eau pour augmenter la décomposition est un peu plus forte pour les températures élevées. On en jugera par le tableau suivant, qui résume les principales déterminations :

Rapports entre les valeurs de K pour les différentes dilutions, en prenant pour terme de comparaison le mélange de liquides normaux.

TEMPÉRATURES	MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS			
—	$^1/_4$ normaux.	$^1/_2$ normaux.	$^2/_3$ normaux.	normaux.
115°	2,13	1,55	1,33	1
100	1,90	1,43	1,32	1
94	»	1,39	1,23	1
85	»	1,30	1,23	1
71	1,87	1,42	1.24	1
19	1,66	»	»	1

On peut donc, comme première approximation, étendre la relation trouvée pour 100° aux autres températures, et, en particulier, à celles où s'opèrent en général les réactions faites sous l'influence de la lumière solaire. Cependant, comme ces réactions à la lumière s'opèrent à des températures peu élevées et toujours plus basses que les précédentes, il ne faudra pas être étonné si l'influence de la dilution se manifeste alors d'une façon un peu moins énergique.

SECONDE PARTIE

Réaction de l'acide oxalique et du chlorure ferrique sous l'influence de la lumière.

Nous allons maintenant reprendre une à une, sous l'influence de la lumière, les différentes expériences faites sous l'influence seule de la chaleur, et nous chercherons à interpréter d'une manière logique les résultats numériques obtenus.

Caractères généraux de la réaction. — Le mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique est d'une extrême sensibilité à l'action de la lumière ; on peut le vérifier en mettant ce liquide dans un tube très étroit, ayant seulement quelques millimètres de diamètre : dès qu'on l'expose au soleil, un violent dégagement de gaz se produit.

Cette sensibilité ne se retrouve pas sous l'influence de la lumière électrique. Quelques essais m'ont fait voir que la réaction est alors infiniment plus lente (*); elle se prêterait beaucoup moins bien aux mesures quantitatives.

J'ai dû ainsi me contenter de la lumière solaire : comme sous le climat de Paris les belles journées sont très rares, il en est résulté de grandes difficultés et surtout de grandes lenteurs pour la réalisation de ce travail.

Il est important de remarquer que, dans les conditions ordinaires des expériences, c'est l'action seule de la lumière qui détermine la décomposition ; la chaleur n'y a aucune part. En

---

(*) Cette extrême lenteur de l'action de la lumière électrique se conçoit d'après les indications que M. Potier et M. Pellat ont données sur l'influence de la température d'une source fournissant de l'énergie par rayonnement (POTIER, *Journal de Physique*, 2e série, tome V, page 56. — PELLAT, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1888, 2e semestre, page 34).

effet, les mélanges actifs exposés au soleil n'ont point dépassé la température de 51° pendant la réaction; or, à 51° dans l'obscurité, pour le même temps, le même volume de mélange actif ne dégage pas de quantités appréciables d'acide carbonique. D'ailleurs, la même réaction se fait au soleil pendant les plus grands froids de l'hiver, quoique avec une intensité un peu moindre.

Le mélange d'acide oxalique et de chlorure ferrique forme un système *exothermique*, c'est-à-dire qu'il dégage de la chaleur en se décomposant. J'aurais préféré avoir à ma disposition une réaction *endothermique*, c'est-à-dire absorbant de la chaleur, pour tâcher d'établir une relation immédiate entre la lumière absorbée et la transformation chimique; mais ces réactions endothermiques produites par la lumière sont extrêmement rares, et il n'y en n'a guère qui se seraient prêtées aux mesures quantitatives variées que je voulais entreprendre.

D'un autre côté, quoique la réaction de l'acide oxalique sur le chlorure ferrique soit *exothermique*, la chaleur dégagée n'élève que très peu la température du mélange lorsqu'il est à l'état de dissolution, parce que l'eau en absorbe immédiatement la plus grande partie. On se trouve ainsi, sous ce rapport, dans des conditions tout autres que dans les expériences de MM. Bunsen et Roscoë, faites avec des mélanges de chlore et d'hydrogène gazeux (*).

§ 1er.

Programme et méthode pour les recherches expérimentales sur l'action chimique de la lumière.

Organisation générale des expériences. — L'intensité absolue de la lumière solaire est un facteur dont on n'est pas maître. Pour n'avoir pas à tenir compte de ses variations, il suffit de faire toujours des expériences comparatives. Ainsi,

(*) Bunsen et Roscoë, *Annales de Poggendorff*, année 1857, tome C.

quelle que soit la dilution du mélange actif, nous comparerons sa décomposition à celle du mélange à volumes égaux des deux liquides normaux pris sous une épaisseur donnée, par exemple 4 millimètres. La dissolution normale d'acide oxalique renferme 1 équivalent, soit 63 grammes d'acide oxalique cristallisé par litre; la dissolution normale de chlorure ferrique renferme 1 équivalent de chlorure ferrique, soit 56 grammes de fer par litre.

Ces différentes expériences devraient être faites successivement avec les principales radiations dont se compose la lumière blanche. Mais, en pratique, il est impossible de les isoler complètement les unes des autres; d'ailleurs, si on le pouvait, on n'aurait plus qu'une intensité trop faible pour permettre des mesures quantitatives. Je me suis donc attaché surtout au jaune et au bleu, qui représentent à peu près les deux extrémités du spectre visible. Le bleu était obtenu par des verres bleus ou par des dissolutions de 25 millimètres d'épaisseur d'eau céleste concentrée ou d'azotate de cuivre. Le jaune était donné par des dissolutions saturées de chromate de potasse, placées dans des cuves rectangulaires de 25 millimètres d'épaisseur.

La plupart des expériences consistaient à exposer au soleil, pendant un temps déterminé, le mélange d'acide oxalique et de chlorure ferrique diversement dilué et contenu dans des vases de différentes grandeurs. J'ai surtout employé des cuves rectangulaires à faces parallèles, ayant pour épaisseurs intérieures 1, 4, 10, 14, 25, 65 milllimètres. Elles étaient, en général, placées normalement aux rayons du soleil. Un certain nombre de déterminations ont été faites également avec des tubes circulaires de 6, 14 et 24 millimètres de diamètre.

Après la réaction, il faut mesurer exactement la *fraction de décomposition*, c'est-à-dire le rapport de la décomposition réelle à ce qu'elle serait si la réaction était complète.

Mesure de la décomposition. — La mesure de la décomposition se fait de la même manière que pour les expériences relatives à l'action de la chaleur. Insistons sur quelques détails.

La réaction est exprimée par l'équation

$$C^4O^8H^2 + 2Fe^2Cl^3 = 4FeCl + 2HCl + 2C^2O^4.$$

On peut donc l'apprécier soit par le volume de l'acide carbonique dégagé, soit par le poids de chlorure ferreux produit.

I. — Pour mesurer le gaz dégagé, le mélange actif est contenu soit dans des tubes munis d'un bouchon, soit dans des cuves rectangulaires mastiquées à une garniture pourvue d'une tubulure. L'acide carbonique est recueilli, dans des cloches graduées, sur la glycérine où il est, comme on sait, sensiblement insoluble. Cette méthode est la plus simple, mais elle ne donne de résultats exacts que lorsque la réaction marche avec vivacité ; lorsqu'elle est lente, on peut toujours craindre l'influence perturbatrice des phénomènes de sursaturation gazeuse.

II. — Le dosage du chlorure ferreux produit se fait à l'aide du permanganate de potasse. On prélève 10 c. c. ou 5 c. c. du liquide à essayer ; on l'introduit dans une petite fiole à fond plat, contenant 2 grammes de carbonate de chaux précipitée (4 grammes pour les mélanges très concentrés) ; on bouche incomplètement, de manière à éviter l'accès de l'air, tout en laissant se dégager l'acide carbonique provenant de la réaction du carbonate de chaux. L'acide oxalique en excès passe à l'état d'oxalate de chaux insoluble ; le chlorure ferrique se change en oxyde ferrique. Au bout d'une heure, on filtre rapidement, en lavant avec de l'eau bouillie, jusqu'à ce que le ferricyanure de potassium ne donne plus de coloration. Le liquide filtré est recueilli dans des vases à saturation, contenant 50 c. c. d'acide sulfurique au $^1/_{10}$ (100 c. c. s'il doit avoir beaucoup de permanganate de potasse consommé). On dose le chlorure ferreux en versant progressivement une dissolution titrée de permanganate de potasse (dont 19 c. c. environ correspondent à $0^{gr},1$ de fer).

Cet essai chimique est le procédé de mesure que j'ai le plus fréquemment employé. Il perd de sa sensibilité quand il y a très peu de chlorure ferreux, parce qu'alors l'oxydation prend proportionnellement plus d'importance. Mais dans les cas ordinaires, les résultats sont suffisamment exacts.

Expériences préalables. — Les études qui font l'objet de ces recherches nécessitaient un certain nombre d'expériences préalables dont le cadre de ce travail ne permet de citer que les conclusions générales.

I. — L'action chimique, avec les réactifs employés, cesse immédiatement après la suppression de la lumière. En d'autres termes, l'*action continuatrice* est nulle ou insensible.

On sait que MM. Bunsen et Roscoë sont arrivés à la même conclusion pour les mélanges de chlore et d'hydrogène gazeux.

II. — Il n'y a pas de retard sensible dans l'action chimique initiale : en d'autres termes, il n'y a que peu ou point de travail moléculaire nécessaire pour la mise en train de la réaction (induction photo-chimique).

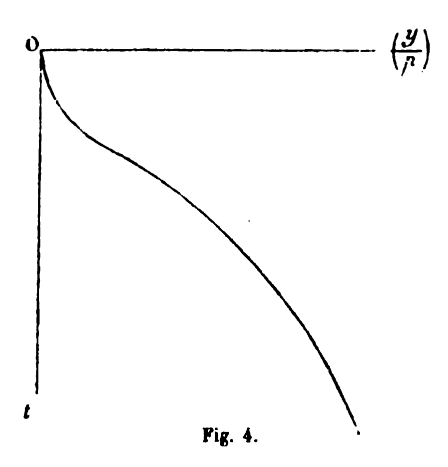


Fig. 4.

On arrive à cette conclusion d'après les expériences sur la vitesse de la réaction qui seront décrites plus loin (§ 4). S'il y avait un certain retard dans l'action chimique au commencement de l'insolation, la courbe représentant la fraction de décomposition $\frac{y}{p}$ en fonction du temps t traduirait ce retard par une forme sinueuse où la tangente à l'origine se rapprocherait de l'échelle des temps. Or, les expériences faites pendant les belles journées,

où l'intensité est aussi constante que possible, indiquent une action continue.

III. — L'insolation préalable de chacun des réactifs séparés n'a qu'une influence très minime sur la rapidité de la décomposition chimique qui se produit ensuite à la lumière après qu'on les a mélangés.

IV. — L'influence des rayons ultra-violets est très minime, probablement parce qu'elle ne s'exerce que dans les premières couches des milieux traversés, et que leur absorption est presque immédiate.

Ainsi, prenons deux cuves de 4 millimètres d'épaisseur, à faces parallèles, dont la première ait ses parois en verre, et la seconde en spath d'Islande ; remplissons-les d'un même mélange actif et exposons au soleil pendant le même temps : il y aura une décomposition un peu plus marquée dans la seconde cuve, mais la différence est presque négligeable.

Examen au spectroscope des dissolutions de chlorure ferrique pris seul ou mêlé à l'acide oxalique. — I. — Lorsqu'on examine au spectroscope les dissolutions de chlorure ferrique placées dans des cuves rectangulaires, on constate tout d'abord que le spectre est continu. La partie située du côté du violet disparait progressivement à mesure qu'on augmente soit l'épaisseur, soit la concentration.

Pour le chlorure ferrique $^1/_2$ normal, avec 1 millimètre, le bleu se voit encore, mais affaibli ; avec 4 millimètres, il ne reste plus que très peu de bleu ; avec 10 millimètres, le vert est déjà affaibli ; avec 25 millimètres, une partie du vert disparait ; avec 65 millimètres, on ne voit plus guère que la moitié du vert.

Pour le chlorure ferrique $^1/_{20}$ normal : avec 1 millimètre, on voit tout le spectre ; avec 4 millimètres, il subsiste à peu près tout entier ; avec 10 millimètres, le bleu commence à s'affaiblir ; avec 25 millimètres, le bleu disparait en grande partie et le vert commence à s'affaiblir.

Ces observations montrent déjà que la diminution d'épaisseur et la dilution s'équivalent à peu près proportionnellement. Ainsi, 1 millimètre de chlorure ferrique $^1/_2$ normal équivaut optiquement à 10 millimètres de chlorure ferrique $^1/_{20}$ normal.

II.—Des observations semblables ont été faites sur les mélanges de chlorure ferrique et d'acide oxalique employés comme réactif sensible à l'action de la lumière. On reconnait qu'ils ne présentent pas de différences appréciables avec les dissolutions de chlorure ferrique correspondantes, où l'eau remplacerait l'acide oxalique. Cela revient à dire que l'acide oxalique est complètement transparent.

Examen au spectroscope des milieux absorbants servant à obtenir les lumières colorées. — I. — La lumière jaune obtenue au moyen d'une dissolution saturée de chromate neutre de potasse de 25 millimètres d'épaisseur, laisse passer : le rouge, l'orangé, et le jaune très brillants, avec environ un tiers du vert. C'est, comme on le voit, à peu près le même résultat qu'avec une épaisseur de 25 millimètres de chlorure ferrique $^1/_2$ normal.

II. — La lumière bleue obtenue au moyen d'une dissolution concentrée d'eau céleste de 25 millimètres d'épaisseur laisse passer : l'indigo, le bleu et le vert (ce dernier un peu affaibli), très peu d'orangé.

Les verres bleus employés dans les diverses expériences laissent passer : l'indigo, le bleu (bande noire dans le vert), une assez grande partie du vert, à peu près rien du jaune et de l'orangé (grande bande noire) et environ moitié du rouge.

Division des recherches expérimentales. — Les expériences entreprises pour déterminer les conditions de la décomposition de l'acide oxalique et du chlorure ferrique sous l'influence de la lumière comprennent naturellement les divisions suivantes :

1° Absorption ;

2° Réaction sous différentes épaisseurs et avec différentes formes de vases : premiers moments de la réaction ;

3° Marche progressive de la décomposition sous différentes épaisseurs et avec différentes formes de vases;

4° Influence de la dilution.

Je ne m'occuperai, dans ce travail, que des expériences faites dans la belle saison, par un ciel pur : elles correspondent ainsi à des situations de l'atmosphère peu différentes les unes des autres. L'influence des différentes conditions atmosphériques sera étudiée dans une autre publication.

§ 2.

Absorptions.

La première difficulté, dans l'étude qui nous occupe, est l'absorption subie par la lumière en traversant les différents milieux et notamment le chlorure ferrique.

Principe de la méthode employée. — J'ai déterminé cette absorption par une méthode chimique. Derrière les dissolutions à étudier, placées dans des cuves rectangulaires de différentes épaisseurs, on dispose d'autres cuves rectangulaires identiques entre elles et contenant un mélange actif d'acide oxalique et de chlorure ferrique. On a d'autre part disposé un mélange actif semblable sans interposition d'aucun liquide absorbant. On fait arriver la lumière : les rapports entre les quantités de matière décomposées permettent d'apprécier les rapports entre les quantités de lumière transmises par les différents milieux.

Distinction entre les transmissions apparente et réelle. — Cette expérience donnerait immédiatement l'absorption si la lumière était homogène ou si, avec une lumière complexe, le réactif servant de témoin n'avait qu'une épaisseur infiniment mince.

Dans le cas général, les différentes radiations dont est formée la lumière employée agissent très inégalement sur notre réactif, à cause de la couleur jaune propre au chlorure ferrique. Les

radiations jaunes, en pénétrant dans le mélange actif, impressionnent les dernières couches presque autant que les premières ; avec les radiations bleues, l'action, quoique très énergique, est presque limitée aux premières couches L'ensemble des réactions ne donne qu'une ***transmission apparente***.

L'expérience montre, en effet, que les résultats ne sont pas les mêmes suivant l'épaisseur et la dilution du mélange actif, pris comme témoin ; par exemple :

Mélange actif	de liquides	normaux	sous l'épaisseur	4	millimètres.
—	—	—	—	1	—
—	—	$^1/_{10}$ norm.	—	4	—
—	—	—	—	1	—

Avec ce dernier mélange actif, le plus faible que l'on puisse pratiquement employer, on se rapproche des transmissions élémentaires que l'on observerait avec un témoin d'une épaisseur infiniment mince : seulement la sensibilité des mesures est alors très restreinte.

On va voir que le calcul peut ramener le cas général des expériences d'absorption à celui d'une cuve infiniment mince, et réciproquement.

Transparence des dissolutions d'acide oxalique. — Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de vérifier par l'expérience la transparence des dissolutions d'acide oxalique, afin de savoir si le mélange d'acide oxalique et de chlorure ferrique équivaut, au point de vue physique, au mélange en mêmes proportions d'eau distillée et de chlorure ferrique.

Le 6 septembre 1890, par un très beau temps, j'ai déterminé comparativement les décompositions subies en neuf minutes par des mélanges normaux de chlorure ferrique et d'acide oxalique, dans des cuves de 4 millimètres placées derrière des cuves de 25 millimètres, contenant l'une de l'eau distillée, l'autre une dissolution normale d'acide oxalique. Avec 10 c. c., les quantités de permanganate de potasse versées pour avoir la teinte rouge ont été :

	c. c.
Radiation à travers l'eau	5,20
— l'acide oxalique	5,20

Toutefois, avant d'assimiler complètement les mélanges de chlorure ferrique et d'acide oxalique aux mélanges semblables de chlorure ferrique et d'eau, il faut se préoccuper de l'oxalate ferrique qui peut se former par suite du partage de l'oxyde de fer entre les deux acides. Le chlorure ferrique et l'oxalate ferrique préparé directement ont, il est vrai, la même teinte. Mais, pour lever toute objection, j'ai comparé, par une méthode photométrique, les absorptions à travers les deux mélanges, l'un de chlorure ferrique et d'eau, l'autre d'acide oxalique et de chlorure ferrique. Elles sont sensiblement les mêmes. La question est donc résolue.

Relations entre les transmissions correspondant à des dissolutions de diverses dilutions.— Lorsqu'on compare des dissolutions de diverses dilutions, par exemple celles de chlorure ferrique, il faut, pour obtenir une même transmission, prendre des épaisseurs proportionnelles aux dilutions. Ainsi la transmission à travers 1 millimètre de chlorure ferrique normal est la même qu'à travers 10 millimètres de chlorure ferrique $^1/_{10}$ normal. Ce principe m'a semblé devoir être vérifié par une expérience directe.

Le 10 septembre 1891, par un très beau temps, j'ai exposé au soleil, normalement aux rayons lumineux, deux cuves, l'une de 4 millimètres avec du chlorure ferrique $^1/_2$ normal, l'autre de 40 millimètres avec du chlorure ferrique $^1/_{20}$ normal : d'après la relation précédente, les transmissions devaient être égales. Les témoins permettant de les apprécier étaient deux cuves de 4 millimètres contenant le mélange à volumes égaux de chlorure ferrique et d'acide oxalique, tous deux en dissolution demi-normale. Avec 10 c. c., les quantités de permanganate de potasse versées pour avoir la teinte rouge ont été :

Radiation à travers	4	mill. de	chlorure ferrique	$^1/_2$	normal :	6,1,
—	40	—	—	$^1/_{20}$	—	6.4,

nombres à peu près égaux.

Relations entre les transmissions réelles et les transmissions apparentes. — Comme définition de l'intensité lumineuse, je prends la décomposition de l'unité de poids du mélange actif, en choisissant cette unité assez petite pour que, quelle que soit la concentration de sa dissolution, l'absorption physique de la lumière, en le traversant, soit négligeable : ce sera, par exemple, un millionième de milligramme.

Soit une lumière composée d'une série de radiations d'intensités n, n', n''..., et soit 1 la somme de ces intensités. Un milieu absorbant quelconque, d'épaisseur l, réduira chaque radiation n à na^l. Les intensités totales, à l'entrée et à la sortie, seront donc

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1 = n + n' + n'' + \ldots,$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i = na^l + n'a'^l + n''a''^l + \ldots.$$

La transmission réelle ou élémentaire, si on veut l'appeler ainsi, est i, l'absorption est $(1 - i)$.

Faisons une première série d'expériences en comparant ces intensités i et 1 par leurs actions chimiques sur notre réactif très dilué, placé dans des cuves très minces. En faisant des mesures pour un nombre suffisant de valeurs de l, nous pourrons déterminer approximativement n, n'... correspondant à a, a'... Ce sera une première valeur provisoire de la transmission.

Dans une seconde série d'expériences, faisons maintenant passer les lumières 1 et i dans le réactif contenu dans deux rectangles d'épaisseur quelconque λ. Ce réactif, dont nous négligions tout à l'heure l'absorption, en exerce une, pour chaque radiation, d'après une loi particulière α^λ. Cette radiation d'intensité n y décompose $nd\lambda$ dans la première couche, $n\alpha^\lambda d\lambda$ dans la dernière ; pour l'ensemble de toute l'épaisseur λ, la décomposition totale est $n\int_0^\lambda \alpha^\lambda d\lambda$. Chacune des radiations agit suivant la loi qui lui est propre. Dès lors, les décompositions effectuées par les lumières 1 et i seront respectivement

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S = n\int_0^\lambda \alpha^\lambda d\lambda + n'\int_0^\lambda \alpha'^\lambda d\lambda + \ldots,$$

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s = na^l\int_0^\lambda \alpha^\lambda d\lambda + n'a'^l\int_0^\lambda \alpha'^\lambda d\lambda + \ldots,$$

qui se réduisent à 1 et i si $\lambda = 0$.

La transmission *apparente* est $\frac{s}{S}$.

Bornons-nous au cas spécial où le milieu dont on mesure l'absorption est le chlorure ferrique : c'est l'une des déterminations les plus fréquentes dans ce travail. Si la concentration de ce liquide est telle qu'il ait la même transparence que le mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique pris comme témoin, on a $a = \alpha$.

Si le mélange actif employé est plus dilué que le précédent, on remarque qu'une même absorption correspond à une épaisseur proportionnelle à la dilution : ainsi, avec des liquides dix fois plus dilués, $a^{10\lambda}$ devra remplacer a^{λ} dans la formule pour que les effets soient les mêmes.

On voit qu'on peut maintenant calculer la transmission apparente correspondant à la seconde série d'expériences (3) et (4), d'après la transmission réelle correspondant à (1) et (2). S'il y a identité avec l'observation, c'est que les formules primitives (1) et (2) sont exactes. S'il y a une différence, on en retouchera les constantes pour faire un calcul de seconde approximation, et ainsi de suite, de manière à vérifier la seconde série d'expériences, faite dans les meilleures conditions de sensibilité et d'exactitude. La formule, une fois établie, doit vérifier toutes les autres expériences du même genre faites pour un même état de l'atmosphère.

Les intégrations des formules qui précèdent se font facilement, car :

$$\int_0^{\lambda} a^{\lambda} d\lambda = \frac{a^{\lambda}}{\mathrm{L}a} - \frac{1}{\mathrm{L}a}.$$

En pratique, une formule de coordination à quatre termes est suffisante. Elle revient à considérer la lumière blanche comme résultant du mélange de quatre radiations simples.

Dans la plupart des expériences, j'ai pris pour témoin le mélange de liquides actifs demi-normaux dans des cuves de 4 millimètres, car alors la réaction est à la fois très sensible et

exactement mesurable. C'est principalement pour cette série que j'ai cherché à établir la coïncidence entre les formules et l'observation. Une autre série d'expériences a été faite avec le mélange des liquides actifs $^1/_{10}$ normaux dans des cuves de 1 millimètre, mais surtout en vue de diriger les calculs, conformément aux explications précédentes, car alors on se rapproche du cas idéal de cuves infiniment minces.

Résultats de l'expérience : absorption exercée par le chlorure ferrique sur la lumière blanche. — Les expériences d'absorption faites avec le chlorure ferrique de différentes dilutions ont été coordonnées par le calcul conformément à la méthode précédente. On trouvera ci-après les résultats obtenus pendant la belle saison, avec un ciel bien pur. Ils oscillent, en général, autour des valeurs résultant de la formule suivante, qui exprime, pour le chlorure ferrique demi-normal, la transmission élémentaire telle qu'on l'observerait en prenant pour témoin le mélange actif de chlorure ferrique et d'acide oxalique sous une épaisseur infiniment mince :

$$i = 0{,}010\,(0{,}986)^t + 0{,}07\,(0{,}40)^t + 0{,}13\,(0{,}10)^t + 0{,}79\,(10^{-10})^t.$$

Pour une autre dilution, par exemple pour celle qui est dix fois plus grande, il suffit, d'après ce qui a été dit plus haut, de remplacer chacun des termes a^t par a^{10t} pour avoir la même transmission. De là les formules suivantes, qui dérivent par le calcul de la précédente :

Chlorure ferrique $^1/_{10}$ normal :

$$i = 0{,}010\,(0{,}9986)^t + 0{,}07\,(0{,}9125)^t + 0{,}13\,(0{,}7944)^t + 0{,}79\,(0{,}1)^t;$$

Chlorure ferrique $^1/_4$ normal :

$$i = 0{,}010\,(0{,}993)^t + 0{,}07\,(0{,}6325)^t + 0{,}13\,(0{,}316)^t + 0{,}79\,(10^{-5})^t.$$

Ces formules conduisent, tous calculs faits, aux valeurs suivantes pour les transmissions apparentes obtenues en prenant

pour témoins différents mélanges actifs contenus dans des cuves rectangulaires de différentes épaisseurs. Nous rapprochons ces valeurs des nombres donnés par l'expérience.

Chlorure ferrique $^1/_2$ normal, soit 28 grammes de fer par litre.

Transmissions *i* pour cent de lumière blanche incidente.

		ÉPAISSEURS *l*.				
		1	4	10	25	65 millim.
Témoin : mélange actif dans des cuves infiniment minces.						
Théorie		5,1	1,1	0.9	0,7	0,4
Témoin : mélange actif de liquides $^1/_{10}$ normaux dans des cuves de 1 millim.						
Théorie		9,6	2,2	1,7	1,4	0,9
Expérience :	16 mai 1890	**6,4**	**5.0?**	**2,3**	**0,8**	**0,7**
	19 février 1891	**10,5**	**3,6**	**2,2**	»	»
	27 février 1891	»	**1,7**	»	»	»
Témoin : mélange actif de liquides $^1/_2$ normaux dans des cuves de 4 millim.						
Théorie		29,2	14,6	9,9	8,0	4,6
Expérience :	12 juin 1888	**24,3**	**12,4**	»	»	»
	24 août 1888	**26,8**	**13,8**	**8.9**	»	»
	4 septembre 1888 (*)	**29,6**	**11,9**	»	»	»
	22 octobre 1888	**29,0**	**15,0**	**10,0**	**4.0**	**2,9**
	29 août 1889	**21,2**	**13,2**	**8,0**	**3,6**	**2,0**
	27 septembre 1889	**24,0**	**10,5**	**6,2**	**2,9**	»
	16 mai 1890	**23,3**	**15,1**	**10,2**	**5,0**	**2,2**
	29 mars 1890	**31,0**	**15,4**	**10,5**	»	»
	18 février 1891	**28,1**	**15,0**	»	»	»
	27 février 1891	**30,6**	**13,3**	»	»	»
	14 mars 1891	**31,2**	**13,0**	»	»	»

(*) L'expérience du 4 septembre 1888 a été faite à Tonnerre (Yonne), à l'extérieur de la ville, *à la fin de la journée*, de 5^h26 à 5^h50, tandis que les autres expériences ont été faites en général au milieu de la journée, avant 2 heures ou 3 heures. On voit ainsi qu'avec un beau ciel, l'accroissement de l'épaisseur atmosphérique traversée ne modifie pas beaucoup la valeur de la transmission.

Chlorure ferrique 1/20 normal, soit 2gr,8 de fer par litre.

Transmissions i pour cent de lumière blanche incidente.

	ÉPAISSEURS l.				
	1	4	10	25	65 millim.
Témoin : mélange actif dans des cuves infiniment minces.					
Théorie	25,6	11,0	5,1	1,7	0,9
Témoin : mélange actif de liquides 1/10 normaux dans des cuves de 1 millim.					
Théorie	38,7	18,4	9,6	3,3	1,8
Expérience : 16 mai 1890.	**38,1**	**21,9**	**8,7**	**3,5**	**0,7**
9 septembre 1890 . . .	**58,0 ??**	**22,7**	**12,7**	**3,1**	**0,6**
Témoin : mélange actif de liquides 1/2 normaux dans des cuves de 4 millim.					
Théorie	72,5	49,7	29,2	14,8	10,4
Expérience : 16 mai 1890	**77,3**	**55,0**	**37,3**	**18,6**	**6,2**
24 février 1891	**67,8**	**50,8**	**35,3**	»	»
14 mars 1891	»	**55,7**	»	»	»

Les nombres théoriques obtenus concordent suffisamment avec l'expérience : on ne peut pas, sans de très grands efforts de calculs numériques, espérer beaucoup mieux avec des formules où de petites modifications dans les constantes changent notablement les résultats. D'ailleurs, il faut remarquer que les transmissions éprouvent des variations assez fortes suivant l'état de l'atmosphère (*).

Résultats de l'expérience : absorption exercée par le chlorure ferrique sur la lumière bleue. — Des expériences semblables ont été faites avec la lumière bleue. On conçoit qu'elles doivent conduire à une absorption plus grande.

Les déterminations sont plus délicates qu'avec la lumière

(*) Ce n'est pas ici le lieu de développer ce sujet; pour en donner une idée, disons seulement que la transmission apparente obtenue en prenant pour témoin le mélange actif demi-normal dans des cuves de 4 millimètres, qui est prise de 12 % environ dans les formules précédentes, a été trouvée de 8 % avec des ciels exceptionnellement purs et monte jusqu'à 35 % avec les ciels très blancs et nébuleux de l'hiver, où cependant le soleil donne encore de l'ombre. Dans ce dernier cas, la composition de la lumière solaire après avoir traversé l'atmosphère n'est plus la même que dans les beaux jours d'été : elle se rapproche de la lumière jaune et est ainsi plus facilement transmise par le chlorure ferrique.

naturelle Néanmoins, leur ensemble est assez bien représenté par la formule suivante, exprimant les transmissions élémentaires pour le chlorure ferrique demi-normal :

$$i = 0{,}002\,(0{,}986)^l + 0{,}033(0{,}40)^l + 0{,}075(0{,}10)^l + 0{,}89(10^{-10})^l$$

Lumière bleue. Transmissions i pour cent de lumière bleue incidente.

	ÉPAISSEURS l				
	1	4	10	25	65 millim.

Chlorure ferrique $^1/_2$ normal, soit 28 grammes de fer par litre.

Témoin : mélange actif dans des cuves infiniment minces.

	1	4	10	25	65
Théorie	2,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Témoin : mélange actif de liquides $^1/_{10}$ normaux dans des cuves de 1 millim.

	1	4	10	25	65
Théorie	4,8	0,6	0,4	0,3	0,2
Expérience : 14 mars 1890 (verres bleus) .	**1,0**	**0.7**	**0**	**0**	»
15 sept. 1890 (eau céleste) .	**2,5**	**1,2**	»	»	»

Témoin : mélange actif de liquide $^1/_2$ normaux dans des cuves de 4 millim.

	1	4	10	25	65
Théorie	18,1	4,1	3,1	2,5	1,4
Expérience : 17 sept. 1889 (verres bleus) .	**12,0**	**6,3**	**4,6**	»	»
23 oct. 1890 (verres bleus) .	»	**6,1**	»	»	»
15 sept. 1890 (eau céleste) .	**15,5**	**8,6**	»	»	»

Chlorure ferrique $^1/_{20}$ normal, soit $2^{gr},8$ de fer par litre.

Témoin : mélange actif dans des cuves infiniment minces.

	1	4	10	25	65
Théorie	18,1	5,5	2,3	0,2	0,2

Témoin : mélange actif de liquides $^1/_{10}$ normaux dans des cuves de 1 millim.

	1	4	10	25	65
Théorie	26,5	11,3	4,8	0,5	0,4
Expérience : 17 décembre 1890, à Perpignan (verres bleus).	»	**14,6**	**3,0**	»	»

Témoin : mélange actif de liquides $^1/_2$ normaux dans des cuves de 4 millim.

	1	4	10	25	65
Théorie	57,9	35,9	18,0	3,8	3.3
Expérience : 23 oct. 1890 (verres bleus) .	?	**42,1**	**16,7**	**10,9 ? ?**	**3,2**
15 sept. 1890 (eau céleste) .	**52,0**	**25,9**	**16,7**	»	»

Résultats de l'expérience : absorption exercée par le chlorure ferrique sur la lumière jaune. — Avec la lumière

jaune, les conditions sont presque inverses des précédentes. Le jaune est à peu près la couleur du chlorure ferrique, de sorte que l'absorption est presque nulle. Mais, d'autre part, l'action chimique des radiations jaunes est très faible, de sorte qu'on doit la prolonger plusieurs heures, tandis que quelques minutes suffiraient avec les radiations blanche ou bleue. Il faut donc pour ces expériences de très belles journées.

L'ensemble des résultats peut se représenter par la formule suivante, exprimant les transmissions élémentaires pour le chlorure ferrique demi-normal :

$$i = 0{,}85(0{,}986)^l + 0{,}15(0{,}40)^l.$$

Lumière jaune. Transmissions i pour cent de lumière incidente.

	Épaisseur l				
—	1	4	10	25	65 millim.
Chlorure ferrique ${}^1/_2$ normal, soit 28 grammes de fer par litre.					
Témoin : mélange actif dans des cuves infiniment minces.					
Théorie	89,8	80,7	73,9	59,8	34,0
Témoin : mélange actif de liquides ${}^1/_2$ normaux dans des cuves de 4 millim.					
Théorie	94,2	87,6	80,4	65,0	37,0
Expérience : 18 octobre 1888	»	**88,4**	»	»	»
8 septembre 1889	?	**87,1**	?	»	»
15 octobre 1889	»	»	»	**69,0**	**36,6**
20 février 1891.	»	**81,8**	»	**69,2**	**39,8**
25 septembre 1891	»	»	»	**51,7**	**24,0**
Chlorure ferrique ${}^1/_{20}$ normal, soit $2^{gr},8$ de fer par litre.					
Témoin : mélange actif dans des cuves infiniment minces.					
Théorie	98,7	94,9	89,8	83,6	77,6
Témoin : mélange actif de liquide ${}^1/_2$ normaux dans des cuves de 4 millim					
Théorie	99,2	97,2	94,2	90,0	84,4
Expérience : 10 octobre 1890	»	**92,0**	»	»	**80,**

§ 3.

Réactions sous différentes épaisseurs et avec différentes formes de vases : premiers moments de la réaction.

Les actions chimiques de la lumière sous différentes épaisseurs et avec différentes formes de vases sont solidaires de la loi d'absorption que le mélange actif coloré exerce en lui-même sur les rayons qui le traversent. Cherchons à établir entre ces variables une relation géométrique.

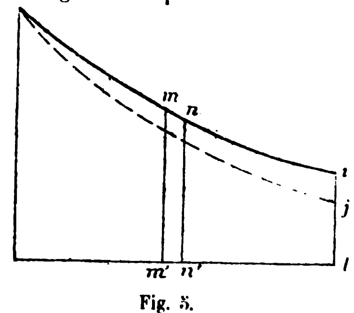


Fig. 5.

Calcul des quantités de réactif décomposées pour différentes épaisseurs. — Soit une courbe $i = f(l)$ donnant les proportions de lumière transmises pour différentes épaisseurs l.

Dans une couche très mince dl, le poids de réactif décomposé est proportionnel à l'intensité lumineuse : il peut donc se représenter par un petit rectangle $mm'nn'$, dont la surface est idl. On voit ainsi que le poids total de réactif décomposé dans un rectangle d'épaisseur l pendant un temps très court est proportionnel à la surface de la courbe $i = f(l)$. En d'autres termes, on l'obtiendra par une intégration.

C'est sur cette relation très simple que s'appuie tout ce qui va suivre.

On n'a ainsi qu'une première approximation, pour les deux raisons suivantes qui, en fait, n'ont qu'une importance secondaire.

D'abord, on assimile les mélanges de chlorure ferrique et

d'acide oxalique aux mélanges semblables de chlorure ferrique et d'eau ; or, dans le mélangé de chlorure ferrique et d'acide oxalique, il peut y avoir partage entre les deux acides, et l'on suppose implicitement que le chlorure ferrique et l'oxalate ferrique ont le même pouvoir absorbant ; nous avons vu, en étudiant les absorptions, qu'il en est ainsi, ou à très peu près.

D'autre part, outre l'absorption physique, il peut y avoir une autre absorption correspondant au travail moléculaire de décomposition que *produit* ou *excite* la lumière ; il faudrait alors, au lieu de la courbe *i*, prendre une autre courbe, un peu au-dessous, exprimant l'absorption totale (*). Mais la différence est très faible. On va voir, en effet, que les décompositions observées sont à peu près égales aux décompositions calculées sans attribuer aux radiations lumineuses aucune dépense spéciale d'énergie en dehors de l absorption physique.

Influence de l'appauvrissement progressif du mélange actif. — Nous venons de voir que le calcul des quantités de réactif décomposées pour différentes épaisseurs se ramène à une intégration d'après la loi de transmission en fonction de l'épaisseur $i = f(l)$.

(*) On peut calculer comme il suit l'absorption correspondant au travail de décomposition chimique.

Dans l'intervalle dl la lumière a l'intensité j à l'entrée, $(j - dj)$ à la sortie. La différence vient : 1° de l'absorption physique correspondant à la perte di de l'intensité lumineuse ; 2° de l'intensité lumineuse usée à produire la décomposition chimique dans l'intervalle dl ; cette décomposition est d'autant plus grande que la lumière est plus intense ; on peut donc l'exprimer par $kjdl$, en appelant k une constante. Il vient ainsi, pour la perte totale de lumière dans l'intervalle dl :

$$dj = di + kj\,dl.$$

A cette relation, il faut joindre celle qui exprime l'absorption physique exercée par le chlorure ferrique optiquement équivalant au mélange actif de chlorure ferrique et d'acide oxalique considéré ; elle est de la forme :

$$i = \psi(l).$$

Le problème est donc algébriquement déterminé. On peut même ainsi se rendre compte par tâtonnements de l'ordre de grandeur des deux absorptions en empruntant à l'expérience la différence entre les décompositions réelle et calculée.

En fait, cette différence est très faible.

Le calcul s'applique tout d'abord au mélange actif, tel qu'il existe à l'origine. Peu à peu il s'appauvrit, par la réaction même, ce qui modifie sa transparence; mais si l'on connaît la loi d'absorption correspondant à chaque dilution, on peut tenir compte par le calcul de cette modification progressive.

Il se présente ainsi pour chaque forme de vase deux problèmes : l'étude de la réaction à l'origine et l'étude de la vitesse de la réaction.

Nous examinerons successivement les résultats obtenus avec des cuves rectangulaires, avec des tubes circulaires et avec des tubes elliptiques; ces derniers équivalent à des tubes circulaires que la lumière traverse obliquement.

Rectangles : réaction à l'origine. — Pour les cuves rectangulaires, on part des formules de transmission données pour le chlorure ferrique demi-normal :

$$i = na^l + n'a'^l + \cdots$$

La décomposition du mélange, optiquement équivalent, de chlorure ferrique normal et d'acide oxalique normal en sera l'intégrale :

$$S = \int_0^l i dl = \frac{na^l}{La} + \frac{n'a'^l}{La'} + \cdots - \frac{n}{La} - \frac{n'}{La'} - \cdots$$

La *décomposition moyenne*, pour 1 millimètre de trajet de la lumière, sera le rapport de la décomposition totale à la longueur traversée :

$$s = \frac{1}{l} \int_0^l i dl.$$

Il faut à ces nombres théoriques comparer les résultats numériques de l'expérience. Ils s'obtiennent en exposant au soleil des cuves rectangulaires de différentes épaisseurs, 1, 4, 10, 25, 65 millimètres, et en mesurant les fractions de décomposition. Pour n'avoir pas à tenir compte de l'intensité absolue de la lumière, on rapporte les résultats à ceux d'une même cuve

(4 millim.) prise pour unité. On obtient une série de rapports que l'on compare à ceux que donne la théorie.

L'état de l'atmosphère dans ces expériences devrait en toute rigueur être le même que celui pour lequel a été trouvée la formule de transmission servant de base aux calculs; il en diffère du moins assez peu, comme on le verra par les notes relatives à chaque expérience; nous nous bornons d'ailleurs ici au cas d'un ciel pur, pendant la belle saison.

Examinons successivement ce qui se passe dans les différentes lumières blanche, bleue et jaune.

Résultats des expériences pour les cuves rectangulaires avec la lumière blanche. — **I.** — Prenons d'abord le mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique normaux.

La formule de transmission admise pour le chlorure ferrique demi-normal, optiquement équivalent à ce mélange actif, est (§ 2) :

$$i = 0{,}01\,(0{,}986)^l + 0{,}07\,(0{,}40)^l + 0{,}15\,(0{,}10)^l + 0{,}79\,(10^{-10})^l,$$

d'où, avec les logarithmes vulgaires,

$$\int_0^l idl = \left\{ \begin{array}{llll} -0{,}709\,(0{,}986)^l & -0{,}0764\,(0{,}40)^l & -0{,}0564\,(0{,}10)^l & -0{,}0343\,(10^{-10})^l \\ +0{,}709 & +0{,}0764 & +0{,}0564 & +0{,}0343 \end{array} \right.$$

On en déduit, tous calculs faits, pour les dimensions des cuves habituellement employées :

	ÉPAISSEURS DES RECTANGLES.				
	1	4	10	25	65 millim.
Absorption totale $\int_0^l idl$	0,141	0,204	0,260	0,378	0,593
Absorption moyenne $\frac{1}{l}\int_0^l idl$ . . .	0,144	0,051	0,026	0,015	0,009
[illegible] rectangle de 4 millimètres. .	2.76	1	0,51	0,30	0,18

Voici la comparaison avec l'expérience :

Expériences comparatives rapportées à un rectangle de 4 millimètres pour des mélanges de liquides actifs normaux.

ÉPAISSEURS DES CUVES en millimètres.				État atmosphérique d'après la transmission apparente de 4 m. de chlorure ferrique $^1/_2$ normal (*).	
1	10	25	65		
Rapports donnés par la théorie :					
2,76	0,51	0,30	0,18	0,12	
Rapports donnés par l'expérience :					
3,06	»	»	»	»	11 juin 1889, beau soleil.
2,77	»	»	»	»	12 juin 1889, beau soleil.
2,92	»	»	»	»	Id. id.
2,68	»	»	»	»	25 juin 1889, ciel blanc.
2,71	»	»	»	»	18 septemb. 1889, temps superbe.
2,58	»	»	»	»	26 septembre 1889.
2,96	»	»	»	»	29 octobre 1889, ciel pur.
2,62	0,56	0,26	0,15	»	20 février 1890, ciel nébuleux.
2,73	»	»	»	»	14 mars 1890, très beau temps
2,64	»	»	»	0,15	29 mars 1890, très beau temps.
2,76	»	»	»	0,19	5 avril 1890, beau ciel.
2,81	»	»	»	»	25 juin 1890. beau temps.
2,96	»	»	»	»	9 septembre 1890.
2,75	»	»	»	»	14 septemb. 1890, temps superbe.
2,75	»	»	»	»	11 octobre 1890, ciel assez blanc.
2,81	0,56	0,33	0,15	0,15	18 février 1891, brume générale.
3,03	»	»	»	0,19	25 février 1891, très beau temps.
2,77	»	»	»	0,16	26 février 1891, très beau temps.
3,00	»	»	»	0.13	27 février 1891, très beau temps.
2,75	»	»	»	»	28 févr. 1891, nébulosité générale.
2,90	0,53	»	»	0.085	5 mars 1891, très beau temps.
2,97	»	»	»	0,13	14 mars 1891, beau temps.
2,83	»	»	»	0,16	10 septemb. 1891, temps superbe.
2,96	»	»	»	0,19	20 septembre 1891, beau ciel.
2,92	»	»	»	»	25 septemb. 1891, temps superbe.

II. — Voici les résultats semblables pour le mélange de liquides actifs au dixième normaux qui au point de vue de l'absorption est équivalent au chlorure ferrique $^1/_{20}$ normal.

La formule de transmission pour le chlorure ferrique $^1/_{20}$ normal, calculée d'après celle du chlorure ferrique demi-normal est :

$$i = 0,01\,(0,9986)^l + 0,070(0,9125)^l + 0,15(0,7944)^l + 79(0,1)^l.$$

(*) La transmission apparente de 4 millimètres de chlorure ferrique $^1/_2$ normal est appréciée ici en prenant pour témoin 4 millimètres d'épaisseur du mélange de liquides actifs $^1/_2$ normaux.

L'intégration donne, tous calculs faits :

Épaisseurs des rectangles	1	4	10	25	65 mill.
Décomposition totale $\int_0^l i\,dl$	0,502	0,957	1,408	1,840	2,289
Décomposition moyenne $\frac{1}{l}\int_0^l i\,dl$	0,502	0,239	0,141	0,074	0,035
Rapports à la cuve de 4 millimètres	2,10	1	0,57	0,31	0,15

En comparant ces rapports théoriques à ceux que donne l'expérience, on doit remarquer que, comme les dissolutions sont très diluées, la sensibilité des mesures est beaucoup moindre et par conséquent l'incertitude beaucoup plus grande qu'avec le mélange de liquides actifs normaux.

Expériences comparatives rapportées à un rectangle de 4 millimètres pour des mélanges de liquides actifs $^1/_{10}$ normaux.

Épaisseurs des cuves.				
1	10	25	65	
Rapports donnés par la théorie :				
2,10	0,57	0,31	0,15	
Rapports donnés par l'expérience :				
2,37	»	»	»	1er juin 1890, très beau temps.
1,99 ?	0,59	0,33	0,15	13 septembre 1890, beau temps.
2,07	»	»	»	14 septembre 1890, temps superbe.

Il n'y a pas eu d'expérience simultanée d'absorption.

Résultats des expériences pour les cuves rectangulaires avec la lumière bleue. — Considérons seulement le mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique normaux.

La formule de transmission pour le chlorure ferrique demi-normal, optiquement équivalent, est, comme nous l'avons vu plus haut (§ 2),

$$i = 0{,}002\,(0{,}986)^l + 0{,}033\,(0{,}40)^l + 0{,}075\,(0{,}10)^l + 0{,}89\,(10^{-10})^l.$$

L'intégration donne, tous calculs faits :

Épaisseurs des rectangles	1	4	10	25	65 mill.
Décomposition totale $\int_0^l idl$	0,092	0,114	0,126	0,149	0,192
Décomposition moyenne $\frac{1}{l}\int_0^l idl$. . . .	0,092	0,029	0,013	0,006	0,003
Rapports à la cuve de 1 millimètre. . . .	3,21	1	0,44	0,21	0,10

Voici la comparaison avec l'expérience :

Expériences comparatives rapportées à un rectangle de 4 millimètre pour des mélanges de liquides actifs normaux, en lumière bleue.

ÉPAISSEURS DES CUVES.				
1	10	25	65	
Rapports donnés par la théorie :				
3,21	0,44	0,21	0,10	
Rapports donnés par l'expérience :				
3,32	»	»	»	20 octobre 1888, eau céleste.
3,44	»	»	»	12 octobre 1890, eau céleste.

Résultats des expériences pour les cuves rectangulaires avec la lumière jaune. — Considérons seulement le mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique normaux.

La formule de transmission pour le chlorure ferrique demi-normal, optiquement équivalent, est, comme nous l'avons vu (§ 2),

$$i = 0,85\,(0,986)^l + 0,15\,(0,40)^l.$$

L'intégration donne, tous calculs faits :

Épaisseurs des rectangles	1	4	10	25	65 mill.
Décomposition totale $\int_0^l idl$.	0,942	3,473	8,056	18,056	36,312
Décomposition moyenne $\frac{1}{l}\int_0^l idl$. . . .	0,942	0,866	0,806	0,722	0,559
Rapports à la cuve de 1 millimètre. . . .	1,09	1	0,93	0,83	0,65

Voici la comparaison avec l'expérience :

Expériences comparatives rapportées à un rectangle de 4 millimètre pour des mélanges de liquides actifs normaux en lumière jaune.

ÉPAISSEURS DES CUVES.				
1	10	25	65	
Rapports donnés par la théorie :				
1,09	0,93	0,83	0,65	
Rapports donnés par l'expérience :				
1,29	»	»	»	3 octobre 1890.
1,12	»	»	»	13 octobre 1890,
1,17	»	»	»	22 octobre 1890.
1,08	»	»	»	12 novembre 1890.
1,16	»	»	»	23 décembre 1890, à Perpignan.

Limites extrêmes des fractions de décomposition pour les rectangles suivant les radiations. — L'étude expérimentale des radiations bleue et jaune nous a montré deux types très différents de l'action chimique de la lumière.

Le jaune est la couleur du mélange de chlorure ferrique et d'acide oxalique employé comme réactif; l'absorption est presque nulle; les décompositions seront donc presque égales dans les couches successives traversées par la lumière; le rapport entre les décompositions moyennes est donc très rapproché de 1.

Avec le bleu, au contraire, l'absorption se fait dès les premières couches, qui seules sont décomposées, mais très énergiquement; dès lors, si d'une cuve de 1 millimètre on passe à une cuve de 4 millimètres, l'épaisseur ajoutée n'accroîtra presque en rien la décomposition totale; donc le rapport des décompositions *moyennes*, en passant de l'épaisseur 4 à l'épaisseur 1, se rapprochera de 4.

Nous avons trouvé, en effet, pour le rapport des décompositions moyennes dans les cuves de 1 et de 4 millimètres avec le mélange des liquides normaux :

Lumière jaune.	1,15
— blanche	2,9
— bleue.	3,3

Ce même raisonnement donne, pour les cuves de dimensions habituellement employées, les limites suivantes pour les rapports des fractions de décomposition en prenant la cuve de 4 millimètres pour unité (*) :

Cuve rectangulaire de	1	millimètre. . .	4 : 1 = 4
—	4	— . . .	= 1
—	10	— . . .	4 : 10 = 0,40
—	25	— . . .	4 : 25 = 0,16
—	65	— . . .	4 : 65 = 0,06

Vases de forme quelconque : réaction à l'origine. — Quand le verre où se fait la réaction n'est plus rectangulaire, le calcul devient plus compliqué, parce qu'il faut prendre une intégrale double.

Pour un rectangle (ou, plus exactement, pour un parallélipipède rectangle) qui présente à la lumière une surface d'insolation égale à l'unité, et qui a une épaisseur *l*, nous avons trouvé que la quantité de matière décomposée pendant le temps considéré est

$$s = \int_0^l i dl.$$

Dans le cas d'un vase quelconque, décomposons la section en tranches rectangulaires parallèles aux rayons lumineux et de largeur *dh*.

Pour chaque tranche, la quantité de matière décomposée est

$$dh \int_0^l i dl.$$

Pour le vase tout entier, on aura

$$dh \int_0^l idl + dh' \int_0^{l'} idl + \cdots$$

$$= \int_0^h dh \int_0^l idl.$$

Fig 6.

(*) Nous prenons partout la cuve de 4 millimètres pour unité parce que son épaisseur intérieure peut se mesurer plus exactement que pour celle de 1 millimètre.

Le calcul peut se faire en décomposant la section en tranches suffisamment rapprochées les unes des autres.

Résultats des expériences pour des tubes circulaires avec la lumière blanche. — Sans entrer ici dans le détail des calculs très laborieux auxquels conduit l'application de cette méthode, donnons-en seulement le résultat final pour les tubes circulaires habituellement employés dans le cas des mélanges de liquides actifs normaux :

Diamètres des cercles	6	14	27
Décomposition totale pour le cercle entier.	1,246	3,732	9,368
Décomposition moyenne pour 1 millimètre carré . .	0,044	0,024	0,016
Rapports au cercle de 14 millimètres	1,82	1	0,68

Voici la comparaison avec l'expérience :

	DIAMÈTRE DES TUBES.			
	6	14	27 millim.	
Rapports donnés par la théorie :				
	1,82	1	0,68	
Rapports donnés par l'expérience (dosages avec le permanganate de potasse) :				
	2,08	1	»	2 août 1887.
	1,92	1	0,83	3 août 1887.
	1,85	1	0,67	22 octobre 1887.

Des expériences semblables ont été faites avec des tubes elliptiques, c'est-à-dire avec des tubes circulaires placés verticalement de manière qu'en les traversant les rayons du soleil y déterminent une section elliptique.

§ 4.

Marche progressive de la réaction sous différentes épaisseurs et avec différentes formes de vases.

Au lieu de nous restreindre aux premiers moments de la réaction, considérons maintenant sa marche progressive.

Différence entre les réactions déterminées par la chaleur et par la lumière. — L'expérience montre tout de suite que lorsque la réaction est déterminée par la lumière, sa vitesse reste presque constante, tandis qu'elle se ralentit rapidement lorsque la réaction est déterminée par la chaleur. C'est ce que montre la comparaison graphique ci-dessous de deux déterminations prises comme spécimens parmi beaucoup d'autres.

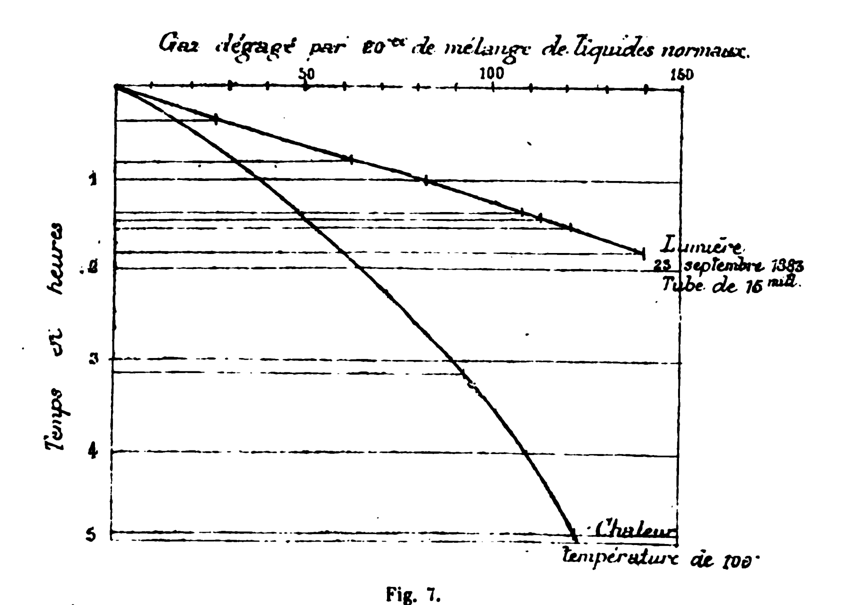


Fig. 7.

La raison de cette différence est qu'à la lumière, la vitesse de décomposition du mélange actif varie par l'effet de deux causes agissant en sens inverse : 1° la diminution de la teneur en matière décomposable, comme pour la chaleur ; 2° le changement de transparence qui en résulte, puisque le chlorure ferrique, coloré, est remplacé par du chlorure ferreux, presque incolore.

Si ce changement physique n'avait pas lieu, la décomposition dy dans le temps dt serait proportionnelle au poids $(p - y)$ de matière décomposable existant actuellement, et à l'intensité

moyenne s de la lumière dans le vase considéré, soit, en appelant K′ une constante,

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{dy}{dt} = K's(p-y).$$

Il s'agit d'apprécier numériquement comment la transparence varie avec les progrès de la réaction et, par conséquent, comment se modifie l'intensité moyenne s de la lumière à travers le réactif.

Méthode pour calculer la marche progressive de la réaction. — Afin de tenir compte du changement incessant de transparence, représentons graphiquement les valeurs de l'intensité moyenne s de la lumière, toutes connues d'après nos formules d'absorption pour les différentes dilutions de notre réactif : $s = \varphi(p)$. Cette dilution est définie par le poids p de matière décomposable contenue dans un litre.

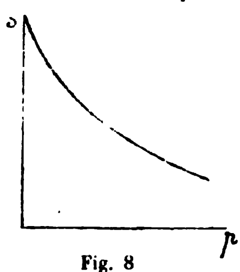


Fig. 8

A mesure que p se change en $(p-y)$, il faut, dans l'équation (1) de tout à l'heure, prendre pour s une valeur nouvelle. En pratique, on peut, dans un certain intervalle, remplacer la courbe $s = \varphi(p)$ par un arc d'hyperbole tel que $\frac{a}{b+(p-y)}$. Si nous transportons cette valeur dans l'équation (1), il vient :

$$\frac{dy}{dt} = K'(p-y)\frac{a}{b+(p-y)},$$

$$\frac{dy}{dt} = K\frac{p-y}{b+(p-y)}.$$

Cette équation peut s'intégrer en la décomposant en fractions rationnelles. Elle donne, tous calculs faits, en employant les logarithmes vulgaires :

$$Kt = 0{,}434\left(\frac{y}{p}\right)p - b\log\left(1-\frac{y}{p}\right).$$

Comme tout est comparatif et que l'intensité absolue de la lumière est inconnue, on se donne la durée t de l'une des observations et l'on peut alors calculer toutes les autres.

La valeur numérique de la constante indique l'intensité actuelle de la lumière.

Nous allons soumettre ces considérations théoriques au contrôle de l'expérience. Les seules déterminations qu'on puisse utiliser pour cela sont celles qui ont été faites pendant de très belles journées où l'état du ciel restait bien constant. Nous citerons seulement quelques spécimens.

Lumière blanche : résultats des expériences pour les cuves rectangulaires avec le mélange de liquides actifs normaux. — Prenons d'abord un rectangle de 1 millimètre. La formule de transmission adoptée pour le chlorure ferrique $^1/_2$ normal (28 grammes de fer par litre), équivalant optiquement à un mélange de liquides actifs normaux, est (voir § 2)

$$i = 0{,}010(0{,}986)^l + 0{,}070(0{,}40)^l + 0{,}13(0{,}10)^l + 0{,}79(10^{-10})^l,$$

ce qui, pour $l = 1$, donne $i = 0{,}141$.

De cette formule on déduit les transmissions pour le chlorure ferrique $^1/_4$ normal (14 grammes de fer par litre), en remplaçant l par 2λ, ce qui, pour $\lambda = 1$, donne $i = 0{,}212$.

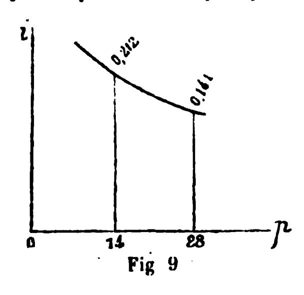


Fig 9

Faisons passer un arc d'hyperbole par les deux points de la courbe $i = \varphi(p)$ correspondant à ces valeurs : on trouve, pour cette hyperbole,

$$i = \frac{5{,}895}{13{,}806 + p}.$$

Cette valeur, introduite dans la formule générale donnée plus haut, conduit à

$$Kt = 5{,}396\left[0{,}880\frac{y}{p} - \log\left(1 - \frac{y}{p}\right)\right].$$

D'où la table de concordance ci-dessous :

$\left(\frac{y}{p}\right)$	...	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Kt	...	0,73	1.47	2,26	3,10	4,00	5,00.

Cette table permet, lorsqu'on se donne une valeur de t, de calculer proportionnellement toutes les autres.

De là les comparaisons suivantes entre l'expérience et la théorie.

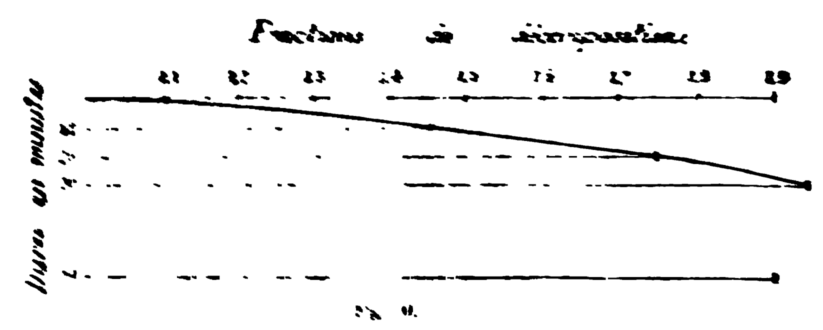
26 septembre 1889, de 10h51 à 11h21.

Très beau ciel bleu ; aucun nuage ; état atmosphérique bien constant.

Rectangle de 1 mill. Dosages avec le permanganate de potasse.

$\left(\frac{y}{p}\right)$	EXPÉRIENCE.	THÉORIE.
[illegible]	t = 12 m.	t = 10,5 m.
[illegible]	20	30 Donnée.
[illegible]	30	32,1

[illegible]



[illegible]

[illegible]

Beau temps.

[illegible]

	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

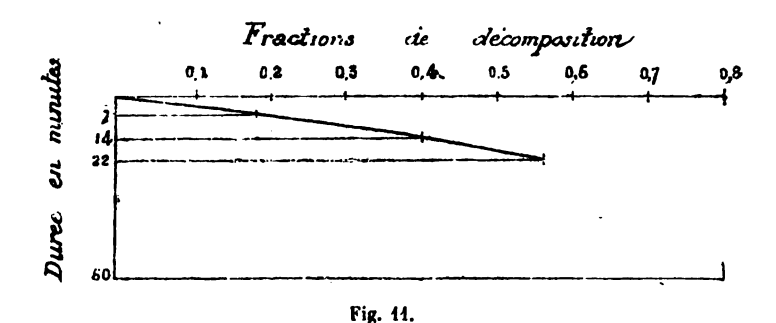


Fig. 11.

II. — Soit maintenant un rectangle de 4 millimètres. On arrive de même, tous calculs faits (*), à

$$Kt = 7{,}779\left[2{,}087\frac{y}{p} - \log\left(1 - \frac{y}{p}\right)\right],$$

d'où le tableau

$\left(\frac{y}{p}\right)$	...	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Kt	...	1,98	4,00	6,08	8,21	10,46	12,83	15,40.

16 juin 1890, de 1ʰ24 à 2ʰ33.

Beau temps.

Rectangle de 4 mill. Dosages avec le permanganate de potasse.

$\left(\frac{y}{p}\right)$	EXPÉRIENCE.	THÉORIE.
0,223	t = 20 m.	t = 21,4 m.
0,319	31	31 Donnée.
0,403	40	39,7
0,503	50	50,2
0,657	69	68,3

D'après la donnée admise, on a K = 0,209.

(*) Des valeurs assez différentes ont été données dans la note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 4 mai 1891, par suite d'une erreur de calcul; mais les résultats définitifs restent sensiblement les mêmes.

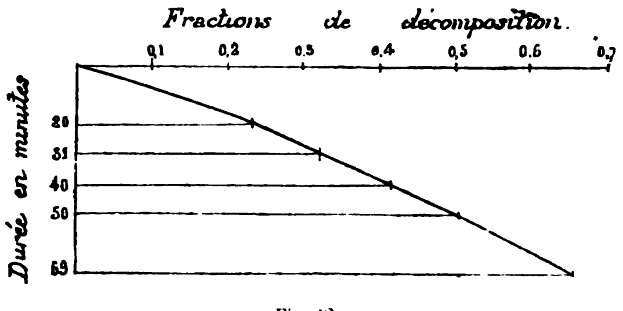


Fig. 12.

III. — Soit encore un rectangle de 14 millimètres. On obtient, tous calculs faits,

$$Kt = 29{,}924 \left[1{,}157 \frac{y}{p} - \log\left(1 - \frac{y}{p}\right)\right].$$

d'où le tableau :

$\left(\frac{y}{p}\right)$	...	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Kt	..	4,85	9,29	15,02	20,49	26,32.

23 octobre 1887, de 11h50 à 1h54.

Très beau temps ; aucun nuage ;
soleil net, quoique avec une légère nébulosité générale.

Rectangle de 14 mill. Mesure du gaz dégagé par 125 c.c. de liquide, d'où volume total susceptible d'être dégagé à 15° = 1468 c.c.

Volume de gaz dégagé.	$\left(\frac{y}{p}\right)$	EXPÉRIENCE.	THÉORIE.
125 c. c.	0,085	t = 31 m.	t = 29,5 m.
156	0,105	37	36,9
203	0,138	47	48,4
258	0,176	62	62 Donnée.
341	0,232	83	82,4
383	0,261	93,5	93,3
422	0,287	103	103,1
488	0,332	124	120,4

D'après la donnée admise, on a K = 0,139.

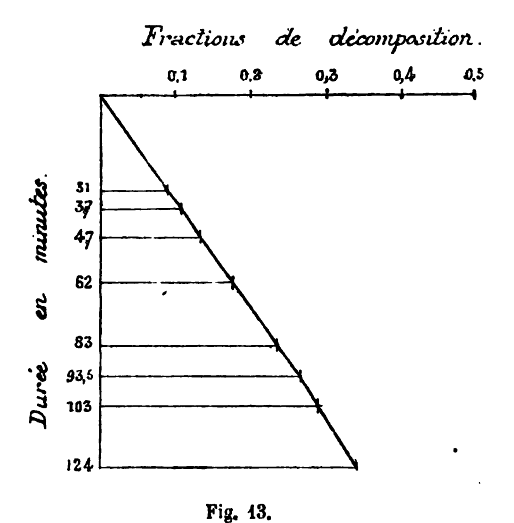


Fig. 13.

Lumière blanche : résultats des expériences pour des tubes circulaires avec mélange de liquides actifs normaux. — La même méthode s'applique aux cercles, puisqu'en partant de la formule de transmission, on y a calculé les valeurs de l'intensité lumineuse moyenne correspondant à des chlorures ferriques différemment dilués, et par conséquent aux mélanges actifs optiquement équivalents.

Pour les cercles de 14 millimètres de diamètre, on obtient, tous calculs faits,

$$Kt = 21,157 \left[1,159 \frac{y}{p} - \log\left(1 - \frac{y}{p}\right)\right].$$

d'où le tableau :

$\left(\frac{y}{p}\right)$	...	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Kt	...	4,19	8,85	12,93	17,56	22,43	27,72	33,64

21 août 1886, de 1h44 à 3h20.

Beau ciel, sans nuages, un peu nébuleux.

Tube circulaire de 14 mill. Mesure du gaz dégagé par 20 c. c. de liquide, d'où volume total de gaz susceptible d'être dégagé à 25° égal à 243 c. c.

Volume de gaz dégagé.	$\left(\frac{y}{p}\right)$	EXPÉRIENCE.	THÉORIE.
26,5	0,109	$t = 17$ m.	$t = 14$ m.
61	0,251	32	32,8
96	0,395	52	52,9
119	0,490	67	67. Donnée.
158	0,650	96	93,2

D'après la donnée admise, on a K = 0,327.

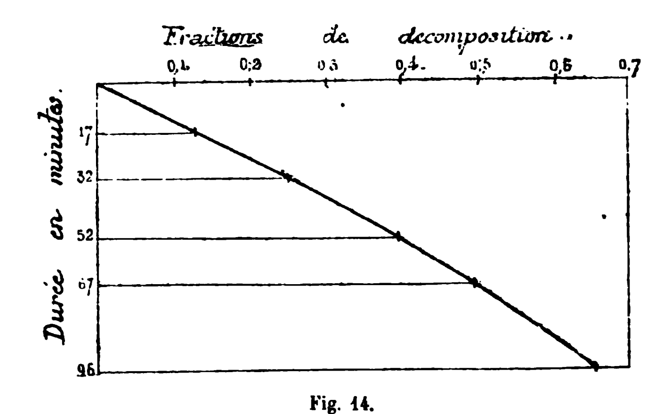


Fig. 14.

Lumière blanche : résultats des expériences pour les cuves rectangulaires avec le mélange de liquides actifs 1/2 normaux. — I. — Pour les rectangles de 4 millimètres, on obtient par la même méthode, tous calculs faits,

$$Kt = 6{,}199\left[1{,}420\frac{y}{p} - \log\left(1 - \frac{y}{p}\right)\right],$$

d'où le tableau :

$\left(\frac{y}{p}\right)$ ...	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Kt ...	1,17	2,36	3,60	4,90	6,27	7,75	9,41	11,38.

26 septembre 1889, de 10h51 à 11h25.

Très beau temps; aucun nuage; fond du ciel bleu; air frais; état atmosphérique bien constant.

Rectangle de 4 mill. Dosages avec le permanganate de potasse.

$\left(\frac{y}{p}\right)$	EXPÉRIENCE.	THÉORIE.
0,439	t = 14 m.	t = 16,2 m.
0,587	22,5	22,5. Donnée.
0,779	34	32,5

D'après la donnée admise, on a K = 0,209.

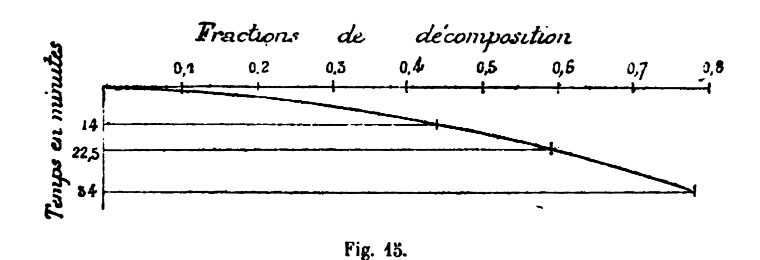


Fig. 15.

II. — Pour les rectangles de 14 millimètres, contenant le mélange de liquides 1/2 normaux, on obtient de même, tous calculs faits :

$$Kt = 11{,}024\left[2{,}314\frac{y}{p} - \log\left(1 - \frac{y}{p}\right)\right],$$

d'où le tableau :

$\left(\frac{y}{p}\right)$ ...	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Kt ...	3,06	6,17	9,36	12,65	16,07	19,69	23,62

23 octobre 1887, de 11h50 à 1h54.

Très beau temps, aucun nuage, soleil net, quoique avec une légère nébulosité générale.

Rectangle de 14 mill. Mesure du gaz dégagé par 125 c. c. du mélange de liquides $^1/_2$ normaux, d'où volume total susceptible d'être dégagé à 15° égal à 734 c. c.

Volume de gaz dégagé.	$\left(\frac{y}{p}\right)$	EXPÉRIENCE.	THÉORIE.	
124 c. c.	0,169	$t = 31^m$.	$t = 27^m,4$	
187	0,255	42	41,7	
214	0,291	47	47,4	
275	0,374	62	62.	Donnée.
332	0,452	75	75,9	
366	0,498	83	84,2	
407	0,554	93,5	94,8	
444	0,605	103,5	104,7	
508	0,692	124	122,7	

D'après la donnée admise, on a K = 0,190.

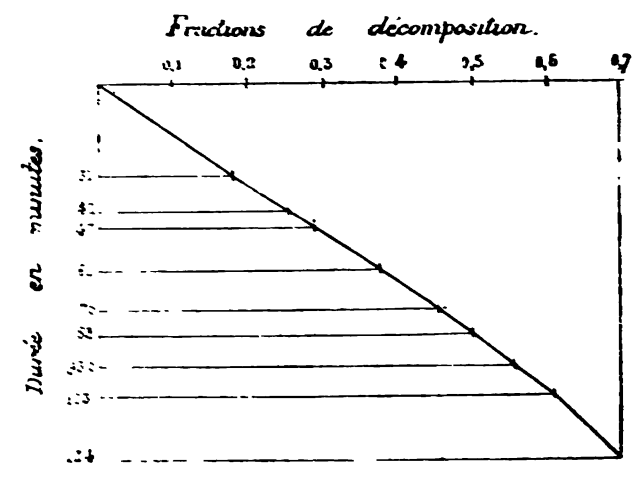


Fig. 16.

Remarques générales sur les résultats obtenus pour la marche progressive de la réaction. — On voit qu'ici encore l'expérience et la théorie sont d'accord : dans une même série de déterminations sur la marche progressive de la réaction, on peut, en partant d'une seule observation, calculer toutes les

autres, et l'observation unique prise comme donnée permet d'apprécier l'intensité absolue de la lumière à l'instant considéré (*).

Mais jusqu'ici nous avons laissé indépendantes les unes des autres les expériences faites avec des mélanges actifs de différentes dilutions, tandis qu'elles ont été souvent simultanées. Elles se trouveront rattachées les unes aux autres par l'étude qui va suivre; après ces nouvelles recherches, on verra que des déterminations comparatives faites avec des mélanges actifs de différentes dilutions n'emprunteront plus en réalité à l'expérience qu'une seule donnée, celle qui est nécessaire pour définir l'intensité de la lumière solaire au moment de la réaction.

§ 5.

Influence de la dilution.

Comparons maintenant les décompositions effectuées par la lumière dans différents mélanges d'acide oxalique et de chlorure ferrique pris toujours en proportions équivalentes, mais avec différents excès d'eau. Nous reconnaîtrons tout d'abord qu'il ne suffit point, pour expliquer les nouveaux phénomènes observés, de tenir compte de l'absorption telle qu'on peut la calculer d'après l'influence physique de la dilution.

Action chimique propre à la dilution. — Pour faire saisir cette influence chimique propre à la dilution par un exemple très simple, soumettons à la même insolation pendant le même temps deux cuves rectangulaires où les mélanges actifs et les épaisseurs sont tellement choisis que l'absorption totale soit la même : c'est ce qui a lieu pour une cuve de 1 millimètre contenant du

---

(*) La constante K employée dans ce § 4 pour apprécier l'intensité de la lumière se rapporte aux formules considérées avant l'intégration, tandis que dans la première partie, pour les expériences faites sous l'influence de la chaleur, la constante se rapportait aux formules considérées après l'intégration, en se servant pour les calculs des logarithmes vulgaires.

mélange actif normal et pour une cuve de 4 millimètres contenant du mélange actif $^1/_4$ normal : au point de vue de la transparence, l'augmentation de la dilution compense exactement l'augmentation d'épaisseur. Cependant les fractions de décomposition sont loin d'être égales : la décomposition est beaucoup plus avancée avec le mélange $^1/_4$ normal, à peu près moitié en plus de ce qu'elle est avec le mélange normal.

Cette seule expérience montre donc que la dilution intervient de deux manières : physiquement, en augmentant la transparence; chimiquement, en facilitant la décomposition, comme elle le fait dans les expériences réalisées avec la chaleur seule.

Pour évaluer numériquement cette action chimique propre à la dilution, il faut faire un nouvel appel à l'expérience, en s'arrangeant de manière à éliminer l'influence physique de la dilution qui augmente la transparence. Dans ce but, et afin de relier ce sujet à ce qui précède, nous partirons de la loi d'absorption, qui est maintenant connue, et nous réduirons tout par le calcul à ce qui se passerait dans une couche infiniment mince où l'absoption serait nulle.

Méthode pour calculer l'action chimique de la lumière avec différentes dilutions en éliminant l'influence de l'absorption. — Bornons-nous aux premiers moments de la réaction.

En partant des expériences d'absorption, nous avons déjà calculé pour un vase et une dilution quelconques l'intensité moyenne de la lumière à travers notre réactif.

Le poids y de matière décomposée dans un temps très court τ est proportionnel à la fois : au poids p de matière décomposable; à l'intensité moyenne s de la lumière; à un coefficient c correspondant à la dilution. On a donc, en appelant m une constante :

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{y}{\tau} = mcsp,$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c = \frac{1}{m} \frac{\left(\frac{y}{p}\right)}{\tau} \frac{1}{s}.$$

Le coefficient c représente donc la fraction de la masse décomposée dans l'unité de temps avec une cuve rectangulaire infiniment mince, car alors la lumière garderait son intensité primitive, de sorte qu'on aurait $s = 1$. C'est l'*action chimique proprement dite* correspondant à la dilution considérée.

Toutes les expériences sont comparatives : elles nous donneront donc seulement le rapport de cette action chimique c à celle c_0 du mélange de liquides normaux (1 équivalent dans 1 litre) que nous prenons pour type :

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{c}{c_0} = \frac{\left(\frac{y}{p}\right) : s}{\left(\frac{y_0}{p_0}\right) : s_0}.$$

Cela revient à dire que *pour comparer les actions chimiques en jeu, il n'y a qu'à diviser les fractions de décomposition par les intensités moyennes de la lumière dans son trajet à travers le milieu actif.*

Nous allons appliquer cette méthode successivement aux différentes expériences.

Résultats des expériences pour les cuves rectangulaires avec la lumière blanche. — I. — Avec les rectangles de 1 millimètre, l'expérience donne les rapports suivants entre les fractions de décomposition observées simultanément pour les mélanges actifs de différentes dilutions :

Expériences : rapports entre les fractions de décomposition pour un même temps.

MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.				DATES DES EXPÉRIENCES.
Normaux.	2/3 N.	1/2 N.	1/4 N.	
Dosages par le permanganate de potasse :				
1	1,53	2,04	»	6 juin 1889.
1	»	2,00	»	16 juillet 1890.
1	»	1,97	»	13 septembre 1890, beau temps.

D'autre part, les intensités moyennes de la lumière à travers ces mélanges actifs différemment dilués ont déjà été calculées

dans le § 3, en partant de la formule de transmission qui coordonne les expériences faites sur le chlorure ferrique $^1/_2$ normal par un ciel bien pur pendant la belle saison :

$$i = 0{,}01\,(0{,}986)^l + 0{,}07\,(0{,}40)^l + 0{,}13\,(0{,}10)^l + 0{,}79\,(10^{-10})^l.$$

On se rappelle d'ailleurs que cette formule conduit immédiatement aux transmissions pour des dilutions différentes, puisque, par exemple, 1 millimètre de chlorure ferrique $^1/_2$ normal équivaut comme transparence à 10 millimètres de chlorure $^1/_{20}$ normal. Après intégration, on trouve ainsi, tous calculs faits, les nombres suivants pour les intensités lumineuses :

Chlorure ferrique.	Mélanges de liquides actifs optiquement équivalents au chlorure ferrique.	Intensités lumineuses moyennes $\frac{1}{l}\int_0^l i\,dl$ pour $l = 1$.	Rapport à l'intensité moyenne du mélange de liquides normaux.
$^1/_2$ normal.	Normaux.	0,144	1
$^1/_3$	$^2/_3$	0,180	1,28
$^1/_4$	$^1/_2$	0,212	1,50
$^1/_8$	$^1/_4$	0,308	2,19

Pour comparer les actions chimiques à celles du mélange de liquides normaux, on a vu qu'il n'y a qu'à diviser les rapports entre les fractions de décomposition par les rapports entre les intensités lumineuses moyennes, comme l'indique la formule (3) citée plus haut. On obtient ainsi les résultats suivants :

Calculs résultant des expériences précédentes pour les rapports entre les coefficients c *exprimant l'action chimique élémentaire avec les rectangles de 1 millimètre.*

	Mélanges de liquides actifs.				Dates des expériences.
	Norm.	$^2/_3$ N.	$^1/_2$ N.	$^1/_4$ N.	
Intensités lumineuses moyennes. . . .	0,144	0,180	0,212	0,308	
Rapports entre les intensités lumineuses moyennes. . .	1	1,28	1,50	2,19	
Rapports entre les coefficients c d'après l'expérience	1	1,30	1,36	»	6 juin 1889.
	1	»	1,33	»	16 juillet 1890.
	1	»	1,31	»	13 septembre 1890.
Moyennes	1	1,30	1,33	»	

II. — Avec les rectangles de 4 millimètres, on obtient de la même manière les résultats suivants :

MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.				DATES DES EXPÉRIENCES.
Norm.	$^2/_3$ N.	$^1/_2$ N.	$^1/_4$ N.	

Expériences : rapports entre les fractions de décomposition pour un même temps.

Dosages par le permanganate de potasse :

1	1,55	2,36	4,06	3 oct. 1888, très beau temps.
1	»	2,96	»	26 sept. 1889, très beau temps.
1	1,60	2,06	»	30 juill. 1890, très beau temps.
1	»	1,98	»	19 fév. 1891, très beau temps.
1	»	2,16	»	25 fév. 1891, très beau temps.
1	»	2,10	»	27 fév. 1891, très beau temps.
1	»	2,00	3,67	5 mars 1891, très beau temps.
1	»	1,83?	3,45	18 sept. 1891, très beau temps.

Calculs résultant des expériences précédentes pour les rapports entre les coefficients c *exprimant l'action chimique élémentaire avec les rectangles de 4 millimètres.*

Intensités lumineuses moyennes. . . .	0,051	0,070	0,087	0,141	
Rapports entre les intensités lumineuses moyennes	1	1,37	1,71	2,76	
Rapports entre les coefficients c d'après l'expérience	1	1,13	1,38	1,47	3 octobre 1888.
	1	»	1,21	»	26 septembre 1889.
	1	1,17	1,21	»	30 juillet 1890.
	1	»	1,16	»	19 février 1891.
	1	»	1,26	»	25 février 1891.
	1	»	1.23	»	27 février 1891.
	1	»	1,17	1,33	5 mars 1891.
	1	»	1,07	1,25	10 septembre 1891.
Moyennes	1	1.15	1,22	1,35	

Résultats des expériences pour les tubes circulaires avec la lumière blanche. — Les expériences ont été faites

principalement en mesurant le gaz dégagé avec des tubes circulaires de 14 millimètres de diamètre placés verticalement.

Comme résultat général, on a constaté, dans quatorze expériences de ce genre, que dans les premiers temps de la réaction les *volumes de gaz* dégagés par les mélanges actifs normaux, $^2/_3$, $^1/_2$, $^1/_4$ normal sont à peu près, *égaux*.

Si l'on admet cette relation empirique, on peut en déduire presque immédiatement les rapports entre les coefficients exprimant l'action chimique élémentaire. Il suffit pour cela de se reporter à la relation $y = mcsp$ établie au commencement de ce paragraphe dans l'équation (1), où y et p sont les quantités absolues de matière décomposée et décomposable, et s l'intensité lumineuse moyenne. Pour deux dilutions p et p_0 on a, en fait, d'après les expériences actuelles, avec les tubes de 14 millimètres de diamètre, $y = y_0$.

Dès lors,

$$cps = c_0 p_0 s_0,$$

d'où

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{\frac{s}{s_0}} : \frac{p}{p_0}.$$

Nous donnons ci-dessous les résultats de cette formule, en prenant pour bases les intensités moyennes de la lumière calculées d'après la transmission à travers des cercles de 14 millimètres de diamètre.

Comme, dans les expériences dont il s'agit, les tubes étaient placés verticalement, c'est-à-dire obliquement par rapport aux rayons du soleil, il convient de comparer ces nombres avec ceux que l'on aurait pour une ellipse très allongée.

Calculs des rapports entre les coefficients c *exprimant l'action chimique élémentaire en supposant, conformément à l'expérience, des dégagements gazeux égaux.*

	MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.			
	Normaux.	$\frac{2}{3}$ N.	$\frac{1}{2}$ N.	$\frac{1}{4}$ N.
Cercles de 14 millimètres de diamètre.				
Intensités lumineuses moyennes. . .	0,024	0,032	0,040	0,067
Rapports $\frac{s}{s_0}$ entre les intensités lumineuses moyennes	1	1,32	1,63	2,78
Inverses $\frac{s_0}{s}$ de ces rapports	1	0,76 qui : $\frac{2}{3}$ donne	0,61 qui : $\frac{1}{2}$ donne	0,36 qui : $\frac{1}{4}$ donne
Rapports entre les coefficients c exprimant l'action chimique élémentaire $\frac{s_0}{s}:\frac{p}{p_0}$	1	1,13	1,22	1,44

Ellipses dont le petit axe est de 14 millimètres et le rapport des axes 2,4. Elles correspondent au cas où le soleil est à 22°37′ du zénith, soit à 67°23′ au-dessus de l'horizon, tandis qu'à Paris, au solstice d'été, il est à 25°23′ du zénith, soit à 64°37′ au-dessus de l'horizon.

	Normaux.	$\frac{2}{3}$ N.	$\frac{1}{2}$ N.	$\frac{1}{4}$ N.
Intensités lumineuses moyennes. . .	0,014	0,018	0,022	0,035
Rapports $\frac{s}{s_0}$ entre les intensités lumineuses moyennes	1	1,25	1,49	2,40
Inverses $\frac{s_0}{s}$ de ces rapports	1	0,80 qui : $\frac{2}{3}$ donne	0,67 qui : $\frac{1}{2}$ donne	0,42 qui : $\frac{1}{4}$ donne
Rapports entre les coefficients c exprimant l'action chimique élémentaire $\frac{s_0}{s}:\frac{p}{p_0}$	1	1,20	1,34	1,67

La discussion détaillée des expériences de cette série, faite comme pour les rectangles, donne, tous calculs faits, comme moyennes, les résultats suivants qui sont très rapprochés des précédents :

Rapports moyens entre les coefficients c *exprimant l'action chimique élémentaire pour des tubes de 14 millimètres.*

MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.			
Normaux.	$\frac{2}{3}$ N.	$\frac{1}{2}$ N.	$\frac{1}{4}$ N.
1	1,22 ?	1,28	1,61

Résultats des expériences pour les cuves rectangulaires de 4 millimètres avec la lumière bleue. — On peut reprendre avec les lumières colorées les mêmes expériences et les mêmes calculs qui viennent d'être décrits pour la lumière blanche. Seulement la précision devient beaucoup moins grande à cause des erreurs que peuvent amener de légères différences dans l'état des surfaces des verres de couleur.

Voici cependant quelques résultats obtenus pour la lumière bleue : les calculs sont faits en partant de la formule de transmission admise dans le § 2 pour cette couleur avec le chlorure ferrique $^1/_2$ normal :

$$i = 0,002(0,986)^t + 0,035(0,40)^t + 0,075(0,10)^t + 0,89(10^{-10})^t.$$

MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.			DATES DES EXPÉRIENCES.
Normaux.	$^1/_2$ N.	$^1/_4$ N.	

Expériences : rapports entre les fractions de décomposition pour un même temps.

Dosages par le permanganate de potasse :

Normaux.	$^1/_2$ N.	$^1/_4$ N.	Dates
1	1,92	5,11	7 nov. 1889, verres bleus.
1	2,58	»	15 sept. 1890, eau céleste.
1	2,57	»	4 oct. 1890, eau céleste.
1	»	4,06	7 nov. 1891, verres bleus.

Calculs résultant des expériences précédentes pour les rapports entre les coefficients c exprimant l'action chimique élémentaire avec les rectangles de 4 millimètres en lumière bleue.

Intensités lumineuses moyennes	0,029	0,053	0,092	
Rapports entre les intensités lumineuses moyennes	1	1,84	3,21	
Rapports entre les coefficients c d'après l'expérience	1	1,04	1,59	7 nov. 1889.
	1	1,40?	»	15 sept. 1890.
	1	1,40?	»	5 oct. 1890.
	1	»	1,27	7 nov. 1891.
Moyennes	1	1,28	1,43	

Résultats des expériences pour les cuves rectangulaires de 4 millimètres avec la lumière jaune. — Les expériences semblables faites avec la lumière jaune offrent un intérêt particulier, à cause de la faible absorption. La lumière étant alors transmise presque sans perte à travers le mélange actif, la comparaison entre les actions chimiques pour les différentes dilutions est presque immédiate.

Malheureusement ces expériences sont les plus délicates de toutes : l'action chimique de la lumière jaune est si faible qu'il faut prolonger le temps de pose pendant plusieurs heures, ce qui exige de très belles journées ; en outre, comme les décompositions sont toujours assez petites, les erreurs venant de l'oxydation du chlorure ferreux formé ont beaucoup plus d'influence.

Voici cependant quelques résultats obtenus; les calculs sont faits en partant de la formule de transmission admise pour la lumière jaune avec le chlorure ferrique $^1/_2$ normal :

$$i = 0{,}85\,(0{,}986)^l + 0{,}15\,(0{,}40)^l.$$

MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.		DATES DES EXPÉRIENCES.
Normaux.	$^1/_2$ N.	
Expériences : rapports entre les fractions de décomposition pour un même temps.		
Dosages par le permanganate de potasse :		
1	1,40	3 oct. 1890, de 12h11 à 2h24, pour le mélange norm.; de 12h51 à 2h11, pour le mélange $^1/_2$ norm. Très beau temps.
1	1,33	12 nov. 1890, de 11h50 à 1h48.
1	1,34 ?	13 mai 1891, de 11h19 à 2h19. Temps médiocre.

Calculs résultant des expériences précédentes pour les rapports entre les coefficients c *exprimant l'action chimique élémentaire avec des rectangles de 4 millimètres en lumière jaune.*

Intensités lumineuses moyennes	0,866	0,912	
Rapports entre les intensités lumineuses moyennes	1	1,05	
Rapports entre les coefficients *c* d'après l'expérience	1	1,33	3 octobre 1890.
	1	1,26	12 novembre 1890
	1	1,27	13 mai 1891
Moyennes	1	1,29	

Résumé : valeurs à admettre pour l'action chimique élèmentaire avec les différentes dilutions sous l'influence de la lumière. — Jetons maintenant un coup d'œil d'ensemble sur les résultats des différentes séries d'expériences qui précèdent, en prenant dans chacune les moyennes des résultats obtenus.

Rapports moyens entre les coefficients c *exprimant l'action chimique élémentaire.*

	MÉLANGE DE LIQUIDES ACTIFS.			
	Normaux.	$^2/_3$ N.	$^1/_2$ N.	$^1/_4$ N.
Lumière blanche, rectangle de 1 mill. .	1	1,20	1,33	»
Id. id. 4 mill. .	1	1,15	1,22	1,35
Id. cercle de 14 mill. . .	1	1,22?	1,28	1.61
Lumière bleue, rectangle de 4 mill. . .	1	»	1,28	1,43
Lumière jaune, id. id. . . .	1	»	1,29	»
Moyennes.	1	1,19	1,28	1,46

Ainsi, *malgré d'énormes différences dans la forme des vases, dans l'absorption, dans l'intensité absolue de la lumière, le calcul arrive à dégager l'action chimique propre aux différentes dilutions; il l'exprime par des coefficients qui sont à peu près les mêmes pour les différentes séries d'expériences et qui croissent régulièrement avec l'excès d'eau.*

Comparaison entre les expériences relatives à la dilution sous l'influence de la chaleur et sous l'influence de la lumière. — Nous avons vu précédemment que dans l'obscurité la réaction que nous venons d'étudier sous l'influence de la lumière se produit assez rapidement pour être aisément mesurable, mais à condition que la température soit élevée jusque vers 100° : elle est d'une lenteur extrême et presque insensible vers 40° ou 50°, températures atteintes en été dans les liquides décomposés par la lumière.

Comparons les rapports obtenus dans ces deux genres d'expérience, à l'obscurité et à la lumière, pour les coefficients *c* de

l'action chimique caractérisant chaque dilution; en prenant le mélange des liquides normaux pour unité, on a trouvé :

	MÉLANGES DE LIQUIDES ACTIFS.			
	Normaux.	$^2/_3$ Norm.	$^1/_2$ Norm.	$^1/_4$ Norm.
Chaleur à 100°.	1	1,32	1,43	1,9
Lumière vers 40°. . . .	1	1,19	1,28	1,40

Dans les deux cas, l'action chimique augmente régulièrement avec la dilution, comme on le voit par le tracé graphique ci-dessous :

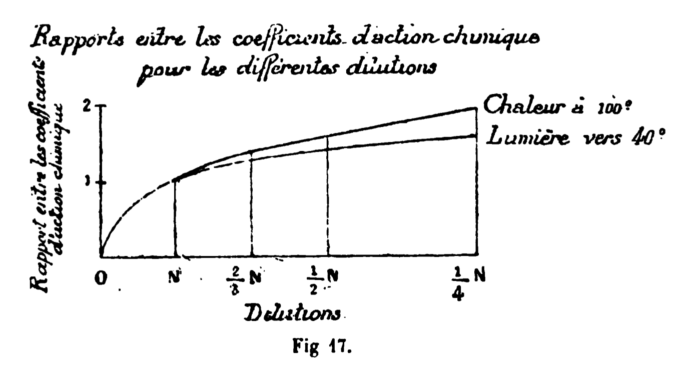


Fig 17.

Les coefficients obtenus dans les deux genres d'expériences ne sont pas très éloignés les uns des autres. Une discussion plus approfondie montrerait même que les différences peuvent être attribuées en grande partie à des causes accessoires. Dans les expériences faites avec la lumière, on a négligé certaines corrections pour ne pas compliquer l'exposé (*). Dans les expériences faites avec la chaleur, on a vu que l'influence de la dilution

(*) Ainsi lorsqu'on compare des cuves de 4 millimètres chargées respectivement de mélanges actifs normal et $^1/_4$ normal, la fraction de décomposition est plus grande, pour un même temps, dans le mélange $^1/_4$ normal, de sorte que la transparence n'y est plus la même qu'à l'origine. Il faudrait donc ramener, par le calcul indiqué dans le § 4, la comparaison des deux courbes exprimant les progrès de la réaction à celle de leurs tangentes à l'origine. De là une petite correction. Elle tend, de même que celle qui est indiquée ensuite, à rapprocher les résultats des expériences faites avec la lumière de ceux des expériences faites avec la chaleur.

paraît devenir un peu moins énergique aux températures très inférieures à 100° pour lesquelles la réaction, malgré son extrême lenteur, est encore mesurable; comme les mélanges décomposés par la lumière ne dépassent guère une température de 40° ou 45°, la comparaison des deux genres d'expériences au point de vue de la dilution exigerait encore de ce chef une autre correction pour les ramener à une même température.

En définitive, lorsqu'on a mis de côté les effets de l'absorption, on trouve donc qu'au point de vue de l'influence de la dilution, *les actions chimiques produites par la lumière et par la chaleur suivent sensiblement les mêmes lois.*

RÉSUMÉ GÉNÉRAL.

En terminant, résumons les résultats généraux des recherches décrites dans ce travail : son but est de comparer les effets d'une même réaction s'effectuant par la chaleur ou par la lumière.

I. — *Les expériences faites sous l'influence de la chaleur* ont été coordonnées par une formule simple qui interprète d'une manière rationnelle la marche progressive de la réaction :

$$\frac{dy}{dt} = K\,(p - y),$$

où t est la durée de l'expérience, y la quantité de matière décomposée, p la quantité de matière décomposable. En d'autres termes, la vitesse de la réaction est proportionnelle à la *masse active* soumise à l'action de la chaleur.

L'expérience a défini les modifications qui se produisent lors-

qu'on fait varier la température ou lorsqu'on aide la réaction par différents excès d'eau. On les ramène à des formules telles que :

$$\log K = \gamma \frac{\alpha -}{\beta - \theta},$$

$$\frac{dK}{d\Delta} = \frac{c}{\Delta + b},$$

où K représente la vitesse de la réaction pour l'unité de poids, θ la température, Δ la dilution, les autres lettres désignant des constantes.

On voit que la vitesse de la réaction décroit très rapidement avec la température, de sorte que vers 40° au bout d'un mois la décomposition est à peine appréciable. On voit aussi que la dilution accélère la décomposition.

II. — *Les expériences faites sous l'influence de la lumière* ont été coordonnées entre elles de telle sorte que les déterminations les plus variées peuvent se calculer en partant de quelques données prises en très petit nombre.

L'étude des absorptions a été faite par une méthode chimique : elle a été résumée par une formule très simple, basée sur la loi des transmissions i suivant l'épaisseur l :

$$i = na^l + n'a'^l + n''a''^l + \nu\alpha^l$$

où

$$\nu = 1 - n - n' - n'',$$

de sorte qu'il n'y a à emprunter en toute rigueur à l'expérience que trois constantes n, n', n'' : cette formule revient à considérer la lumière blanche comme résultant du mélange de quatre radiations simples.

En partant de ces données de l'expérience pour les absorptions, on peut retrouver par le calcul les déterminations effectuées pour les décompositions sous différentes épaisseurs et avec différentes formes de vases, soit dans les premiers moments de la réaction, soit en la prolongeant presque jusqu'à l'épuisement.

L'action de différents excès d'eau exige un nouvel appel à l'expérience, mais cette influence de la dilution a été rattachée aux expériences semblables faites avec la chaleur seule.

Ainsi les mêmes lois se trouvent être applicables pour la réaction étudiée quand elle s'effectue par la chaleur ou par la lumière : la lumière ne fait qu'accélérer la réaction.

Nous avons en outre constaté qu'avec notre réactif coloré le travail propre à la lumière, c'est-à-dire l'énergie consommée pour produire la réaction chimique, n'est qu'une fraction extrêmement faible de ce qui est consommé par l'absorption physique de la lumière.

Cès recherches ***interprètent donc d'une manière logique les résultats numériques de l'action chimique de la lumière*** pour la réaction prise comme exemple : l'expérience vérifie dans tous les détails les indications du calcul.

M. Calvet et M. Ferrières m'ont prêté dans ces recherches leur meilleur concours : je les prie de recevoir ici mes plus affectueux remerciements.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Réaction de l'acide oxalique et du chlorure ferrique sous l'influence de la chaleur.

DEUXIÈME PARTIE.

Réaction de l'acide oxalique et du chlorure ferrique sous l'influence de la lumière.

ÉTUDE
DES
INTÉGRALES A LIMITES INFINIES
POUR LESQUELLES
LA FONCTION SOUS LE SIGNE EST CONTINUE (*)

PAR

Ch.-J. de la Vallée Poussin,
CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

> « Si quantitas tam fuerit parva ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla... » (EULER)

I. Définitions.

Soit $f(x,\alpha)$ une fonction continue de x et de α; l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx$$

peut représenter une fonction de α dans un intervalle donné (a,b).

1. Nous dirons que l'intégrale I est *équiconvergente* dans l'intervalle *limité* (a,b), si à tout nombre positif ε correspond un nombre N tel que l'on ait

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{Mod} \int_X^\infty f(x,\alpha)\,dx < \varepsilon,$$

(*) Ce Mémoire a été présenté en réponse à la question suivante (1885-1886) : *Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.*

M. C. Jordan, commissaire pour l'examen de ce travail, a bien voulu nous indiquer des améliorations et des corrections à y apporter; nous lui en exprimons nos plus vifs remerciements. Voir son rapport, t. XVI, 1re partie, pp. 121-130. Dans ce mémoire, Mod signifie *valeur absolue de*, $\geqq$, *égal ou supérieur à*.

pour toute valeur de α dans l'intervalle (a, b) et toute valeur de N plus grande que N'.

Exemple. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ est équiconvergente dans tout intervalle (a,b), $0 < a < b$; elle ne l'est pas dans un intervalle contenant le point $\alpha = 0$.

2. Si l'intégrale I est équiconvergente, quelque grand que soit le nombre déterminé b qui limite supérieurement l'intervalle, nous dirons que l'intégrale I est *équiconvergente dans un intervalle* (*limité*) *arbitraire*.

Exemple. L'intégrale $\int_0^\infty e^{\frac{x}{\alpha}}\, dx$ est équiconvergente dans un intervalle positif (a, b) arbitraire.

3. Si l'on peut satisfaire à la condition (1), pour toute valeur de α plus grande que a, nous dirons que l'intégrale I est *équiconvergente dans un intervalle illimité* (a, ∞).

Une intégrale peut être équiconvergente dans un intervalle arbitraire, sans l'être dans un intervalle illimité; par contre, une intégrale équiconvergente dans un intervalle illimité, l'est nécessairement dans un intervalle arbitraire.

Exemple. L'intégrale $\int_0^\infty \sin (\alpha x^2)\, dx$ est équiconvergente dans un intervalle positif illimité. L'intégrale $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}}\, dx$, qui est équiconvergente dans un intervalle arbitraire, ne l'est pas dans un intervalle illimité.

4. Il est possible enfin que, sans être équiconvergente dans l'intervalle (a, b), l'intégrale I le soit dans tout intervalle partiel qui ne renferme pas un certain nombre de points déterminés $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$; nous dirons alors qu'elle est *équiconvergente en général* dans l'intervalle (a, b) et que l'équiconvergence cesse aux environs des points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$.

Exemple. L'intégrale $\int_0^x \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ est équiconvergente en général dans un intervalle quelconque et l'équiconvergence cesse aux environs du point $\alpha = 0$.

5. De ces définitions résultent plusieurs propriétés évidentes :

1° Une intégrale équiconvergente dans une série d'intervalles consécutifs l'est dans celui formé par leur réunion. Réciproquement, une intégrale équiconvergente dans un intervalle (a,b) l'est *a fortiori* dans toute portion de cet intervalle;

2° Une intégrale qui se décompose en une somme d'intégrales équiconvergentes est équiconvergente.

6. *Remarque.* Nous avons considéré jusqu'à présent l'intégrale $\int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx$ qui est une fonction de α; mais on peut tout aussi bien considérer l'intégrale $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,d\alpha$ qui est une fonction de x. C'est ce qui nous arrivera souvent; il ne peut en résulter, d'ailleurs, aucune difficulté.

II. Recherche des conditions d'équiconvergence.

Cette recherche peut se faire par différentes méthodes, qui présentent beaucoup d'analogie avec les procédés d'intégration.

On peut distinguer les méthodes :

1° Par comparaison ;
2° Par transformation de la fonction sous le signe ;
3° Par intégration par parties ;
4° Par décomposition ;
5° Par combinaison des méthodes précédentes.

1. Méthode par comparaison.

7. *Théorème I.* L'intégrale I sera équiconvergente dans l'intervalle (a,b), limité ou non, si, pour toute valeur de x plus grande qu'un nombre donné N, $f(x,\alpha)$ est inférieure en valeur absolue à une fonction positive $\varphi(x)$, l'intégrale $\int_N^\infty \varphi(x)\,dx$ ayant une valeur déterminée.

Posons, en effet,

$$R_n = \mathrm{M}\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx, \quad R'_n = \int_N^\infty \varphi(x)\,dx;$$

on peut prendre N assez grand pour avoir simultanément

$$\mathrm{VA}\int_N^\infty f(x,\alpha)\,dx < \int_N^\infty \varphi(x)\,dx, \quad R'_n < \varepsilon,$$

et, par conséquent, $\mathrm{VA}R_n < \varepsilon$.

8. *Théorème II.* L'intégrale I sera équiconvergente dans l'intervalle (a, b), limité ou non, si l'on a dans cet intervalle $f(x,\alpha) = \varphi(x)\,\psi(x,\alpha)$, la fonction $\psi(x,\alpha)$ étant limitée et l'intégrale $\int_p^\infty \varphi(x)\,dx$ absolument convergente.

Soit, en effet, M le maximum absolu de $\psi(x,\alpha)$; on aura

$$\mathrm{VA}\, f(x,\alpha) < M\,\varphi(x).$$

L'intégrale $\int_p^\infty M\,\varphi(x)\,dx$ ayant une valeur déterminée, nous retombons sur le théorème précédent.

9. *Application.* On peut prendre $\varphi(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ et $\psi(x,\alpha) = x^{1+\varepsilon} f(x,\alpha)$; si donc $x^{1+\varepsilon} f(x,\alpha)$ est une fonction limitée, l'intégrale I sera équiconvergente.

Exemples. a) L'intégrale $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ est équiconvergente dans tout intervalle ne renfermant pas le point $\alpha = 0$, car $x^{1+\varepsilon}e^{-\alpha x}$ y est limité.

b) L'intégrale $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ est équiconvergente dans tout intervalle positif limité (a, b), $a \geqslant 1$, car $x^{\alpha+\varepsilon}e^{-x}$ y est limité. (Pour $\alpha < 1$, la fonction sous le signe ne serait plus continue.)

10. La fonction $f(x,\alpha)$ peut être représentée par une intégrale définie; le premier procédé qui se présente est évidemment l'intégration. Exemple :

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}dx \int_0^\alpha e^{-ax}\sin \alpha x\, d\alpha = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-a\alpha}\cos \alpha x)\cos x}{a^2 + x^2}dx$$

$$- ae^{-a\alpha}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,\frac{\cos x}{a^2 + x^2}dx.$$

Les deux intégrales du second membre sont équiconvergentes, en vertu du théorème précédent, donc aussi la première.

2. Transformation de la fonction sous le signe.

Cette méthode réussira le plus souvent quand $f(x, \alpha)$ sera représenté par une intégrale définie. On peut employer différents procédés.

11. *a*) Une *substitution de variable*. Exemple : soit l'intégrale

$$(p > 0) \quad I = \int_p^\infty dx \int_0^\alpha \sin \alpha^2 x^3 \, d\alpha ;$$

en posant $\alpha^2 x^3 = z$, elle devient

$$I = \frac{1}{2} \int_p^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} \int_0^{\alpha^2 x^3} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz .$$

La fonction $\int_0^{\alpha^2 x^3} \sin z \frac{dz}{\sqrt{z}}$ étant limitée, l'intégrale I est équiconvergente (théorème II) dans l'intervalle $(0, \infty)$.

12. *b*) Le *premier théorème de la moyenne*. Exemple : soit l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_1^x \Gamma(\alpha) \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^\alpha} \right) d\alpha , \quad x > 1).$$

On aura $(1 < \alpha' < x)$:

$$I = (x - 1) \int_0^\infty \Gamma(\alpha') \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^{\alpha'}} \right) \frac{dz}{z} .$$

Celle-ci étant équiconvergente dans un intervalle arbitraire (théorème I), la première l'est aussi.

Il est essentiel de ne pas perdre de vue qu'ici x' est fonction

de z, mais l'inégalité $(1 < \alpha' < \alpha)$ suffit à la démonstration, car on en conclut

$$R_n < (\alpha - 1)\Gamma(\alpha)\left[\int_N^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz + \int_N^\infty \frac{dz}{z(1+z)}\right].$$

13. c) Le *deuxième théorème de la moyenne*. Exemple : soit

$$I = \int_0^\infty e^{ix} \int_0^\alpha e^{-x\alpha^2}\,d\alpha,$$

où i remplace $\sqrt{-1}$. L'intégrale $\int_0^\alpha e^{-x\alpha^2}\,d\alpha$ étant une fonction de x constamment décroissante, on aura $(N' > N)$

$$R_n = \int_0^\alpha e^{-Nx^2}\,d\alpha \int_N^{N'} e^{ix}\,dx$$

Quel que soit $N' > N$, quand N tend vers l'infini, R_n converge uniformément vers zéro, pour toute valeur de α ; donc l'intégrale I est équiconvergente dans un intervalle quelconque.

3. Intégration par parties.

Cette méthode repose sur le théorème suivant :

14. *Théorème III.* L'intégrale I sera équiconvergente dans un intervalle limité ou non, si l'on a dans cet intervalle

$$R_n = \int_N^\infty f(x, \alpha)\,dx = \varphi(\alpha, N) + \int_N^\infty \chi(\alpha, x)\,dx,$$

$\varphi(\alpha, N)$ tendant uniformément vers zéro et l'intégrale suivante étant équiconvergente.

Exemples. a) L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$ est équiconvergente dans tout intervalle qui ne renferme pas $\alpha = 0$; en effet,

$$\int_N^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\cos \alpha N}{\alpha N} - \frac{1}{\alpha}\int_N^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2}\,dx.$$

b) L'intégrale $\int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$ est équiconvergente dans tout intervalle ne renfermant pas le point $\alpha = 0$; en effet,

$$\int_N^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{N \cos \alpha N}{\alpha(1+N^2)} + \frac{1}{\alpha}\int_N^\infty \cos \alpha x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\right) dx.$$

c) L'intégrale $\int_0^\infty \cos(\alpha x^p)\, dx$ $(p > 1)$ est équiconvergente dans tout intervalle ne renfermant pas $\alpha = 0$; en effet,

$$\int_N^\infty \cos(\alpha x^p)\, dx = \frac{\sin(\alpha N^p)}{p\alpha N^{p-1}} + \frac{p-1}{\alpha^p}\int_N^\infty \frac{\sin(\alpha x^p)}{x^p}\, dx.$$

d) Le même artifice prouve que $\int_0^\infty \sin(\alpha x^p)\, dx$ $(p > 1)$ est équiconvergente dans tout intervalle ne renfermant pas $\alpha = 0$.

4. Décomposition.

15. Cette méthode repose sur une remarque déjà faite (n° 5). En voici un exemple :

L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos x \sin \alpha x}{x}\, dx$ est équiconvergente dans tout intervalle ne renfermant pas les points $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$; en effet.

$$2\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cos x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+1)x}{x}\, dx + \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-1)x}{x}\, dx.$$

On retombe sur un exemple du numéro précédent.

5. Combinaison de diverses méthodes.

16. Soit par exemple l'intégrale $I = \int_0^\infty x \sin(x^3 - \alpha x)\, dx$

$$R_n = \int_N^\infty \frac{3x^2 - \alpha}{3x^3} \sin(x^3 - \alpha x)\, dx + \alpha \int_N^\infty \frac{\sin(x^3 - \alpha x)}{3x}\, dx,$$

$$R_n = \int_N^\infty \frac{3x^2 - \alpha}{3x} \sin(x^3 - \alpha x)\, dx + \frac{\alpha}{3}\int_N^\infty \frac{3x^2 - \alpha}{3x^3} \sin(x^3 - \alpha x)\, dx$$
$$+ \frac{\alpha^2}{9}\int_N^\infty \frac{\sin(x^3 - \alpha x)}{x^3}\, dx.$$

C'est une somme d'intégrales équiconvergentes; on rend la chose évidente en intégrant par parties les deux premières (n° 14). Par exemple, pour la première,

$$\int_N^{\infty}\frac{(3x^2-\alpha)}{3x}\sin(x^3-\alpha x)\,dx=\frac{\cos(N^3-\alpha N)}{3N}-\int_N^{\infty}\frac{\cos(x^3-\alpha x)}{3x^2}\,dx.$$

Nous ajouterons encore deux théorèmes qui peuvent être utiles.

17. *Théorème IV.* Une intégrale I équiconvergente dans un intervalle limité arbitraire (a, b), l'est aussi dans un intervalle illimité (a, ∞), si l'intégrale $\int_N^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ tend uniformément vers zéro, quel que soit $N > p$, quand α tend vers l'infini.

On peut d'abord prendre b assez grand pour avoir dans l'intervalle (b, ∞)

$$\mathrm{VA}\int_N^{\infty} f(x,\alpha)\,dx < \varepsilon,$$

quel que soit $N > p$.

Ensuite, l'intégrale étant équiconvergente dans un intervalle limité arbitraire, on peut prendre N assez grand pour avoir

$$\mathrm{VA}\int_N^{\infty} f(x,\alpha)\,dx < \varepsilon,$$

dans l'intervalle (a, b).

On aura donc aussi, dans l'intervalle (a, ∞), $R_n < \varepsilon$.

18. *Théorème V.* Si l'on sait d'ailleurs que l'intégrale I est équiconvergente en général dans l'intervalle limité (a, b), elle sera de plus équiconvergente dans le même intervalle, si l'intégrale $\int_N^{\infty} f(x,\alpha)\,dx$ tend uniformément vers zéro, quel que soit $N > p$, aux points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ pour lesquels l'équiconvergence n'est pas démontrée (*).

(*) Nous entendons par là qu'on peut prendre η assez petit pour avoir $\mathrm{VA}\int_N^{\infty} f(\alpha,x)\,dx < \varepsilon$, dans l'intervalle $(x_1-\eta,\ \alpha_1+\eta)$, pour toute valeur de N plus grande que p

Supposons, pour simplifier, que le point α_1 soit seul dans ce cas. On peut d'abord prendre η assez petit pour avoir

$$\text{VA}\int_{N}^{\infty} f(x, \alpha)\, dx < \varepsilon,$$

dans l'intervalle $(\alpha_1 - \eta, \alpha_1 + \eta)$, pour toute valeur de $N > p$.

On peut ensuite prendre N assez grand pour avoir

$$\text{VA}\int_{N}^{\infty} f(x, \alpha)\, dx < \varepsilon,$$

dans les intervalles $(a, \alpha_1 - \eta)$ et $(\alpha_1 + \eta, b)$.

On aura donc $\text{VAR}_n < \varepsilon$, dans l'intervalle (a, b).

Quel que soit le nombre des points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, l'intervalle (a, b) peut toujours se décomposer en un nombre déterminé d'intervalles partiels ne renfermant qu'un seul point α_i; donc le théorème est démontré.

Exemple. Nous avons vu (n° 14) que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ est équiconvergente dans tout intervalle ne renfermant pas le point $\alpha = 0$; l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\, dx$ sera donc équiconvergente dans un intervalle quelconque.

III. Propriétés des intégrales équiconvergentes.

19. *Théorème VI.* Si l'intégrale I est équiconvergente dans l'intervalle (a, b), elle représente, dans cet intervalle, une fonction *continue* de α.

On a, en effet,

$$I = \int_p^N f(x, \alpha)\, dx + R_n,$$

et pour un accroissement h de α,

$$\Delta I = \Delta \int_p^N f(x, \alpha)\, dx + \Delta R_n.$$

On peut d'abord prendre N assez grand pour que l'on ait

$\backslash\mathrm{A}R_n < \varepsilon$, pour toute valeur de α dans l'intervalle (a, b), et par conséquent, quel que soit h,

$$\backslash\mathrm{A}\Delta R_n < 2\varepsilon.$$

On peut ensuite prendre h assez petit pour que la variation de l'intégrale $\int_p^N f(x, \alpha)\, dx$ soit inférieure à ε. On aura donc

$$\backslash\mathrm{A}\Delta I < 3\varepsilon.$$

ε étant une quantité positive arbitraire, le théorème est démontré.

20. *Théorème VII.* Réciproquement, si l'intégrale I représente une fonction discontinue de α dans l'intervalle (a, b), elle ne peut pas y être équiconvergente.

21. *Exemple.* Nous avons vu (n° 9) que l'intégrale

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

est équiconvergente dans l'intervalle arbitraire $(1, b)$, elle est donc continue pour toute valeur de $\alpha > 1$.

Le cas où α est compris entre zéro et 1 se ramène au précédent par une intégration par parties; donc la fonction $\Gamma(\alpha)$ est continue pour toute valeur positive de α.

22. *Théorème VIII.* Si l'intégrale $I = \int^\infty f(x, \alpha)\, dx$ est équiconvergente dans un intervalle illimité, et si $f(x, \alpha)$ tend ***uniformément*** vers une limite déterminée $f(x, \infty)$ quand α tend vers l'infini, pour toute valeur de x dans un intervalle limité arbitraire (p, N) : 1° I tend vers une limite déterminée H quand α tend vers l'infini ; 2° $H = \int_p^\infty f(x, \infty)\, dx$.

Démontrons d'abord l'existence de $H = \lim_{\alpha=\infty} \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx$.

Soient α_p et $\alpha_q > \alpha_p$ deux valeurs de α. Posons

$$u_p = \int_p^\infty f(x, \alpha_p)\, dx, \quad u_q = \int_p^\infty f(x, \alpha_q)\, dx.$$

Il suffit de prouver que, quel que soit le nombre donné ε, on peut prendre α_p assez grand pour avoir, quel que soit $\alpha_q > \alpha_p$,

$$\mathrm{M}(u_q - u_p) < 3\varepsilon.$$

Nous pouvons écrire

$$u_q - u_p = \int_p^N f(x, \alpha_q)\, dx - \int_p^N f(x, \alpha_p)\, dx + (\mathrm{R}_n)_{\alpha_q} - (\mathrm{R}_n)_{\alpha_p}.$$

L'intégrale étant équiconvergente, nous pouvons d'abord prendre N assez grand pour avoir, quel que soit α, $\mathrm{MR}_n < \varepsilon$.

Ensuite, l'intégrale à limite finie tendant vers une limite déterminée quand α tend vers l'infini, nous pouvons prendre α_p assez grand pour avoir, quel que soit $\alpha_q > \alpha_p$,

$$\mathrm{M}\left[\int_p^N f(x, \alpha_q)\, dx - \int_p^N f(x, \alpha_p)\, dx\right] < \varepsilon.$$

ce qui donne

$$\mathrm{M}(u_q - u_p) < 3\varepsilon.$$

L'existence de la limite H étant démontrée, il reste à prouver que l'on a

$$\mathrm{H} = \int_p^\infty f(x, \infty)\, dx.$$

1° On peut trouver un nombre A_0 tel que, pour $\alpha > \mathrm{A}_0$, on ait

$$\mathrm{M}\rho < \varepsilon, \quad \mathrm{H} = \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx + \rho,$$

puisque la limite H est déterminée;

2° On peut ensuite prendre N d'abord supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$ et, en second lieu, assez grand pour avoir, quel que soit $\alpha > \mathrm{A}_0$,

$$\mathrm{MR}_n < \varepsilon, \quad \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int_p^N f(x, \alpha)\, dx + \mathrm{R}_n,$$

puisque cette intégrale est équiconvergente dans un intervalle illimité;

3° On peut enfin prendre A_1 assez grand pour avoir, quel que soit $\alpha \geqslant A_1$, N étant invariable et $p < x < N$,

$$\text{M}r < \frac{\varepsilon}{N - p}, \quad f(x,\alpha) = f(x, \infty) - r,$$

puisque $f(x, \alpha)$ tend uniformément vers $f(x, \infty)$, quand α tend vers l'infini, dans un intervalle arbitrairement grand (p, N); d'où

$$\text{M}\int_p^N r dx < \varepsilon, \quad \int_p^N f(x, \alpha)\, dx = \int_p^N f(x, \infty)\, dx - \int_p^N r dx.$$

On aura, par conséquent, pour $\alpha > A_1$ et $> A_0$,

$$\int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int_p^N f(x, \infty)\, dx - \int_p^N r dx + R_n;$$

$$H = \int_p^N f(x, \infty)\, dx - \int_p^N r dx + R_n + \rho;$$

$$H = \int_p^N f(x, \infty)\, dx + \eta, \quad \text{M}\eta < 3\varepsilon$$

Si l'on fait tendre ε vers zéro, N qui est $> \frac{1}{\varepsilon}$ tendra vers l'infini et η qui est $< 3\varepsilon$ vers zéro, donc

$$H = \int_p^\infty f(x, \infty)\, dx.$$

23. *Théorème IX* (Application). Si l'intégrale

$$I = \int_p^\infty dx \int_a^\alpha \varphi(\alpha, x)\, d\alpha$$

est équiconvergente dans un intervalle illimité (a, ∞), et si l'intégrale

$$\int_a^\infty \varphi(\alpha, x)\, d\alpha$$

est équiconvergente dans un intervalle limité arbitraire (p, N), on aura

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^\infty dx \int_a^\alpha \varphi(\alpha, x)\, d\alpha = \int_p^\infty dx \int_a^\infty \varphi(\alpha, x)\, d\alpha,$$

et cette limite existera, en vertu du théorème précédent. En effet, nous avons simplement pris pour la fonction $f(x, \alpha)$ de ce théorème l'intégrale définie $\int_a^\alpha \varphi(\alpha, x)\, d\alpha$.

24. *Remarque.* Le théorème IX nous sera très utile dans l'étude des intégrales doubles. Pour en faire ressortir l'importance, nous allons montrer par un exemple que la première des deux conditions renfermées dans l'énoncé n'est pas suffisante.

L'intégrale

$$\int_p^{\infty} dx \int_0^{\alpha} \cos \alpha x \, d\alpha = \int_p^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

est équiconvergente dans l'intervalle illimité (a, ∞), $a > 0$, et l'on a, pour $p > 0$,

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^{\infty} dx \int_0^{\alpha} \cos \alpha x \, d\alpha = \lim_{\alpha=\infty} \int_p^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 0.$$

Cependant l'intégrale $\int_p^\infty dx \int_0^\infty \cos \alpha x \, d\alpha$ est indéterminée.

IV Intégration sous le signe entre des limites finies.

25. Soit $F(\alpha) = I = \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx$ une fonction représentée par une intégrale *équiconvergente* dans un intervalle (a, b); on aura, pour $a \leqslant \alpha \leqslant b$,

$$\int_a^\alpha F(\alpha)\, d\alpha = \int_a^\alpha d\alpha \left[\int_p^N f(x, \alpha)\, dx + R_n \right].$$

On peut prendre N assez grand pour avoir, dans tout l'intervalle (a, b), VA$R_n < \varepsilon$. D'autre part, dans le premier terme l'inversion se fait sans difficulté. On a donc

$$\text{VA} \left[\int_a^\alpha F(\alpha)\, d\alpha - \int_p^N dx \int_a^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha \right] < \varepsilon (\alpha - a)$$

Si l'on fait tendre N vers l'infini, le second membre tend *uniformément* vers zéro ; donc

$$\int_a^\alpha d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_p^\infty dx \int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

De là le théorème suivant :

26. *Théorème X.* Pour intégrer dans un intervalle limité une fonction de α représentée par une intégrale *équiconvergente*, il est toujours permis d'intervertir l'ordre des intégrations et la nouvelle intégrale à limite infinie, obtenue après intégration sous le signe entre a et α, sera encore *équiconvergente.*

27. Enfin, la fonction peut être représentée par une intégrale *équiconvergente en général* dans un intervalle (a, b). Soit, pour simplifier, α_1 le point unique aux environs duquel cesse l'équiconvergence. Dans ce cas, l'intégrale $\int_a^\alpha d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx$ est *définie* par l'équation

$$\int_a^\alpha d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{\alpha_1-\varepsilon} d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{\alpha_1+\varepsilon}^\alpha d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx.$$

Nous écartons actuellement le cas où l'on tiendrait compte de la valeur principale d'une intégrale indéterminée : ainsi, si les limites du second membre n'existaient pas, cela prouverait que le premier membre n'a pas de sens.

Le théorème X s'appliquant quel que soit ε,

$$\int_a^\alpha d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_p^\infty dx \int_a^{\alpha_1-\varepsilon} f(x,\alpha)\,d\alpha + \lim_{\varepsilon=0} \int_p^\infty dx \int_{\alpha_1+\varepsilon}^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Si l'intégrale $\int_p^\infty dx \int_a^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha$ est une fonction continue de α dans l'intervalle (a, b), on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_p^\infty dx \int_a^{\alpha_1-\varepsilon} f(x,\alpha)\,d\alpha = \int_p^\infty dx \int_a^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_p^\infty dx \int_{\alpha_1+\varepsilon}^\alpha f(x,\alpha)\,d\alpha = \int_p^\infty dx \int_{\alpha_1}^\alpha f(x,\alpha)\,dx,$$

et, par conséquent,

$$\int_{a}^{\alpha} d\alpha \int_{p}^{\infty} f(x,\alpha)\, dx = \int_{p}^{\infty} dx \int_{a}^{\alpha} f(x,\alpha)\, d\alpha.$$

De là ce théorème :

28. *Théorème XII.* L'intégrale définie d'une fonction de α représentée par une intégrale *équiconvergente en général* dans un intervalle (a, b) sera déterminée, et l'on pourra intervertir l'ordre d'intégration si l'intégrale obtenue après intégration sous le signe entre a et α est fonction *continue* de α, ce qui aura lieu en particulier si elle est *équiconvergente.*

Exemple. On aura, pour $p \geqslant 0$,

$$\int_{0}^{\alpha} d\alpha \int_{p}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \int_{p}^{\infty} dx \int_{0}^{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, d\alpha = \int_{p}^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx,$$

quoique l'intégrale $\int_{p}^{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx$ soit illimitée dans l'intervalle $(0,\alpha)$, parce que la dernière est équiconvergente.

29. *Remarque.* Quand $f(x,\alpha)$ est représentée par une intégrale définie, le théorème X donne un moyen nouveau pour vérifier l'équiconvergence. Il peut être utile de faire un rapprochement avec les règles données au n° 11.

Voici, en effet, un procédé, peut-être plus simple, pour retrouver un résultat déjà obtenu (n° 11).

L'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right)$$

est visiblement équiconvergente, en vertu du théorème I, dans l'intervalle $(1, x)$: on aura donc

$$\int_{1}^{x} dx \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z}\left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right)$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{1}^{x} \left(e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right) dx$$

et la nouvelle intégrale sera équiconvergente.

Cette intégrale se rencontre dans la théorie des fonctions Eulériennes : voir, par exemple, JORDAN, *Cours d'analyse*, t. II, p. 182.

V. Intégration entre des limites infinies.

30. Supposons que l'intégrale $\int_p^\infty f(x, \alpha)\,dx$ soit équiconvergente dans un intervalle limité arbitraire (a, A); on aura, pour toute valeur de A,

$$\int_a^A d\alpha \int_p^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_p^\infty dx \int_a^A f(x, \alpha)\,dx.$$

Si donc le premier membre tend vers une limite déterminée, quand A tend vers l'infini, on aura l'équation générale

$$\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x, \alpha)\,dx = \lim_{A=\infty} \int_p^\infty dx \int_a^A f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

Si l'on peut démontrer la condition :

(1) $$\lim_{A=\infty} \int_p^\infty dx \int_A^\infty f(x, \alpha)\,d\alpha = 0,$$

on aura encore

$$\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_p^\infty dx \int_a^\infty f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

31. Il n'y a pas intérêt à transformer la condition (1) dans le cas qui précède plutôt que dans le suivant, qui est plus général.

Supposons, en premier lieu, que l'intégrale $\int_p^\infty f(x, \alpha)\,dx$ soit équiconvergente en général dans un intervalle limité arbitraire (a, A), et ensuite, que l'intégrale $\int_p^\infty dx \int_a^\alpha f(x, \alpha)\,d\alpha$ soit équiconvergente dans l'intervalle illimité (a, ∞).

Nous aurons, quel que soit A (théorème XII),

$$\int_a^A d\alpha \int_p^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_p^\infty dx \int_a^A f(x, \alpha)\,d\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx = \lim_{A=\infty} \int_p^\infty dx \int_a^A f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Supposons, en troisième lieu, que l'intégrale $\int_a^\infty f(x, \alpha)\, d\alpha$ soit équiconvergente dans un intervalle limité arbitraire (p, N); nous aurons, en vertu du théorème IX (n° 23),

$$\lim_{A=\infty} \int_p^\infty dx \int_a^A f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_p^\infty dx \int_a^\infty f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

D'où le théorème suivant :

32. *Théorème XIII.* L'intégrale $\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx$ sera déterminée, et l'on pourra intervertir les signes d'intégration, si les intégrales suivantes sont :

$\int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx$, *équiconvergente en général dans un intervalle arbitraire* (a, A) ;

$\int_a^\infty f(x, \alpha)\, d\alpha$, *équiconvergente dans un intervalle arbitraire* (p, N) ;

$\int_p^\infty dx \int_a^A f(x, \alpha)\, d\alpha$, *équiconvergente dans l'intervalle illimité* (a, ∞) ;

ou inversement.

33. *Applications.*

1° On aura, pour $p > 0$,

$$\int_p^\infty d\alpha \int_0^\infty \sin \alpha^2 x^3\, dx = \int_0^\infty dx \int_p^\infty \sin \alpha^2 x^3\, d\alpha.$$

En effet :

$\int_0^\infty \sin \alpha^2 x^3\, dx$ est équiconvergente en général dans l'intervalle (p, A) (n° 18, 4°) ;

$\int_p^\infty \sin \alpha^2 x^3\, d\alpha$ est équiconvergente dans l'intervalle (ε, N) (n° 18, 4°) ;

$\int_p^{\infty} dx \int_0^{\alpha} \sin(\alpha^2 x^3)\, dx$ est équiconvergente dans l'intervalle (o, ∞), (n° **11, 1°**) ;

2° On aura aussi

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha}{\alpha} d\alpha \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(\alpha x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

En effet :

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \cos \alpha \sin \alpha x}{\alpha}\, dx$ est équiconvergente dans l'intervalle $(0, \infty)$, (théorème II, n° 8) ;

$e^{-ax} \int_0^{\infty} \frac{\cos x \sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha$ est équiconvergente en général dans l'intervalle $(0, \infty)$, (n° 13);

$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha}{\alpha} d\alpha \int_0^{x} e^{-ax} \sin \alpha x\, dx$ est équiconvergente dans l'intervalle $(0, \infty)$, (n° 10).

On déduit aisément de ce dernier renversement d'intégration (*)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha}{a^2 + \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$$

34. On peut trouver des conditions plus générales.

Supposons que les intégrales suivantes soient :

1° $\int_p^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$, équiconvergente en général dans l'intervalle arbitraire (a, A);

2° $\int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha$, équiconvergente en général dans l'intervalle arbitraire (p, N);

3° $\int_p^{\infty} dx \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha$, équiconvergente dans l'intervalle illimité (a, ∞) ;

(*) Par exemple, RÉSAL, *Physique mathématique*. Introduction, 2°.

4° $\int_a^\infty dz \int_p^z f(x,z)\,dx$, équiconvergente dans l'intervalle illimité (p, ∞) ;

5° $\int_a^\infty dx \int_a^\infty f(x,z)\,dz$, déterminée.

Des hypothèses (1) et (3) on conclut d'abord (théorème XII)

$$\int_a^\infty dz\int_p^\infty f(x,z)\,dx = \lim_{z=\infty}\left[\int_a^z dz\int_p^\infty f(x,z)\,dx\right] = \lim_{z=\infty}\int_p^\infty dx\int_a^z f(x,z)\,dz.$$

En second lieu, l'intégrale $\int_p^\infty dx\int_z^\infty f(x,z)\,dz$ sera équiconvergente dans l'intervalle illimité (a, ∞), car on aura

$$\int_p^\infty dx\int_z^\infty f(x,z)\,dz = \int_p^\infty dx\left[\int_a^\infty f(x,z)\,dz - \int_a^z f(x,z)\,dz\right];$$

la première intégrale est déterminée (hypothèse 5) et la seconde équiconvergente dans l'intervalle (a, ∞) (hypothèse 3), d'où la conclusion énoncée ci-dessus.

On peut toujours écrire

$$(1) \qquad \int_p^\infty dx\int_A^\infty f(x,z)\,dz = \int_p^N dx\int_A^\infty f(x,z)\,dz + R_N$$

Nous venons de voir que cette intégrale est équiconvergente ; on peut donc prendre N assez grand pour que l'on ait $M\,R_N < \varepsilon$, quel que soit A dans l'intervalle (a, ∞).

En vertu des hypothèses (4) et (2), on aura aussi (théor. XII, n° 28),

$$\int_p^N dx\int_A^\infty f(x,z)\,dz = \int_A^\infty dz\int_p^N f(x,z)\,dx.$$

En vertu de cette même hypothèse (4), on peut prendre A_1 assez grand pour que l'on ait, quel que soit $A \geqslant A_1$,

$$M\int_A^\infty dz\int_p^N f(x,z)\,dx < \varepsilon.$$

En tenant compte de ces résultats, on déduit de l'équation (1), pour $A \geqslant A_1$,

$$M\int_p^\infty dx\int_A^\infty f(x,z)\,dz < 2\varepsilon.$$

On en conclut

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^\infty dx \int_\alpha^\infty f(x, \alpha)\, d\alpha = 0,$$

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^\infty dx \int_a^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_p^\infty dx \int_a^\infty f(x, \alpha)\, d\alpha .$$

De là le théorème suivant :

35. *Théorème XIV.* On peut affirmer que les deux intégrales $\int_p^\infty dx \int_a^\infty f(x,\alpha)\, d\alpha$ et $\int_a^\infty d\alpha \int_p^\infty f(x,\alpha)\, dx$ sont déterminées et égales, si l'on peut démontrer que l'une d'elles ***a une valeur déterminée*** et que les intégrales suivantes sont :

$\int_p^\infty f(x,\alpha)\, dx$, ***équiconvergente en général*** dans un intervalle ***arbitraire*** (a, A) ;

$\int_a^\infty f(x,\alpha)\, d\alpha$, ***équiconvergente en général*** dans un intervalle ***arbitraire*** (p, N) ;

$\int_p^\infty dx \int_a^\alpha f(x,\alpha)\, d\alpha$, ***équiconvergente*** dans l'intervalle ***illimité*** (a, ∞) ;

$\int_a^\infty d\alpha \int_p^x f(x,\alpha)\, dx$, ***équiconvergente*** dans l'intervalle ***illimité*** (p, ∞).

36. *Application.* Le théorème précédent prouve l'égalité

$$\int_0^\infty e^{ix}\, dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx .$$

En effet, le résultat est déterminé (*). Ensuite

$\int_0^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx$ et $\int_0^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\, d\alpha$ sont équiconvergentes en général dans l'intervalle $(0, \infty)$;

(*) Voir le *Cours d'analyse* de M. C. Jordan, t. II, n° 171 Cet éminent géomètre donne généralement à ses démonstrations une forme également remarquable par la concision et par la rigueur ; il nous semble cependant qu'en raisonnant comme il le fait au n° 171, on arriverait aux égalités :

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^x \cos(\alpha x)\, dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty \cos(\alpha x)\, d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

4° $\int_a^{\infty} d\alpha \int_p^{x} f(x, \alpha)\, dx$, équiconvergente dans l'intervalle illimité (p, ∞);

5° $\int_p^{\infty} dx \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha$, déterminée.

Des hypothèses (1) et (3) on conclut d'abord (théorème XII)

$$\int_a^{\infty} d\alpha \int_p^{\infty} f(x,\alpha)\, dx = \lim_{\alpha=\infty} \left[\int_a^{\alpha} d\alpha \int_p^{\infty} f(x, \alpha)\, dx \right] = \lim_{\alpha=\infty} \int_p^{\infty} dx \int_a^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha .$$

En second lieu, l'intégrale $\int_p^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha$ sera équiconvergente dans l'intervalle illimité (a, ∞), car on aura

$$\int_p^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_p^{\infty} dx \left[\int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha - \int_a^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha \right];$$

la première intégrale est déterminée (hypothèse 5) et la seconde équiconvergente dans l'intervalle (a, ∞) (hypothèse 3), d'où la conclusion énoncée ci-dessus.

On peut toujours écrire

$$(1) \qquad \int_p^{\infty} dx \int_A^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_p^{N} dx \int_A^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha + R_n .$$

Nous venons de voir que cette intégrale est équiconvergente; on peut donc prendre N assez grand pour que l'on ait $\backslash\!\mathrm{A}\, R_n < \varepsilon$, quel que soit A dans l'intervalle (a, ∞).

En vertu des hypothèses (4) et (2), on aura aussi (théor. XII, n° 28)

$$\int_p^{N} dx \int_A^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_A^{\infty} d\alpha \int_p^{N} f(x, \alpha)\, dx .$$

En vertu de cette même hypothèse (4), on peut prendre A_1 assez grand pour que l'on ait, quel que soit $A \geqslant A_1$,

$$\backslash\!\mathrm{A} \int_A^{\infty} d\alpha \int_p^{N} f(x, \alpha)\, dx < \varepsilon .$$

En tenant compte de ces résultats, on déduit de l'équation (1), pour $A \geqslant A_1$,

$$\backslash\!\mathrm{A} \int_p^{\infty} dx \int_A^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha < 2\varepsilon .$$

On en conclut

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha = 0,$$

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_p^{\infty} dx \int_a^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_p^{\infty} dx \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha .$$

De là le théorème suivant :

35. *Théorème XIV.* On peut affirmer que les deux intégrales $\int_p^{\infty} dx \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha$ et $\int_a^{\infty} d\alpha \int_p^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ sont déterminées et égales, si l'on peut démontrer que l'une d'elles *a une valeur déterminée* et que les intégrales suivantes sont :

$\int_p^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$, *équiconvergente en général* dans un intervalle *arbitraire* (a, A) ;

$\int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, d\alpha$, *équiconvergente en général* dans un intervalle *arbitraire* (p, N) ;

$\int_p^{\infty} dx \int_a^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha$, *équiconvergente* dans l'intervalle *illimité* (a, ∞) ;

$\int_a^{\infty} d\alpha \int_p^{x} f(x, \alpha)\, dx$, *équiconvergente* dans l'intervalle *illimité* (p, ∞).

36. *Application.* Le théorème précédent prouve l'égalité

$$\int_0^{\infty} e^{ix}\, dx \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha = \int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx .$$

En effet, le résultat est déterminé (*). Ensuite $\int_0^{\infty} e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx$ et $\int_0^{\infty} e^{(-\alpha^2+i)x}\, d\alpha$ sont équiconvergentes en général dans l'intervalle $(0, \infty)$;

(*) Voir le *Cours d'analyse* de M. C. Jordan, t. II, n° 171 Cet éminent géomètre donne généralement à ses démonstrations une forme également remarquable par la concision et par la rigueur ; il nous semble cependant qu'en raisonnant comme il le fait au n° 171, on arriverait aux égalités :

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\alpha} \cos(\alpha x)\, dx = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \cos(\alpha x)\, d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$\int_0^{\infty} e^{ix}\int_0^{x} e^{-x^2\alpha}\, d\alpha$, équiconvergente dans l'intervalle $(0, \infty)$, (n° 13);

$\int_0^{\infty} d\alpha\int_0^{x} e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx$, équiconvergente dans l'intervalle $(0, \infty)$, (on le prouve en intégrant).

37. ***Remarque.*** Si la fonction $f(x, \alpha)$ est toujours positive, les deux dernières conditions de l'énoncé du théorème XIV (35) se déduisent de la première, et le théorème se simplifie.

Si l'on suppose en effet que $\int_p^{\infty} dx\int_a^{\infty} f\, d\alpha$ ait une valeur déterminée, on peut prendre N assez grand pour avoir

$$\int_N^{\infty} dx\int_a^{\infty} f\, d\alpha < \varepsilon;$$

on aura alors *a fortiori*, quel que soit α,

$$\int_N^{\infty} dx\int_a^{\alpha} f\, d\alpha < \varepsilon,$$

ce qui exprime l'avant-dernière condition.

En second lieu, la fonction $\int_p^{\infty} dx\int_a^{\alpha} f\, d\alpha$ est constamment croissante avec α, et tend vers une limite déterminée quand α tend vers l'infini, car on a

$$\int_p^{\infty} dx\int_a^{\alpha} f\, d\alpha < \int_p^{\infty} dx\int_a^{\infty} f\, d\alpha .$$

On peut donc prendre A assez grand pour avoir

$$\lim_{\alpha=\infty}\int_p^{\infty} dx\int_A^{\alpha} f\, d\alpha < \varepsilon,$$

et *a fortiori* pour toute valeur de x,

$$\lim_{\alpha=\infty}\int_p^{x} dx\int_A^{\alpha} f\, d\alpha = \int_A^{\alpha} d\alpha\int_p^{x} f\, dx < \varepsilon,$$

ce qui exprime la dernière condition.

VI. Différentiation sous le signe.

38. Le théorème X (n° 26) nous donne, par réciproque, le suivant :

Théorème XV. Étant donnée l'intégrale $I = \int_p^\infty f(x,\alpha)\, dx$, si la nouvelle intégrale obtenue en différentiant sous le signe est équiconvergente dans l'intervalle (a, b), elle est la dérivée de la première dans cet intervalle.

Exemple :

1° $$\frac{d^n}{dx^n} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x^2} dx\,;$$

car la nouvelle intégrale est équiconvergente (théorème II).

2° $$\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \cos(x^3 - \alpha x)\, dx = \int_0^\infty x \sin(x^3 - \alpha x)\, dx\,;$$

car cette intégrale est encore équiconvergente (n° 16).

39. *Remarque.* On donne souvent comme criterium de différentiation sous le signe la condition que $Ax^{1+\varepsilon} f'_\alpha(x, \alpha)$ ne croisse pas indéfiniment avec x; on peut remarquer que c'est un cas particulier d'équiconvergence.

40. Souvent, en différentiant une intégrale, on est conduit à un résultat indéterminé; on pourra généralement tourner la difficulté en transformant convenablement l'intégrale à différentier.

Soit, par exemple, $I = \int_0^\infty x \sin(x^3 - \alpha x)\, dx$. En différentiant sous le signe, le résultat est indéterminé.

Transformons I de la manière suivante :

$$I = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^\infty x \sin(x^3 - \alpha x)\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^\infty \frac{3x^2 - \alpha}{3x} \sin(x^3 - \alpha x)\, dx + \frac{\alpha}{3} \int_0^\infty \frac{\sin(x^3 - \alpha x)}{x}\, dx.$$

$$I = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \left[-\frac{\cos(x^3 - \alpha x)}{3x} \right]_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos(x^3 - \alpha x)}{3x^2}\, dx \right\}$$

$$+ \frac{\alpha}{3} \int_0^\infty \frac{\sin(x^3 - \alpha x)}{x}\, dx.$$

Comme on peut, à des infiniment petits près, remplacer le cosinus par l'unité dans le terme aux limites, on aura

$$I = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(x^3 - \alpha x)}{3x^2}\, dx + \frac{\alpha}{3} \int_0^\infty \frac{\sin(x^3 - \alpha x)}{x}\, dx$$

En dérivant maintenant par rapport à α, toutes les intégrales sont équiconvergentes, et l'on trouve

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{3} \int_0^\infty \cos(x^3 - \alpha x)\, dx.$$

Ce résultat, rapproché de celui que nous avons donné au n° 38, prouve que si l'on pose

$$V = \int_0^\infty \cos(x^3 - \alpha x)\, dx,$$

V vérifie l'équation

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{\alpha V}{3} = 0,$$

d'où l'on peut tirer la valeur de V en série convergente (*). Cette intégrale se rencontre dans la théorie de l'arc-en-ciel.

(*) Ph. Gilbert, *Cours d'analyse*, 3e édit., p. 184, exercice 15.

41. Tous les résultats qui précèdent peuvent se déduire d'une formule générale.

Soit a une quantité quelconque plus petite que α ; on aura

$$\frac{d}{d\alpha}\int_p^{\infty} f(x,\alpha)\,dx = \frac{d}{d\alpha}\lim_{N=\infty}\int_p^N dx\int_a^{\alpha} f'_\alpha\,d\alpha = \frac{d}{d\alpha}\lim_{N=\infty}\int_a^{\alpha} d\alpha\int_p^N f'_\alpha\,dx.$$

On pourra donc encore dériver sous le signe, si l'on a

$$\lim_{N=\infty}\int_a^{\alpha} d\alpha\int_p^N f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int_a^{\alpha} d\alpha\int_p^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

pour une valeur convenable de a.

42. Quand l'intégrale $\int_p^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ ne sera pas convergente, la formule

$$\frac{d}{d\alpha}\int_p^{\infty} f(x,\alpha)\,dx = \frac{d}{d\alpha}\lim_{N=\infty}\int_a^{\alpha} d\alpha\int_p^N f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

pourra encore conduire à la solution du problème.

En effet, si l'on peut décomposer $\int_p^N f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$ de la manière suivante :

$$\int_p^N f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int_p^N \varphi(x,\alpha)\,dx + \psi(\alpha,N),$$

l'intégrale $\int_a^{\infty} \varphi(x,\alpha)\,dx$ étant équiconvergente, et l'intégrale $\int_a^{\alpha} \psi(\alpha,N)\,d\alpha$ tendant vers zéro quand N tend vers l'infini, on aura, en vertu de la formule donnée ci-dessus et du théorème X,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_p^{\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_p^{\infty} \varphi(x,\alpha)\,dx.$$

43. *Applications.* 1° Reprenons d'abord par cette méthode l'exemple du n° 40. On va voir qu'elle conduit bien plus rapidement au but que la précédente. On a ici

$$I = \int_0^{\infty} x \sin(x^3 - \alpha x)\,dx,$$

$$f'_\alpha(x,\alpha) = -x^2\cos(x^3 - \alpha x),$$

$$\int_0^N x^2 \cos(x^3 - \alpha x)\,dx = \int_0^N \frac{3x^2 - \alpha}{3}\cos(x^3 - \alpha x)\,dx$$
$$+ \frac{\alpha}{3}\int_0^N \cos(x^3 - \alpha x)\,dx$$
$$= \frac{\sin(N^3 - \alpha N)}{3} + \frac{\alpha}{3}\int_0^N \cos(x^3 - \alpha x)\,dx$$

L'intégrale $\int_0 \cos(x^3 - \alpha x)\,dx$ est équiconvergente; ensuite

$$\lim_{N=\infty} \int_0^\alpha \frac{\sin(N^3 - \alpha N)}{3}\,d\alpha = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{1}{3}\int_0^\infty \cos(x^3 - \alpha x)\,dx.$$

44. 2° Voici encore une application intéressante de la même remarque. Posons

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\,dx.$$

On aura d'abord

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\,dx,$$

car cette intégrale est équiconvergente (n° 14).

On aura ensuite

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = -\frac{d}{d\alpha}\lim_{N=\infty}\int_0^\alpha d\alpha \int_0^N \frac{x^2 \cos \alpha x}{1 + x^2}\,dx;$$

et, comme précédemment,

$$-\int_0^N \frac{x^2 \cos \alpha x}{1 + x^2}\,dx = -\int_0^N \cos \alpha x\,dx + \int_0^N \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\,dx$$
$$= -\frac{\sin \alpha N}{\alpha} + \int_0^N \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\,dx.$$

L'intégrale $\int^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$ est équiconvergente, l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{\alpha} \sin(\alpha N) \frac{d\alpha}{\alpha}$ tend vers zéro quand N tend vers l'infini, donc

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = I.$$

On en conclut aisément

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}.$$

NOTE I.

APPLICATION DU THÉORÈME XIV AUX FONCTIONS EULÉRIENNES.

Pour trouver la relation fondamentale entre les fonctions eulériennes de première et de seconde espèce, on peut procéder comme il suit :

De l'équation

$$\int_0^{\infty} \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha(1+x)}\, d\alpha = \frac{\Gamma(p+q)}{(1+x)^{p+q}},$$

on déduit

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}\, dx}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^{\infty} x^{q-1}\, dx \int_0^{\infty} \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha(1+x)}\, d\alpha;$$

et, en changeant l'ordre des intégrations, on trouve

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Il s'agit donc de justifier l'équation

$$\int_0^{\infty} x^{q-1}\, dx \int_0^{\infty} \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha(1+x)}\, d\alpha = \int^{\infty} \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha}\, d\alpha \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-\alpha x}\, dx.$$

Il faut supposer $q > 1$, pour que la fonction sous le signe soit continue; le théorème XIV s'applique alors très simplement, puisque la fonction à intégrer est toujours de même signe et le résultat final determiné (n° 37).

1° L'intégrale $(\alpha^{p+q-1} e^{-\alpha}) \int_0^\infty x^{q-1} e^{-\alpha x} dx$ est équiconvergente en général dans l'intervalle $(0, \infty)$; on voit immédiatement (théorème I) que l'équiconvergence ne peut cesser que pour $\alpha = 0$.

2° L'intégrale $x^{q-1} \int_0^\infty \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha(1+x)} d\alpha$ est équiconvergente dans l'intervalle $(0, \infty)$; le théorème de la moyenne nous donne, en effet,

$$\alpha' > \mathrm{N}, \quad \mathrm{R}_n = (x^{q-1} e^{-\alpha' x}) \int_{\mathrm{N}}^\infty \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha} d\alpha < x^{q-1} e^{-\mathrm{N}x} \Gamma(p+q).$$

Ces deux conditions suffisent en vertu de la remarque du n° 37, et l'équation est démontrée.

M. C. Jordan donne du théorème en question une démonstration plus simple que la précédente (*), mais elle repose sur un changement de variables qui revient à un changement d'ordre d'intégration.

NOTE II.

SUR L'INTRODUCTION DE LA NOTION DE CONVERGENCE UNIFORME DANS LA THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

La notion d'égale convergence s'est présentée d'abord dans l'étude des séries, mais elle se rattache à la théorie générale des limites.

A notre connaissance, Dini (**), le premier, a donné des définitions générales pour la convergence uniforme des fonctions de plusieurs variables vers leur limite, quand certaines de ces

---

(*) *Cours d'analyse*, t. II, n° 186.
(**) *Fondamenti*, 1878, p. 397.

variables tendent vers des valeurs déterminées. Il en a fait quelques applications à la théorie des intégrales définies; mais il considère le cas général de fonctions simplement intégrables et s'arrête, sans donner peut-être les théorèmes les plus importants.

La question a été reprise à un autre point de vue par Selivanoff (*). Ce géomètre s'occupe des intégrales à limites infinies et donne la définition de l'équiconvergence dans le cas d'un paramètre imaginaire. Il démontre le théorème sur la continuité et passe immédiatement à l'étude des conditions suffisantes pour pouvoir différentier sous le signe. Il arrive ainsi à un théorème remarquable qui se rattache à la théorie des variables imaginaires, mais ne peut pas rendre grand service dans le cas d'un paramètre réel, car le critérium qui en résulte échoue même dans des cas où les règles ordinaires peuvent réussir. C'est ce qui résulte des exemples mêmes signalés par l'auteur.

Plus récemment (1885), O. Stolz a introduit la notion d'égale convergence dans la théorie des intégrales doubles (**). Le problème qu'il se propose est de trouver dans quel cas une intégrale double, prise dans une région *déterminée*, peut se calculer par deux intégrations linéaires successives, quand la fonction n'est pas supposée continue, et que l'on opère un changement de variables dans ces intégrales.

NOTE III.

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES INTÉGRALES DOUBLES.

1. On démontre dans tous les traités d'analyse que si $f(x, y)$ est une fonction simple, finie et continue de x et de y dans une région *déterminée* T, le calcul de l'intégrale double $\int_T f(x, y)\, dT$ se ramène à deux intégrales simples successives (***). Il suffit

(*) *Bulletin de la Société math. de France*, 1882.

(**) *Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen.* MATHEMATISCHE ANNALEN, XXVI, 82-96.

(***) C. JORDAN, *Cours d'analyse*, t. II, n° 122. — PH. GILBERT, *Cours d'analyse*, 3e édition, n° 362.

même pour que cette réduction soit possible que $f(x, y)$ soit fini et intégrable dans l'aire T (*). La démonstration nous paraît tout à fait rigoureuse. Mais, en général, on étend le théorème au cas où le champ d'intégration est illimité, comme aussi à celui où la fonction passe par l'infini, pourvu que l'intégrale double ait un sens. Cette généralisation est illégitime.

On ne peut admettre l'extension du théorème comme conséquence de la démonstration dont il vient d'être question, car le raisonnement suppose *essentiellement* que le champ d'intégration et la fonction elle-même soient limités. Il faut donc une démonstration spéciale. L'objet de cette note est de montrer quelle lacune subsiste dans cette démonstration, et quel est le moyen de la compléter, dans chaque cas, si la chose est possible.

2. Laissons de côté l'hypothèse où la fonction passerait par l'infini, hypothèse à laquelle s'appliqueraient des considérations analogues, et occupons-nous simplement de celle où le champ d'intégration est illimité.

Quand on cherche à démontrer le théorème que nous critiquons, on limite par une ligne arbitraire (c) une portion T′ de la région T et l'on fait varier cette ligne de manière à embrasser finalement tous les points de la région T. On raisonne alors de la manière suivante :

« Dans l'étendue de la région T, on peut appliquer la pro-
» priété dont il s'agit, sans difficulté ; d'autre part, l'intégrale
» étendue à la région T diminuée de la région T′, d'après notre
» hypothèse, a pour limite zéro ; donc l'intégrale $\int_T f(x, y)\, dT$
» sera la limite commune vers laquelle tendront les intégrales
» prises par rapport aux variables x et y, lorsque le contour se
» développera indéfiniment. »

La conclusion est exacte, mais n'est pas équivalente au théorème en cause, à moins d'admettre implicitement la relation non démontrée $\lim \int = \int \lim$.

(*) P. du Bois-Reymond, *Ueber das Doppelintegral* (Journal de Crelle, XCIV, 1883, pp. 273-290). — Harnack, *Elemente der Diff. u. integ. Rechnung*, p. 309. — C. Jordan, *Rem. sur les intég. définies.* (Journ. de math. 1892.)

3. Éclaircissons l'objection par un exemple.

Considérons un cas particulier. La région T comprend l'angle des coordonnées positives et la région T' un rectangle indéfiniment croissant, formé sur l'abscisse OX = X et l'ordonnée OY = Y. Le raisonnement précédent montre que $\int_T f(x, y)\, dT$ sera la limite commune des deux expressions

$$\int_0^X dx \int_0^Y f(x, y)\, dy, \qquad \int_0^Y dy \int_0^X f(x, y)\, dx,$$

quand X et Y tendront vers l'infini. Pour que la démonstration fût complète, il faudrait *en outre* démontrer que ces limites sont respectivement

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x, y)\, dy, \qquad \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)\, dx,$$

ce qui n'est pas possible sans restriction, car, dans l'une ou l'autre expression, X ou Y tend vers l'infini sous le signe $\int$.

Il est facile de voir qu'il suffirait de démontrer

$$\lim_{X=\infty} \int_0^\infty dy \int_0^X f(x, y)\, dx = \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)\, dx,$$

$$\lim_{Y=\infty} \int_0^\infty dx \int_0^Y f(x, y)\, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)\, dx.$$

Pour justifier ces égalités, on pourra toujours faire appel à la notion d'équiconvergence, et s'appuyer sur les théorèmes que nous avons donnés.

4. *Remarque.* Dans le problème qui nous occupe, on fait, il est vrai, une hypothèse particulière: L'intégrale double est supposée avoir un sens, ce qui revient à dire qu'elle est absolument convergente (*). Il suffirait donc de prouver les dernières relations pour une fonction $f(x, y)$ continue et positive. Mais nous pensons que, même dans ce cas, elles peuvent être mises en défaut. C'est ce qui arriverait, par exemple, si la fonction de x représentée par l'intégrale $\int_0^\infty f(x, y)\, dy$ n'était pas intégrable. Or, il ne

(*) C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. II, nos 148 et 150.

nous semble ni démontré ni démontrable que cette intégrale doive nécessairement représenter une fonction de x susceptible d'intégration, $f(x, y)$ fût-il même continu et positif.

5. A ce point de vue, l'exemple suivant, où la fonction reste toujours de même signe, présente un certain intérêt.

Supposons que $f(x, y)$ soit une fonction $\varphi(x)$ de x seulement définie de la manière suivante : $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ quand x est une fraction irréductible $\frac{p}{q}$; $\varphi(x) = 0$ quand x est irrationnel.

On peut considérer l'intégrale $\int_{T'} \varphi(x)\, dT'$ étendue à une portion *déterminée* de l'angle des coordonnées positives. Cette *intégrale double* existe au sens propre du terme, et est toujours nulle, car il y a dans tout intervalle des valeurs irrationnelles de x et $\varphi(x)$ peut s'annuler dans toute région.

D'autre part, l'*intégrale simple* $\int_0^X \varphi(x)\, dx$ existe aussi et est égale à zéro. On reconnaît donc ici sans peine que l'intégrale double $\int_{T'} \varphi(x)\, dT'$ peut toujours s'exprimer par deux intégrales simples successives.

Considérons encore les régions T et T' définies au n° 3 ; nous aurons également

$$\int_T \varphi(x) dT = \lim \int_{T'} \varphi(x)\, dT' = 0,$$

et de même

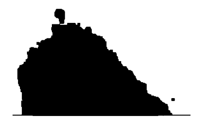
$$\lim \int_0^X dx \int_0^Y \varphi(x)\, dy = \lim \int_0^Y dy \int_0^X \varphi(x)\, dx = 0,$$

X et Y tendant vers l'infini comme précédemment.

On ne peut pas cependant en conclure

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \varphi(x)\, dy = 0,$$

car l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(x)\, dy$ est nulle pour toute valeur irrationnelle de x, infinie pour toute valeur rationnelle, et cette fonction ne peut plus s'intégrer.



SUR LE DÉVELOPPEMENT

EN SÉRIE DE FORMULES

DU MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE

ET SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CE MOUVEMENT (*)

PAR

M. le Cte de SPARRE

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon.

INTRODUCTION.

L'étude du mouvement du pendule conique a été faite déjà nombre de fois par l'emploi des fonctions elliptiques, et je m'en suis occupé en particulier dans un mémoire publié dans les *Annales* de la Société (**). On a donné aussi plusieurs fois la solution de cette question par l'emploi des séries, et l'on peut citer entre autres celle donnée par M. Résal dans le tome VII de son *Traité de mécanique générale*.

Les développements en série que je donne dans cette note présentent sur les précédents l'avantage d'être un peu plus simples et de mettre en évidence la propriété établie par Puiseux, relative à l'angle formé par les azimuts du pendule pour un maximum et le minimum consécutif de l'angle d'écart, ce que ne faisaient nullement les autres développements.

J'ai abordé ensuite la question des points d'inflexion que peut présenter la projection horizontale de la courbe décrite par l'extrémité du pendule. Cette question a été résolue par Halphen,

---

(*) Voir Première partie, pp. 77-78, le rapport de M. De Tilly.

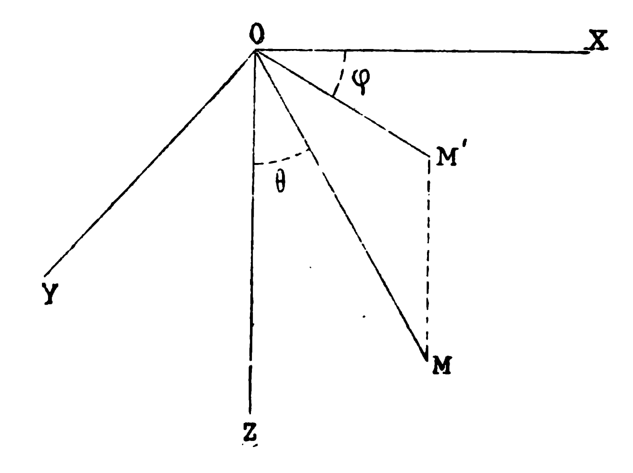
(**) 1885, t. IX, pp. 48-94.

dans le second volume de son *Traité des fonctions elliptiques*, mais j'en fait connaître une solution plus complète, en indiquant d'abord qu'elle n'est qu'un cas particulier d'une question plus générale relative au mouvement d'un point sur une surface sous l'influence d'une force constante comme grandeur et comme direction, et en déterminant ensuite non seulement la condition d'existence des points d'inflexion, mais aussi les coordonnées de ces points.

J'ai cru enfin utile de donner également la démonstration de quelques autres propriétés bien connues du mouvement du pendule conique, afin de présenter une solution complète de cette question par les fonctions élémentaires.

I

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FORMULES DU PENDULE CONIQUE.



Soit OX, OY, OZ trois axes rectangulaires passant par le point de suspension du pendule, OZ étant vertical; M la position

actuelle du point mobile qui forme l'extrémité du pendule; M' la projection horizontale du point M; l la longueur OM de la tige du pendule; θ l'angle que cette tige forme avec OZ; φ l'azimut du pendule, c'est-à-dire l'angle du plan vertical OMM' avec ZOX; θ_0 la valeur initiale de θ; v_0 la vitesse initiale; λ l'angle que cette vitesse initiale fait avec le parallèle de la sphère passant par le point de départ du pendule.

Les théorèmes des forces vives et des aires donneront alors pour les équations du mouvement :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{v_0^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

$$\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0}{l}\sin\theta_0 \cos\lambda.$$

Si nous posons maintenant

$$A^2 = \frac{g}{l}, \qquad B^2 = \frac{v_0^2}{2gl},$$

nos équations deviennent

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2A^2(\cos\theta - \cos\theta_0 + B^2),$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = AB\sqrt{2}\sin\theta_0 \cos\lambda.$$

Tirons maintenant de (2) la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ et portons-la dans (1); cette équation pourra s'écrire :

$$(3) \quad \sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = 2A^2\left[(\cos\theta - \cos\theta_0 + B^2)\sin^2\theta - B^2\sin^2\theta_0\cos^2\lambda\right].$$

Mais le second membre de l'équation (3), positif pour $\theta = \theta_0$, est au lieu de cela négatif pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$; on en conclut de suite que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule toujours pour deux valeurs réelles de θ, l'une correspondant à un maximum, l'autre à un minimum de cette variable. On peut donc, sans nuire en rien à

la généralité, prendre $\lambda = 0$ en choisissant pour instant initial celui où θ est maximum ou minimum.

Par suite, si nous posons de plus

$$z = \cos\theta, \qquad a = \cos\theta_0,$$

les équations (3) et (2) deviendront

$$(4) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \frac{dz^2}{dt^2} = 2A^2(z - a)(1 - B^2a - B^2z - z^2).$$

$$(5) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{AB\sqrt{2(1 - a^2)}}{1 - z^2}.$$

L'équation

$$(6) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad z^2 + B^2z - 1 + B^2a = 0$$

a toujours une racine négative inférieure à -1, car en substituant dans le premier membre de (6) la valeur -1, le résultat est négatif. Cette équation a d'ailleurs une seconde racine comprise entre -1 et $+1$, car le résultat de la substitution de $+1$ est positif.

Désignons par b cette dernière racine et par θ_1 la valeur correspondante de θ, en posant donc

$$b = \cos\theta_1,$$

je dis que l'on aura

$$a + b > 0$$

En effet, si l'on substitue $-a$ dans le premier membre de (6), on a un résultat négatif, et, par suite, b est compris entre $-a$ et 1 ; on a donc

$$b > -a$$

ou

$$b + a > 0.$$

Cette relation fait voir que le pendule, lorsqu'il passe dans

l'hémisphère supérieur, se rapproche toujours plus de la verticale dans l'hémisphère inférieur que dans le supérieur.

Nous supposerons maintenant que a corresponde à un *maximum* et b à un *minimum* de θ; de plus, nous désignerons par $-c$ la racine de l'équation (6) inférieure à -1.

Nous supposons donc

$$a < b,$$

ce qui exige

$$a^2 + 2B^2a - 1 < 0.$$

Nous aurons maintenant, en vertu des relations entre les coefficients de l'équation (6) et les racines,

$$c - b = B^2, \qquad bc = 1 - B^2a.$$

On en déduit

$$c = \frac{1 + ab}{a + b}, \qquad B^2 = \frac{1 - b^2}{a + b},$$

et, par suite,

$$z^2 + B^2z - 1 + B^2a = (z - b)\left(z + \frac{1 + ab}{a + b}\right).$$

Les équations (4) et (5) donneront donc

$$dt = \frac{\pm 1}{A\sqrt{2}} \frac{dz}{\sqrt{(z - a)(b - z)\left(z + \frac{1 + ab}{a + b}\right)}},$$

$$d\varphi = A\sqrt{2}\sqrt{\frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{a + b}} \frac{dt}{1 - z^2}.$$

Posons maintenant

$$z = a \sin^2 u + b \cos^2 u = b - (b - a)\sin^2 u,$$

en supposant que u croisse de $-\frac{\pi}{2}$ à 0 lorsque θ décroît de θ_0 à θ_1, et de 0 à $\frac{\pi}{2}$ lorsque θ croît de θ_1 à θ_0, nous aurons alors, en remarquant que dt et du seront toujours de même signe,

$$\pm \frac{dz}{\sqrt{(z - a)(b - z)}} = 2du,$$

et en prenant

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 + 2ab + b^2},$$

$$z + \frac{1 + ab}{a + b} = \frac{1 + 2ab + b^2}{a + b}(1 - k^2 \sin^2 u).$$

Il viendra, par suite,

$$dt = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2(a+b)}{1+2ab+b^2}}(1 - k^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} du,$$

$$d\varphi = \sqrt{\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{1+2ab+b^2}} \frac{2(1-k^2\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}\, du}{[1-b+(b-a)\sin^2 u][1+b-(b-a)\sin^2 u]}.$$

Nous avons d'abord, par la formule du binôme,

$$(1 - k^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 u + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4 u + \cdots$$

$$+ \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} k^{2n} \sin^{2n} u + \cdots$$

Cette série est toujours convergente, car de la formule

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 + 2ab + b^2}$$

on déduit

$$1 - k^2 = \frac{1 + 2ab + a^2}{1 + 2ab + b^2},$$

et comme nous avons

$$b^2 > a^2,$$

k^2 sera toujours compris entre 0 et 1.

En appliquant par suite la formule connue

$$(9)\quad \int^{u} \sin^{2n} u\, du = -\frac{\cos u \sin u}{2n}\left[\sin^{2n-2} u + \frac{2n-1}{2n-2}\sin^{2n-4} u + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n\,(2n-2)\ldots 2}\,u,$$

et prenant $t=0$ pour $u=0$, c'est-à-dire pour $\theta=\theta_1$, on aura

$$(10)\quad t = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2(a+b)}{1+2ab+b^2}}\left[P_0 u - \cos u \sin u\,(P_1 + P_2 \sin^2 u + \cdots + P_n \sin^{2n-2} u + \cdots)\right],$$

où l'on a posé

$$(11)\quad \begin{cases} P_0 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots, \\ P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots, \\ P_2 = \frac{1.3}{2.4}\frac{k^4}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{5}{4}\frac{k^6}{6} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{(2n-1)\ldots 5}{(2n-2)\ldots 4}\cdot\frac{k^{2n}}{2n} + \cdots, \\ P_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{k^6}{6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{7}{6}\frac{k^8}{8} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{(2n-1)\ldots 7}{(2n-2)\ldots 6}\cdot\frac{k^{2n}}{2n} + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Passons maintenant au calcul de φ. Pour cela, dans l'expression

$$\frac{2(1-k^2\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}}{\left[1-b+(b-a)\sin^2 u\right]\left[1+b-(b-a)\sin^2 u\right]},$$

posons

$$1-b+(b-a)\sin^2 u = x,$$

$$\frac{b+a}{(1+b)(1+a)} = \mu,$$

cette expression deviendra

$$\sqrt{\frac{1+2ab+b^2}{(1+a)(1+b)}} \cdot \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\left(1-\mu x\right)^{-\frac{1}{2}}}{x}.$$

On aura donc

$$d\varphi = \sqrt{(1-a)(1-b)}\,\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\left(1-\mu x\right)^{-\frac{1}{2}}}{x}\,du.$$

Mais les deux expressions

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}, \qquad \left(1-\mu x\right)^{-\frac{1}{2}}$$

peuvent se développer par la formule du binôme en séries toujours convergentes.

En effet, le maximum de x est

$$1-a<2,$$

et, de plus, on a

$$\mu<\frac{1}{2},$$

puisque cette dernière inégalité revient à

$$\frac{2b+2a}{(1+b)(1+a)}<1$$

ou à

$$1-a-b+ab=(1-a)(1-b)>0,$$

condition toujours vérifiée.

On aura donc, dans tous les cas, les deux développements suivants :

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\cdots$$

$$(1-\mu x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\mu x+\frac{1.3}{2.4}\mu^2x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mu^3x^3+\cdots,$$

et en faisant le produit de ces deux développements

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\left(1-\mu x\right)^{-\frac{1}{2}}=1+Q_0x+Q_1x^2+Q_2x^3+\cdots$$

où l'on a posé

$$(12)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Q_0=\frac{1}{2}(1+\mu),\\ Q_1=\frac{1}{2^2}\left(1+\mu+\frac{1.3}{1.2}\mu^2\right),\\ Q_2=\frac{1}{2^3}\left(1+\mu+\frac{1.3}{1.2}\mu^2+\frac{1.3.5}{1.2.3}\mu^3\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

il viendra, par suite,

$$d\varphi=\sqrt{(1-a)(1-b)}\left[\frac{1}{x}+Q_0+Q_1x+Q_2x^2+Q_3x^3+\cdots\right]du.$$

Mais nous avons d'abord

$$\int\frac{du}{x}=\int\frac{du}{(1-a)\sin^2u+(1-b)\cos^2u}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1-b}}\operatorname{tg}u\right),$$

de sorte qu'en prenant $\varphi=0$ pour $u=0$, il vient

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1-b}}\operatorname{tg}u\right)+\sqrt{(1-a)(1-b)}\int_0^u(Q_0+Q_1x+Q_2x^2+\cdots)du.$$

Mais

$$x^n=\beta^n(1+\alpha\sin^2u)^n$$

en posant

$$\beta = 1 - b, \qquad \alpha = \frac{b-a}{1-b},$$

d'où

$$\alpha\beta = b - a.$$

On a donc en développant

$$x^n = \beta^n \left(1 + n\alpha \sin^2 u + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 \sin^4 u + \cdots + \alpha^n \sin^{2n} u\right)$$

et, par suite,

$$Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \cdots = R_0 + R_1 \sin^2 u + R_2 \sin^4 u + \cdots$$

en posant

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} R_0 = Q_0 + \beta Q_1 + \beta^2 Q_2 + \cdots \\ R_1 = \alpha\beta\,(Q_1 + 2\beta Q_2 + 3\beta^2 Q_3 + \cdots) \\ R_2 = \alpha^2\beta^2\left(Q_2 + 3\beta Q_3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta^{n-2}Q_n + \cdots\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Mais la formule (9) nous donnera alors

$$\int (Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \cdots)\, du$$

$$= S_0 u - \cos u \sin u\,(S_1 + S_2 \sin^2 u + S_3 \sin^4 u + \cdots + S_n \sin^{2n-2} u \ldots),$$

où l'on a

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} S_0 = R_0 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1.3}{2.4}R_2 + \cdots \quad + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ 2n}R_n + \cdots, \\ S_1 = \frac{1}{2}R_1 + \frac{3}{2}\frac{R_2}{4} + \frac{3.5}{2.4}\frac{R_3}{6} + \cdots \quad + \frac{3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{R_n}{2n} + \ldots, \\ S_2 = \frac{R_2}{4} + \frac{5}{4}\frac{R_3}{6} + \frac{5.7}{4.6}\cdot\frac{R_4}{8} + \cdots \quad + \frac{5.7\ldots(2n-1)}{4.6\ldots(2n-2)}\frac{R_n}{2n} + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

et l'on en déduit enfin

$$(16)\left\{\begin{array}{l}\varphi = \text{arc tg}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{1-b}}\,\text{tg}\,u\right) + \sqrt{(1-a)(1-b)}\Big[S_0 u \\ \quad -\cos u \sin u(S_1 + S_2 \sin^2 u + S_3 \sin^4 u + \cdots + S_n \sin^{2n-2} u + \cdots)\Big].\end{array}\right.$$

Les formules (10) et (16), jointes aux développements (11), (12), (13) et (14), résolvent complètement le problème.

Rappelons d'ailleurs que l'on a

$$(17)\left\{\begin{array}{l} a = \cos\theta_0, \quad b = \cos\theta_1, \quad z = \cos\theta, \quad \mu = \dfrac{b+a}{(1+a)(1+b)}, \\ k^2 = \dfrac{b^2-a^2}{1+2ab+b^2}, \qquad \sin^2 u = \dfrac{b-z}{b-a}; \end{array}\right.$$

on tire de plus de la dernière formule

$$(18) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{tg}\, u = \sqrt{\frac{b-z}{z-a}}.$$

Si nous désignons par Φ l'angle que forment les azimuts d'un maximum et du minimum suivant (ou réciproquement d'un minimum et du maximum suivant), il suffira pour avoir Φ de faire $u = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (16). On trouve ainsi

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sqrt{(1-a)(1-b)}\, S_0\right].$$

Comme S_0 est une série dont tous les termes sont positifs, cette formule fait voir que Φ est toujours plus grand que $\frac{\pi}{2}$: c'est le théorème de Puiseux.

Supposons maintenant que nous négligions les termes en θ^4. Comme avec cette approximation

$$\sqrt{(1-a)(1-b)} = \frac{\theta_1\theta_0}{2},$$

nous devrons négliger les termes en θ^2 dans S_0, S_1... Mais on a d'abord, aux termes en θ^2 près,

$$\mu = \frac{b + a}{(1 + a)(1 + b)} = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha\beta = 0$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} R_0 &= Q_0 = \frac{1}{2}(1 + \mu) = \frac{3}{4}, \\ R_1 &= R_2 = \cdots = 0, \\ S_0 &= R_0 = \frac{3}{4}, \\ S_1 &= S_2 = \cdots = 0. \end{aligned}$$

La formule (16) deviendra donc

$$\varphi = \text{arc tg}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\,\text{tg}\,u\right) + \frac{3}{8}\theta_1\theta_0 u.$$

Mais la formule (10) donne, toujours aux termes en θ^2 près,

$$t = \frac{u}{A}.$$

On pourra donc écrire

$$\varphi = \text{arc tg}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\,\text{tg}\,u\right) + \frac{3}{8}\theta_1\theta_0 A t,$$

de sorte que si l'on pose

$$\psi = \varphi - \frac{3}{8}\theta_1\theta_0 A t,$$

on aura

$$\text{tg}\,\psi = \frac{\theta_0}{\theta_1}\,\text{tg}\,u.$$

Mais en négligeant toujours les termes en θ^4,

$$\text{tg}^2 u = \frac{b - z}{z - a} = \frac{\theta^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2 - \theta^2},$$

et il viendra, par suite,

$$\mathrm{tg}^2\psi = \frac{\theta_0^2}{\theta_1^2}\,\frac{\theta^2 - \theta_1^2}{\theta_0^2 - \theta^2};$$

on déduit de cette équation

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta_1^2}\cos^2\psi + \frac{1}{\theta_0^2}\sin^2\psi.$$

On conclut de là que, aux termes en θ^3 près, la courbe décrite par la projection horizontale du pendule est une ellipse dont les axes tournent dans le sens du mouvement avec une vitesse angulaire égale à

$$\frac{3}{8}\theta_1\theta_0 A = \frac{3}{8}\theta_1\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Mais si l'on désigne par T le temps d'une oscillation complète, on a, aux termes en θ^2 près,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

de sorte que l'on en déduit, pour la vitesse angulaire de rotation des axes de l'ellipse,

$$\frac{3\pi\theta_1\theta_0}{4T};$$

c'est le résultat obtenu par M. Résal.

II

POINTS D'INFLEXION DE LA PROJECTION HORIZONTALE DE LA COURBE DÉCRITE PAR LE PENDULE.

Halphen a remarqué que la courbe décrite par la projection horizontale du pendule peut présenter des points d'inflexion, et

que ces points correspondent à ceux de la trajectoire où la pression du pendule sur la sphère, ou, si l'on veut, la tension de la tige, est nulle.

Le fait résulte d'ailleurs du théorème beaucoup plus général suivant :

« Si un point assujetti à décrire une surface fixe est sollicité par une force quelconque :

1° Aux points où la pression du mobile sur la surface est nulle, la force est située dans le plan osculateur de la trajectoire;

2° Réciproquement, aux points où la force est située dans le plan osculateur de la trajectoire, la pression du mobile sur la surface est nulle, à moins que le plan osculateur de la trajectoire ne soit normal à la surface ».

Ce théorème s'établit très simplement de la manière suivante :

Désignons par x', y', z', x'', y'', z'' les dérivées par rapport au temps;

par X, Y, Z les composantes de la force qui sollicite le point;

par N la réaction de la surface.

Soit, de plus,

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface, et posons enfin

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Les équations du mouvement du point sont :

$$(19) \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= X + \frac{N}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ y'' &= Y + \frac{N}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ z'' &= Z + \frac{N}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, l'équation du plan osculateur au point x, y, z est

$$(20) \ldots \quad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

avec

$$(21) \ldots\ldots \quad \begin{cases} A = y'z'' - z'y'', \\ B = z'x'' - x'z'', \\ C = x'y'' - y'x''. \end{cases}$$

Si l'on écrit maintenant que la force est située dans le plan osculateur, on a la relation

$$AX + BY + CZ = 0,$$

ou, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs tirées des équations (19),

$$Ax'' + By'' + Cz'' - \frac{N}{\Delta}\left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{dz}\right) = 0.$$

Mais en vertu des relations (21)

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

On conclut de là que la condition nécessaire et suffisante pour que la force soit située dans le plan osculateur de la trajectoire, est

$$(22) \ldots\ldots \quad \frac{N}{\Delta}\left(A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Cette relation fait voir :

1° Que si $N = 0$, la force est située dans le plan osculateur, l'équation (22) étant alors satisfaite. Donc si la réaction N de la surface devient nulle à un moment quelconque, à cet instant la force est située dans le plan osculateur de la trajectoire;

2° Que si la force est, à un instant quelconque, dans le plan osculateur de la courbe, ce qui entraine la relation (22), on doit avoir à cet instant, ou

$$N = 0,$$

c'est-à-dire la réaction de la surface nulle, ou

$$(23) \ldots\ldots \quad A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire le plan osculateur de la courbe normal à la surface. La relation (23) exprime, en effet, que le plan osculateur contient la normale à la surface.

Ce théorème que nous venons d'établir se démontre aussi très simplement par quelques considérations géométriques. On sait que si l'on décompose la force qui sollicite le point en deux composantes, l'une P dirigée suivant la tangente et l'autre Q située dans le plan normal, la pression du point sur la surface sera la résultante de Q et de la force centrifuge.

Il résulte de là que :

1° Si la pression du point sur la surface est nulle, la force centrifuge, qui est dirigée suivant le prolongement du rayon de courbure de la trajectoire, est égale et directement opposée à la composante normale Q de la force motrice. Par suite, le plan passant par Q et par la tangente, qui contient la force, est le plan osculateur ;

2° Si la force est située dans le plan osculateur, la composante Q sera également dans ce plan. Par suite, la pression du point sur la surface, résultante de deux forces, la composante Q et la force centrifuge, situées toutes deux dans le plan osculateur, sera ou nulle ou située, elle aussi, dans ce plan.

Mais la pression du point sur la surface est dirigée suivant la normale à cette surface, elle sera donc nulle, à moins que le plan osculateur ne soit normal à la surface.

Du théorème que nous venons d'établir, on déduit immédiatement le suivant :

Si un point matériel se meut sur une surface sous l'influence d'une force de direction constante, la projection de la trajectoire sur un plan perpendiculaire à la direction de la force présentera des points d'inflexion aux points qui correspondent à ceux pour lesquels la pression du mobile sur la surface est nulle.

En effet, pour ce point où la pression du mobile sur la surface est nulle, la direction de la force est, d'après ce que nous avons vu, située dans le plan osculateur; le plan osculateur de la trajectoire est donc perpendiculaire au plan de projection, et on en conclut de suite que la projection présente un point d'inflexion.

On le voit géométriquement, en remarquant que, pour la projection horizontale, la distance de la tangente à un point infiniment voisin du point de contact est infiniment petite du troisième ordre, puisque cette distance est précisément, dans ce cas, la distance du plan osculateur à un point de la courbe infiniment voisin.

On peut le voir aussi en remarquant que, si l'on prend la direction de l'axe des z parallèle à la direction de la force, le plan osculateur devant être au point que l'on considère parallèle à l'axe des z, on doit avoir en ce point $C = 0$ dans l'équation du plan osculateur; or, $C = x'y'' - y'x''$ est précisément le dénominateur de l'expression du rayon de courbure de la projection horizontale.

Revenons maintenant au pendule conique. Il résulte de ce que nous venons de dire que la projection horizontale de la courbe décrite par le pendule présentera des points d'inflexion en tous les points correspondants à ceux où la tension de la tige est nulle; je dis, de plus, que cette projection horizontale ne peut pas présenter d'autres points d'inflexion.

En effet, la courbe étant tracée sur une surface convexe ne peut présenter d'inflexion dans l'espace, et la projection horizontale ne peut par suite présenter d'inflexion que pour les points où le plan osculateur de la trajectoire est verticale, c'est-à-dire contient la direction de la force, puisque cette force, qui est ici la pesanteur, est verticale.

Mais, d'après le théorème que nous avons établi, lorsque la force est dans le plan osculateur, il faut, soit que la réaction de la surface soit nulle, soit que le plan osculateur se confonde avec le plan normal à la surface passant par la direction de la force. Or, ce dernier cas ne peut se présenter ici, car si le plan osculateur contenait la direction de la pesanteur et la normale à la surface, il se confondrait avec le plan vertical méridien passant par le point que l'on considère. Mais alors en projection horizontale la courbe serait tangente au rayon vecteur, ce qui est impossible, puisque $\frac{d\varphi}{dt}$ ne devient jamais nul.

On aura donc les points d'inflexion de la projection horizontale en cherchant les points où la pression du mobile sur la surface (ou si l'on veut la tension de la tige) est nulle, et, de plus, il ne peut y en avoir d'autres, de sorte qu'on les obtiendra ainsi tous.

Pour un point qui se meut sur une surface fixe, si nous désignons par ρ_N le rayon de courbure de la section normale passant par la tangente à la trajectoire au point considéré; par F_N la composante de la force suivant la normale à la surface (lorsqu'on décompose la force motrice en trois composantes rectangulaires suivant la tangente à la trajectoire, la normale à la surface et la perpendiculaire à ces deux premières droites), on a alors, en vertu d'une formule bien connue et en supposant la masse du mobile égale à 1, pour la pression exercée par le mobile sur la surface,

$$\frac{v^2}{\rho_N} + F_N;$$

or ici

$$\rho_N = l, \qquad F_N = g \cos\theta = gz.$$

Les points pour lesquels la projection horizontale présente des points d'inflexion sont donc déterminés par l'équation

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{v^2}{l} + gz = 0.$$

On a d'ailleurs, par le théorème des forces vives,

$$v^2 = v_0^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) = v_0^2 + 2gl(z - a).$$

L'équation (24) devient donc

$$\frac{v_0^2}{l} + 3gz - 2ga = 0,$$

d'où l'on tire

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = -\frac{v_0^2 - 2gla}{3gl}$$

Pour que cette valeur soit acceptable, elle doit être supérieure à a, puisque a est le minimum de z, on doit donc avoir

$$-\frac{v_0^2 - 2gla}{3gl} > a,$$

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad v_0^2 + gla < 0.$$

Cette inégalité exige que a soit négatif, condition nécessaire, *a priori*, pour que la pression puisse devenir nulle. L'inégalité (26) exprime, d'ailleurs, que la pression du mobile à l'instant initial est négative, en considérant, ainsi que nous l'avons fait, comme positives les pressions dirigées suivant le prolongement du rayon, et comme négatives celles qui sont dirigées vers le centre.

Il résulte, en effet, de la formule rappelée plus haut, que la pression à l'instant initial est

$$\frac{v_0^2}{l} + g \cos \theta_0 = \frac{v_0^2 + gla}{l}.$$

Nous avons posé, dans le premier paragraphe,

$$\frac{v_0^2}{2gl} = B^2 = \frac{1 - b^2}{a + b},$$

où $b = \cos \theta_1$, θ_1 désignant le minimum de θ.

Si l'on remplace v_0^2 par sa valeur tirée de là, les relations (25) et (26) deviennent

$$(27) \qquad z = -\frac{2}{3}\frac{1 - b^2}{a + b} + \frac{2}{3}a = -\frac{2}{3}\frac{1 - b^2 - a^2 - ab}{a + b},$$

$$(28) \quad 2\frac{1 - b^2}{a + b} + a < 0 \qquad \text{ou} \qquad 2b^2 - ab - a^2 - 2 > 0.$$

Remarquons enfin que a étant négatif dans le cas actuel, la formule (25) donnera toujours pour z une valeur négative, ce qui devait être, *a priori*, la pression ne pouvant être nulle que pour une valeur de cos θ plus grande que 90°.

La valeur de z qui correspond aux points d'inflexion étant déterminée par les équations (25) ou (27), on aura la valeur correspondante de u par la formule (18), puis celles de t et de φ par les formules (10) et (16). Les coordonnées des points d'inflexion de la projection horizontale se trouveraient donc ainsi complètement déterminées.

NOTE COMPLÉMENTAIRE

AU SUJET DU PENDULE CONIQUE.

J'ai examiné dans le précédent mémoire les conditions pour lesquelles la projection horizontale de la courbe décrite par l'extrémité du pendule conique présente des points d'inflexion.

On peut de plus obtenir simplement le rayon de courbure de la projection horizontale de la trajectoire, comme il suit :

Soit R le rayon de courbure d'une courbe plane quelconque en un point M de cette courbe; ρ le rayon vecteur qui joint ce point à un point fixe O; A le double de l'aire du secteur compris entre la courbe, le rayon vecteur OM et un rayon vecteur initial OM_0; s l'arc de courbe.

Je dis que l'on a

$$(1)\ \ldots\ldots\quad \frac{1}{R}=\frac{d\left(\frac{dA}{ds}\right)}{\rho d\rho},$$

En effet

$$dA = ydx - xdy, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$\rho d\rho = xdx + ydy, \qquad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x - dxd^2y}.$$

de sorte que

$$d\left(\frac{dA}{ds}\right)=d\left(\frac{ydx-xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=\frac{(ydy+xdx)(dyd^2x-dxd^2y)}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\rho d\rho}{R},$$

ce qui justifie la formule (1), formule due à Euler et qui est susceptible de quelques applications en dehors du cas qui nous occupe.

Si l'on considère maintenant une force centrale F, considérée comme positive si elle est répulsive, et comme négative dans le cas contraire, on aura, en supposant la courbe décrite sous l'influence de cette force et désignant par k la constante des aires,

$$dA=kdt,\qquad ds=vdt,\qquad vdv=Fd\rho,$$

de sorte que la formule (1) devient

$$\frac{1}{R}=k\frac{d\frac{1}{v}}{\rho d\rho}=-\frac{kdv}{v^2\rho d\rho},$$

c'est-à-dire, en prenant R en valeur absolue et remplaçant dv par sa valeur donnée plus haut,

$$(2)\qquad\qquad \frac{1}{R}=\frac{kF}{v^3\rho}\ (^*).$$

Dans le mouvement du pendule, si nous appliquons la formule (2) à la projection horizontale de la courbe décrite, v désignera la projection horizontale de la vitesse; on aura donc, en désignant par V la vitesse du pendule dans l'espace et par l le rayon de la sphère,

$$v^2=V^2-l^2\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}=V_0^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta_0)+2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)\cos^2\theta.$$

Nous supposons la vitesse initiale V_0 du pendule horizontale.

(*) Cette formule a déjà été obtenue par M. Resal, *Traité de mécanique générale*, t. VII, p. 324.

Dans le cas présent, la force F est la projection horizontale de la réaction de la sphère; on a donc

$$F = \left(\frac{V^2}{l} + g \cos\theta\right)\sin\theta.$$

D'ailleurs,

$$\rho = l\sin\theta, \qquad k = lV_0 \sin\theta_0, \qquad V^2 = V_0^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

de sorte qu'il vient

$$\frac{1}{R} = \frac{V_0 \sin\theta_0 \left[V_0^2 + 3gl\cos\theta - 2gl\cos\theta_0\right]}{l\left[V_0^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta_0) + 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)\cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}},$$

ou en posant

$$\frac{V_0^2}{gl} = A^2,$$

$$R = \frac{l\left[A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta_0) + 2(\cos\theta - \cos\theta_0)\cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}{A\sin\theta_0\left[A^2 + 3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right]}.$$

UN CAS
D'ŒDÈME DU PHARYNX
ET
DE L'ISTHME DU GOSIER

PAR

M. le Dr CHARLIER (*).

Les cas d'œdème aigu du pharynx et de l'isthme du gosier ne sont pas très fréquents. Dans la littérature médicale on rencontre peu d'exemples de ce genre. C'est à peine si l'on trouve la mention de cette affection. Toujours on en néglige la description. Aussi je crois bien faire en notant l'observation suivante.

En janvier 1891, je fus appelé à donner mes soins à un cocher de place, grand buveur, qui, après d'abondantes libations, s'était endormi sur le siège de sa voiture et y avait été trouvé pour ainsi dire gelé.

Reconduit chez lui, il avait été soumis à l'action d'une chaleur un peu excessive.

Appelé le lendemain, je constatai que le sujet était atteint de bronchite qui, existant depuis plusieurs jours déjà, paraît-il, s'était assez fortement accrue.

Il n'y avait dans son état rien d'alarmant. Je lui fis garder la chambre et le revis le jour suivant. L'affection n'avait pas augmenté. Un seul symptôme nouveau s'était présenté le matin, symptôme qui cependant ne m'effrayait point : c'était de la raucité de la voix. Je fis continuer le traitement.

(*) Communication faite à la séance du 26 avril 1892.

Dans l'après-midi du même jour, on vint me rappeler en hâte, en me disant que le malade allait plus mal.

En arrivant chez lui, je fus grandement surpris de l'état dans lequel je le trouvai.

La face rouge, l'œil effaré, notre cocher allait d'un bout à l'autre de sa chambre, tantôt s'asseyant sur sa chaise, tantôt se jetant sur son lit, cherchant partout, sans la trouver, une position dans laquelle il se sentît plus à l'aise.

Les lèvres, entr'ouvertes, laissaient écouler la salive.

Pour éteindre la soif qui le dévorait, il portait continuellement à la bouche un verre d'eau auquel il ne parvenait pas à boire.

Je l'interrogeai pour savoir ce que signifiait tout cela; mais le malade, malgré sa meilleure volonté de tout dire, ne pouvait me raconter ce qui s'était passé. Sa voix était rauque, chevrotante, presque éteinte et continuellement entrecoupée par des efforts de déglutition. Parfois il lançait une note perçante et s'arrêtait alors pour porter les mains à la gorge comme s'il étranglait.

L'entourage m'apprit que le sujet s'était mis au lit vers midi et s'était éveillé vers quatre heures, sentant une gène à la gorge. Voulant boire pour faire disparaître cette sensation, il s'était aperçu que plus une goutte d'eau ne pouvait passer.

J'examinai la bouche et remarquai que les piliers antérieurs, la luette et le voile du palais étaient fortement tuméfiés, d'un aspect lisse et d'une teinte claire un peu jaunâtre.

La luette, très élargie dans toute son étendue, traînait sur la base de la langue.

Le voile du palais, manifestement épaissi, faisait un bourrelet bien marqué à son bord.

Les piliers, d'un volume exagéré, touchaient presque la luette.

L'ouverture de l'isthme du gosier était donc très rétrécie et presque effacée.

Dans ces conditions, il m'était bien difficile de faire un examen laryngoscopique, ce qui eût dû compléter mon diagnostic. D'ailleurs, je manquais d'instrument.

En faisant articuler au sujet la voyelle *a*, je remarquai que le voile du palais avait peine à se mouvoir. Cependant, par son

moindre soulèvement, je pus apercevoir la paroi postérieure du pharynx qui présentait les mêmes caractères que l'isthme du gosier.

En aucun point de la muqueuse je ne découvris de lésion.

Le doigt, introduit dans la bouche, percevait en ces points tuméfiés une résistance molle.

Mais je dois avouer que je n'avais pas grande confiance en cette sensation, car, chaque fois que j'introduisais le doigt, le sujet reculait de frayeur.

Pour compléter mon examen, je me servis de deux instruments improvisés.

Avec une aiguille à crocheter, j'appuyai sur les parties tuméfiées et m'aperçus de leur peu de résistance, tout en m'assurant de la dépression occasionnée par la pression de l'instrument.

Le second instrument improvisé fut un coupe-papier que je fis servir d'écran. En l'appuyant en différents endroits, mais surtout contre la luette, je m'assurai de la transparence de ces parties.

Cet examen terminé, je ne doutai nullement que j'avais affaire à de l'œdème.

Mais cet œdème se limitait-il à l'isthme du gosier et au pharynx? Je ne le pense pas, car les caractères de la voix indiquaient un embarras de la région laryngée.

Je suis persuadé que l'œdème s'étendait au larynx.

Un autre symptôme que j'ai oublié de mentionner, c'est un enchifrènement très prononcé, avec écoulement abondant de mucosités par les narines.

L'examen me fit découvrir une hypertrophie énorme de la muqueuse nasale, à tel point que les cornets inférieurs pressaient contre la cloison. Il n'était point possible de faire passer la plus petite quantité d'air par le nez. Par suite du gonflement de la muqueuse nasale, l'orifice du canal lacrymal était oblitéré et les larmes débordaient des paupières.

Du côté de la poitrine persistaient tous les signes de la sécrétion bronchique.

Où était le danger et que fallait-il faire? Certes, les parties atteintes formant l'arbre aérien devaient faire craindre l'asphyxie.

Il fallait donc agir, et agir rapidement.

Fallait-il, craignant un œdème de la glotte, faire la trachéotomie? Peut-être. Malheureusement j'étais, les mains vides, trop éloigné de chez moi pour songer à aller prendre ce qui m'était nécessaire.

Je devais agir vite.

Peut-être aurais-je dû ponctionner les parties œdématiées. Mais cette idée ne me vint que trop tard.

Vu l'urgence d'une prompte intervention, je fis chercher chez un pharmacien voisin un vésicatoire que j'appliquai d'une oreille à l'autre, en recouvrant pour ainsi dire tout le cou. J'ordonnai de l'y laisser, avertissant toutefois la famille qu'une opération pourrait être nécessaire. Je quittai le malade et vins le revoir quelques heures plus tard. Une amélioration assez sensible s'était produite. La voix s'était quelque peu éclaircie, la gêne à la gorge avait diminué.

Je fis maintenir le vésicatoire pendant toute la nuit.

Le lendemain je revis le malade et fus très étonné de le trouver à table, buvant et mangeant, comme s'il n'eût jamais souffert de la gorge.

Voilà certes un cas où la nécessité a été cause d'un traitement bénin, car il est certain que si j'eusse habité près du cocher, j'aurais pratiqué la trachéotomie, opération peu grave, il est vrai, mais dont les suites eussent été plus durables que celles de mon vésicatoire.

Je vous ai transmis cette observation parce qu'il s'agit bien là de l'influence du froid ayant amené une congestion intense de toutes les parties en contact avec l'air extérieur.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

LENTILLES ÉPAISSES ET DES SYSTÈMES OPTIQUES

PAR

G. VAN DER MENSBRUGGHE

membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université de Gand.

Dans les traités de physique, la théorie des lentilles épaisses est exposée d'une manière si compliquée et si peu méthodique, que le lecteur renonce bientôt à se l'assimiler; c'est pourquoi je me suis efforcé de trouver une méthode à la fois plus simple, plus rapide et très facile à retenir; il m'a suffi, pour obtenir ce résultat, d'appliquer au cas général la construction qui m'a servi à simplifier considérablement la théorie des miroirs et des lentilles très minces (*).

I. — Soit une portion de surface sphérique MM′ (fig. 1) séparant deux milieux; nous nommerons *axe principal* la droite qui joint le centre de figure O de la portion MM′ au centre de courbure C.

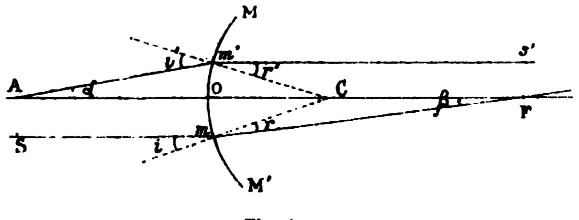


Fig. 1.

(*) *Sur une manière très simple d'exposer la théorie des miroirs ou des lentilles.* Voir 1re partie, pp. 62-65.

Soit Sm un rayon parallèle à l'axe principal AOC, mF le rayon réfracté correspondant; on a, en appelant i l'angle d'incidence, r l'angle de réfraction, c l'angle mCO et β l'angle mFC :

$$i = C, \qquad r = C - \beta.$$

Supposons maintenant que l'angle i, et conséquemment aussi r, soit assez petit pour que nous puissions substituer les arcs aux sinus; nous aurons alors, en désignant par n l'indice de réfraction du milieu où pénètre la lumière homogène :

$$i = nr;$$

il suit évidemment de là que

$$C = n(C - \beta) \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{n-1}{n} C.$$

Nommons F la distance OF, et R le rayon de la sphère; l'angle β vaut à fort peu près $\frac{Om}{F}$ et $C = \frac{Om}{R}$; donc

$$F = \frac{nR}{n-1} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

C'est la première *distance focale principale.*

Soit de même, dans le second milieu, un rayon S'm' parallèle à l'axe et peu écarté de celui-ci; on démontre (*) qu'il existe une deuxième distance focale principale A, telle que

$$A = \frac{R}{n-1} \cdot \quad \ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Comme on le voit sans peine, les deux distances focales principales sont liées entre elles par les deux relations :

$$F = nA \qquad \text{et} \qquad F = A + R \quad \ldots\ldots \quad [3]$$

(*) En effet, on a $r' = OCm' = C$, $i' = \alpha + C$; d'autre part, $i' = nr'$; donc $nC = \alpha + C$, et $\alpha = (n-1)C$. Comme $\alpha = \frac{Om'}{OA \text{ ou } A}$ et $C = \frac{Om'}{R}$, on a enfin : $A = \frac{R}{n-1}$.

II. *Construction des deux foyers principaux.* — Aux points O et C (fig. 2), menons à OC des perpendiculaires Om, Cm', sur lesquelles nous prenons $On = Cn' = 1$, et $Om = Cm' = n$ (indice de réfraction). Il suffit alors de tirer $m'n$ et mn' et de les prolonger jusqu'à leurs points de rencontre A et F avec l'axe, pour avoir les deux foyers demandés.

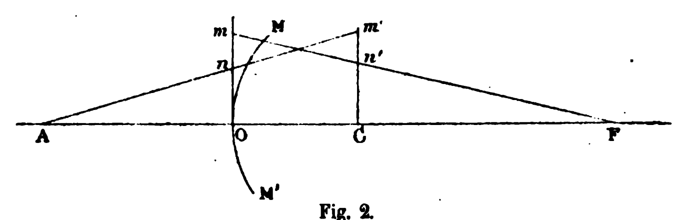


Fig. 2.

En effet, on a

$$Cm' \text{ ou } n : 1 = (A + R) : A, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{R}{n-1},$$

$$Om \text{ ou } n : 1 = F : (F - R), \quad \text{d'où} \quad F = \frac{nR}{n-1}.$$

Les constructions indiquées dans les §§ I et II s'appliquent également à des *axes secondaires* (droites passant par le centre C et peu inclinées sur l'axe principal); nous allons utiliser cette remarque.

III. *Foyer conjugué d'un point lumineux quelconque* a (fig. 3). —Par ce point a, menons un rayon incident quelconque am, mais ne s'écartant toutefois pas beaucoup du centre de courbure C; traçons l'axe secondaire AOC parallèle à am, et prenons, sur cet axe, les distances OA et OF respectivement égales à A et à F. Dès lors, le rayon am se réfracte suivant mF et le rayon aAn suivant na' parallèle à OCF; le point d'intersection a' des deux rayons réfractés est le foyer conjugué de a.

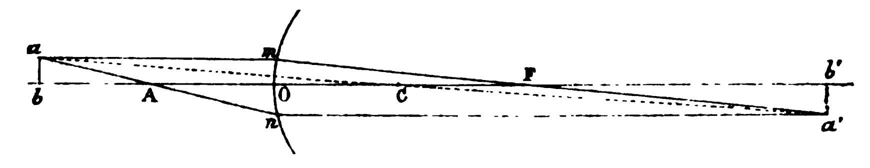


Fig. 3.

En effet, si nous traçons ab, $a'b'$ perpendiculairement à AOC, nous pourrons regarder Om, On comme étant sensiblement égaux à ab et $a'b'$; dès lors les triangles abA, OnA sont semblables, de même que $a'b'$F et mOF, et donnent, si l'on pose $bA = \varphi$, $b'F = \varphi'$:

$$\frac{On \text{ ou } a'b'}{ab} = \frac{A}{\varphi}; \quad \frac{a'b'}{Om \text{ ou } ab} = \frac{\varphi'}{F}; \quad \text{d'où} \quad \varphi\varphi' = AF.$$

On voit par là que tous les points de la droite ab supposés peu éloignés de l'axe ont pour conjugués des points situés sur une même droite $a'b'$; il s'ensuit que b et b' sont aussi deux points conjugués, et que $a'b'$ n'est autre chose que l'image de ab. On voit de plus qu'un objet placé en $a'b'$, aurait pour image ab.

Il est aisé de prouver que a, C, a' sont en ligne droite, c'est-à-dire que a' se trouve sur l'axe secondaire ac; en effet,

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{A}{\varphi} = \frac{\varphi'}{F} = \frac{A + \varphi'}{\varphi + F} = \frac{F - R + \varphi'}{\varphi + AC} = \frac{b'C}{bC};$$

donc l'angle $aCb = a'Cb'$.

Pour exprimer que l'image est renversée par rapport à l'objet, il suffit d'écrire que $a'b'$ est de signe contraire à ab; dès lors

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{A}{\varphi} = -\frac{\varphi'}{F}.$$

IV. *Cas général de trois milieux dont l'intermédiaire est séparé des autres par des surfaces sphériques.* — Soient MO_1M', MO_2M' (fig. 4) les deux portions de surfaces sphé-

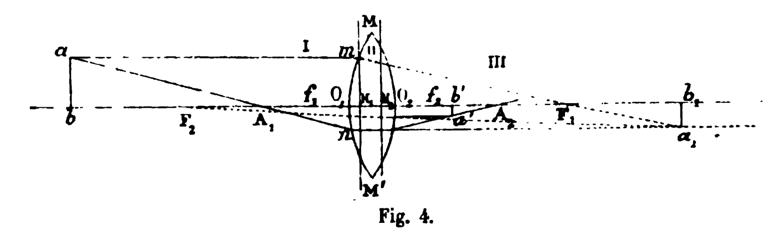


Fig. 4.

riques qui comprennent le milieu intermédiaire II et le séparent des milieux I, III; soient encore A_1, F_1 les deux foyers principaux

relativement aux milieux I, II, et A_2, F_2 les foyers principaux relativement aux milieux III et II; soit enfin ab une portion de droite perpendiculaire à l'axe principal; construisons l'image b_1a_1 de ab par rapport aux milieux I et II, puis l'image $b'a'$ de b_1a_1 relative aux milieux III et II; enfin, soient $\varphi = bA_1$, $\psi = F_1b_1$, $-\varphi' = b'A_2$, $\psi' = F_2b_1$; nous aurons, abstraction faite des signes

$$\frac{a_1b_1}{ab} = \frac{A_1}{\varphi} = \frac{\psi}{F_1}; \quad \frac{a'b'}{a_1b_1} = \frac{\varphi'}{A_2} = \frac{F_2}{\psi'}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a'b'}{ab} = \frac{A_1\varphi'}{A_2\varphi} = \frac{F_2\psi}{F_1\psi'}.$$

Convenons maintenant de regarder comme positives les distances qui, comptées à partir d'un foyer quelconque, s'éloignent de la lentille, et comme négatives les distances qui s'en rapprochent. D'après cela, nous écrivons :

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{A_1\varphi'}{A_2\varphi} = -\frac{F_2\psi}{F_1\psi'}.$$

Si actuellement nous voulons obtenir une relation entre φ et φ' seulement, il faut remplacer ψ par $\frac{A_1F_1}{\varphi}$, et ψ' par ψ + la distance F_1F_2, laquelle est égale à $F_1 + F_2 - d$, d étant l'épaisseur O_1O_2 de la lentille biconvexe; nous aurons, en posant $\lambda = F_1 + F_2 - d$:

$$\frac{A_1\varphi'}{A_2\varphi} = \frac{F_2\psi}{F_1\psi'} = \frac{F_2}{F_1}\cdot\frac{\dfrac{A_1F_1}{\varphi}}{\dfrac{A_1F_1}{\varphi} + \lambda} = \frac{A_1F_2}{A_1F_1 + \lambda\varphi},$$

d'où

$$A_2F_2\varphi = A_1F_1\varphi' + \lambda\varphi\varphi'.$$

Il est aisé de ramener cette relation à la forme $\varphi_1\varphi'_1 =$ constante ; il suffit de poser : $\varphi = \varphi'_1 + x$, et $-\varphi' = \varphi'_1 + y$; nous avons ainsi pour transformée :

$$\lambda\varphi_1\varphi'_1 + \begin{array}{c} A_2F_2 \\ +\lambda y \end{array} \Bigg| \varphi_1 + \begin{array}{c} A_1F_1 \\ +\lambda x \end{array} \Bigg| \varphi'_1 + A_1F_1y + A_2F_2x + \lambda xy = 0,$$

qui, moyennant les conditions

$$\lambda x + A_1F_1 = 0, \qquad \lambda y + A_2F_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x = -\frac{A_1F_1}{\lambda}, \qquad y = -\frac{A_2F_2}{\lambda},$$

se réduit à :

$$\varphi_1\varphi'_1 = \frac{A_1A_2F_1F_2}{\lambda^2}.$$

Cette formule bien simple montre que φ_1 et φ'_1 sont toujours de même signe; les distances φ_1 et φ'_1 sont comptées actuellement à partir de deux points f_1, f_2 placés l'un à une distance $x = \frac{A_1F_1}{\lambda}$ à droite de A_1, l'autre à la distance $y = \frac{A_2F_2}{\lambda}$ à gauche de A_2.

Ces deux points f_1, f_2 sont les *foyers principaux* de la lentille donnée.

V. *Grandeur de l'image.* — Nous avons trouvé au § IV la valeur

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{A_1\varphi'}{A_2\varphi};$$

remplaçons-y également

$$\varphi \text{ par } \varphi_1 - \frac{A_1F_1}{\lambda}, \text{ et } -\varphi' \text{ par } \varphi'_1 - \frac{A_2F_2}{\lambda},$$

nous aurons :

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\left[\varphi'_1 - \frac{A_2F_2}{\lambda}\right]}{\left[\varphi_1 - \frac{A_1F_1}{\lambda}\right]} = \frac{A_1(\lambda\varphi'_1 - A_2F_2)}{A_2(\lambda\varphi_1 - A_1F_1)} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\frac{A_1A_2F_1F_2}{\lambda\varphi_1} - A_2F_2}{\lambda\varphi_1 - A_1F_1}$$

$$= \frac{A_1F_2}{\lambda\varphi_1}\cdot\frac{A_1F_1 - \lambda\varphi_1}{\lambda\varphi_1 - A_1F_1} = -\frac{A_1F_2}{\lambda\varphi_1}.$$

Posons

$$f_1 = \frac{A_1F_2}{\lambda} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{A_2F_1}{\lambda};$$

dès lors, nous aurons

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{f_1}{\varphi_1}$$

et par conséquent aussi

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{\varphi_1'}{f_2},$$

d'où enfin, absolument comme pour les lentilles minces,

$$\varphi_1\varphi_1' = f_1 f_2 .$$

On voit par les formules précédentes que, d'une manière tout à fait générale, c'est-à-dire pour une lentille épaisse ou très mince, comprise entre deux milieux différents ou bien enveloppée d'un milieu unique, on a toujours des relations de la forme :

$$\varphi_1\varphi_1' = f_1 f_2, \qquad \frac{a'b'}{ab} = -\frac{f_1}{\varphi_1} = -\frac{\varphi_1'}{f_2}.$$

La formule $\frac{a'b'}{ab} = -\frac{f_1}{\varphi_1}$ fait connaître non seulement le rapport des grandeurs absolues de l'image et de l'objet, mais encore leur situation relative : ainsi, quand φ_1 est positif, c'est-à-dire quand l'objet est au delà d'un foyer par rapport à la lentille, la valeur négative $\frac{f_1}{\varphi_1}$ indique que l'image est *renversée* et plus petite que l'objet; au contraire, si φ_1 est négatif, ce qui a lieu quand l'objet est situé entre un foyer et la lentille, le rapport $-\frac{f_1}{\varphi_1}$ devient positif, et l'image est *droite* et plus grande que l'objet. Ces déductions sont pleinement d'accord avec l'expérience.

Les distances focales f_1, f_2 ont entre elles un rapport très simple; en effet, on a :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{A_1F_2}{A_2F_1};$$

mais $F_2 = n_2A_2$ et $F_1 = n_1A_1$, si n_1, n_2 désignent les indices de réfraction du milieu II respectivement par rapport aux milieux I et III; donc

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

c'est-à-dire que les distances focales sont inversement proportionnelles aux indices de réfraction n_1, n_2. Si la lentille est plongée

dans un seul milieu, l'air, par exemple, on a $n_1 = n_2$ et par conséquent

$$f_1 = f_2 = \frac{n_1 A_1 A_2}{\lambda}.$$

VI. *Points et plans principaux.* — Cherchons maintenant deux points, tels que si l'on y mène deux plans perpendiculaires à l'axe, tout objet situé dans l'un des plans ait une image droite et de même grandeur dans l'autre.

Puisque l'image doit avoir même grandeur absolue que l'objet, on doit avoir

$$-\frac{f_1}{\varphi_1} = -\frac{A_1 F_2}{\lambda \varphi_1} = 1\,;$$

donc

$$\varphi_1 = -\frac{A_1 F_2}{\lambda}.$$

et par conséquent

$$\varphi_1' = -\frac{A_2 F_1}{\lambda}\,;$$

donc les deux points principaux se trouvent l'un à droite de f_1, l'autre à gauche de f_2, et coïncident précisément avec les points H_1, H_2, d'où se comptent les distances focales

$$f_1 = \frac{A_1 F_2}{\lambda} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{A_2 F_1}{\lambda}.$$

Quant aux plans principaux, ce sont les deux plans perpendiculaires à l'axe principal et passant par H_1 et H_2; ces deux plans peuvent tenir lieu de la lentille elle-même, pourvu qu'on y joigne les deux distances focales

$$H_1 f_1 = f_1 \quad \text{et} \quad H_2 f_2 = f_2.$$

En ce qui concerne la distance $H_1 H_2 = h$, ou, comme on l'appelle, l'interstice des deux plans principaux, on a évidemment

$$h = A_1 + A_2 + d - \frac{(A_1 + A_2)(F_1 + F_2)}{\lambda} = d - \frac{d}{\lambda}(A_1 + A_2)$$

D'après ce qui précède, rien de plus simple que la construction de l'image $a'b'$ d'un objet ab (fig. 5) placé devant une lentille

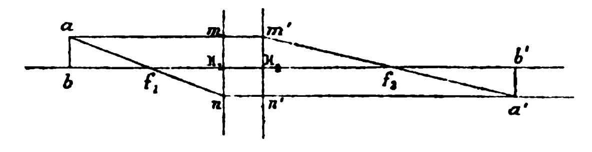


Fig. 5.

épaisse représentée par ses deux plans principaux mH_1n, $m'H_2n'$ et par ses foyers f_1 et f_2; les triangles abf_1, f_1H_1n, d'une part, et $a'b'f_2$, $m'H_2f_2$, de l'autre, donnent immédiatement, abstraction faite des signes :

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{f_1}{\varphi_1} = \frac{\varphi'_1}{f_2}.$$

En appliquant la même construction à un point placé dans un plan principal, on trouve pour image un point placé dans l'autre plan principal, du même côté de l'axe et à même distance de celui-ci.

VII. *Points nodaux.* — Ce sont deux points conjugués formant un système unique, tel que si un rayon incident passe par l'un, le rayon réfracté correspondant passe par l'autre et soit parallèle au premier rayon.

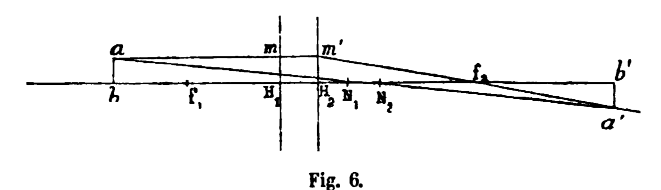


Fig. 6.

Soient f_1, f_2 (fig. 6) les foyers principaux de la lentille, ab un objet lumineux, $a'b'$ son image; soient N_1, N_2 deux points conjugués et tels que $a'N_2$ soit parallèle à aN_1; dès lors les triangles abN_1, $a'b'N_2$ sont semblables et donnent

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{b'f_2 + f_2N_2}{bf_1 + f_1N_1}$$

on a, d'autre part, d'après les formules générales du § V :

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{f_1}{\varphi_1},$$

conséquemment

$$\frac{\varphi'_1 + N_2}{\varphi_1 + N_1} = -\frac{f_1}{\varphi_1}.$$

Mais on a, par hypothèse, $N_1N_2 = f_1f_2$ et, par construction, $\varphi_1\varphi'_1 = f_1f_2$; donc

$$\frac{f_1f_2\left\{\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{N_1}\right\}}{\varphi_1 + N_1} = \frac{f_1f_2}{\varphi_1 N_1} = -\frac{f_1}{\varphi_1},$$

c'est-à-dire $N_1 = -f_2$ et par conséquent $N_2 = -f_1$.

Pour avoir les deux points nodaux de la lentille, il suffit donc de prendre $f_1N_1 = f_2$ ou H_2f_2 à droite de f_1 et $f_2N_2 = f_1H_1$ ou f_1 à gauche de f_2. Si $f_1 = f_2$, les points nodaux coïncident avec les points principaux.

VIII. *Plans focaux :* plans passant par les foyers principaux et perpendiculaires à l'axe principal.

Un point quelconque a (fig. 7) situé dans un plan focal, envoie des rayons lumineux qui, après leur réfraction à travers la lentille, sont tous parallèles au rayon aN_1 passant par le premier point nodal; ainsi un rayon am devient parallèle à H_1H_2, puis se réfracte suivant nr parallèle à aN_1.

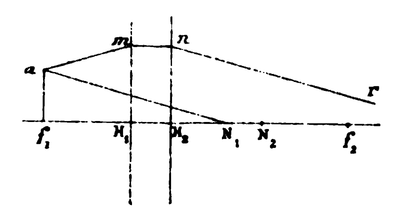


Fig. 7.

De là un moyen très simple pour trouver le rayon réfracté correspondant à un rayon incident quelconque. En effet, soit *amn* (fig. 8) le rayon incident qui dévie suivant *nn'* parallèle à l'axe principal, attendu que *n'* est l'image de *n* ; du point *m* où *an* coupe la perpendiculaire mf_1 à l'axe, menée par le foyer voisin f_1, on tire mN_1 au premier point nodal; dès lors *n'm'a'* parallèle à mN_1 est le rayon réfracté demandé.

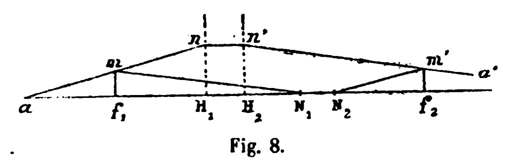


Fig. 8.

Réciproquement, si *m'* est le point d'intersection du rayon incident *a'm'n'* avec le second plan focal, il suffit de joindre $m'N_2$, puis de mener *n'n* parallèle à l'axe et *na* parallèle à $m'N_2$ pour avoir le rayon réfracté correspondant.

IX. *Plans de Bravais.* — Ce sont deux plans passant normalement à l'axe par deux points dont chacun est à lui-même son foyer conjugué.

Pour établir l'existence de l'un de ces points, il suffit de supposer un point lumineux marchant de l'un des foyers vers le plan principal voisin; dès lors, la valeur absolue de $\frac{f}{\varphi}$, d'abord très grande, va constamment en diminuant jusqu'à devenir égale à l'unité quand l'objet se trouve dans le plan principal; donc le foyer virtuel se rapproche de plus en plus du second plan principal, où il arrive quand le point lumineux est dans le premier plan principal; cela montre qu'à un certain moment le foyer a coïncidé avec le point lumineux lui-même. Pour déterminer la position du point lumineux à ce moment, il suffit évidemment de combiner les deux équations suivantes :

$$\varphi + \varphi' = f_1 + f_2 + h \qquad \text{et} \qquad \varphi\varphi' = f_1 f_2.$$

On tire de là :

$$\varphi = \frac{f_1 + f_2 + h \pm \sqrt{(f_1 + f_2 + h)^2 - 4f_1 f_2}}{2}.$$

On reconnait ainsi qu'il y a deux points de Bravais (fig. 9), l'un situé à la distance

$$f_1 B_2 = \frac{f_1 + f_2 + h + \sqrt{(f_1 + f_2 + h)^2 - 4 f_1 f_2}}{2},$$

l'autre à la distance

$$f_1 B_1 = \frac{f_1 + f_2 + h - \sqrt{(f_1 + f_2 + h)^2 - 4 f_1 f_2}}{2};$$

la somme des deux distances est évidemment égale à la distance des deux foyers f_1, f_2.

Tout objet, tel que aB_1 placé dans l'un des plans de Bravais BB_1, a donc son image virtuelle et droite $a'B_1$ dans le même plan.

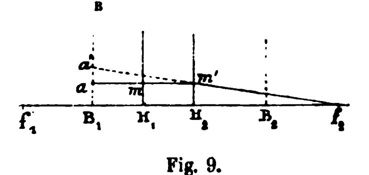


Fig. 9.

X. Dans tout ce qui précède, nous n'avons envisagé que des lentilles bi-convexes; les formules que nous avons obtenues se modifient aisément pour les cas des lentilles plan-convexes ou concaves-convexes; pour les lentilles plan-convexes, il suffit d'écrire $R_2 = \infty$; il faut donc supposer A_2 et F_2 égaux à l'infini; dès lors la formule fondamentale devient

$$\varphi_1 \varphi_1' = \frac{A_1 A_2 F_1 F_2}{(F_1 + F_2 - d)^2} = \frac{n_1}{n_2} A_1^2.$$

Comme l'une des distances focales est A_1, l'un des plans principaux passe par l'intersection de l'axe et de la partie convexe de la lentille; l'autre se trouve à la distance

$$h = d - \frac{d(A_1 + A_2)}{F_1 + F_2 - d} = d - \frac{d}{n_2} = d\,\frac{n_2 - 1}{n_2}.$$

Si $n_2 = \frac{3}{2}$, comme dans le cas du verre et de l'air, on a $h = \frac{1}{3} d$.

Dans le cas où la lentille est concave-convexe, R_2, par exemple, est négatif; dès lors A_1 et A_2 se trouvent du même côté de la lentille; posons, par exemple $R_1 = 12$, $R_2 = -15$ et l'épaisseur $d = 5$; on trouve ainsi pour $n_1 = n_2 = \frac{2}{3}$ (fig. 10) :

$$A_1 = 24, \quad A_2 = -30; \quad F_1 = 36, \quad F_2 = -45,$$
$$\lambda = 36 - 45 - 5 = -14.$$

D'après cela, il faut porter une distance $-\frac{A_1F_1}{\lambda} = 61.7$ à gauche de A_1, c'est-à-dire prendre $A_1f_1 = 61.7$ et une distance $-\frac{A_2F_2}{\lambda}$ à droite de A_2, c'est-à-dire prendre $A_2f_2 = 96.43$: f_1 et f_2 sont alors les deux foyers principaux; quant au premier plan principal H_1, il se trouve à une distance de f_1 égale à $\frac{A_1F_2}{\lambda} = 77.1$, le second plan principal H_2, il est à la même distance $H_2f_2 = 77.1$ du foyer f_2.

Un cas très intéressant, et qui montre qu'une lentille n'est pas toujours convergente quand elle est le plus mince au bord, est celui où $R_1 = 15$, $R_2 = -12$, $d = 5$ (fig. 11); on a dès lors $-\frac{A_1F_1}{\lambda} = -337.5$; donc le foyer principal f_1 est fort loin à droite de A_1 et tombe bien loin de l'autre côté de la lentille. On a ensuite $A_2 = -24$, $F_2 = -36$, $-\frac{A'_1F_2}{\lambda} = -216$; le foyer f_2 est donc du même côté que A_1 et fort loin; ce qui montre que la lentille est divergente, mais à très long foyer; les points principaux H_1, H_2 se trouvent du côté concave de la lentille, le point principal H_1 étant d'ailleurs plus éloigné que H_2.

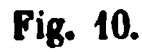


Fig. 10.

Le cas des lentilles divergentes n'offre aucune difficulté; il suffit d'y regarder comme négatives les valeurs à A_1, A_2, F_1, F_2 qui correspondent à des valeurs négatives de R_1 ou de R_2 : quant aux distances positives de φ ou de φ', ce sont toujours celles qui s'éloignent de la lentille considérée.

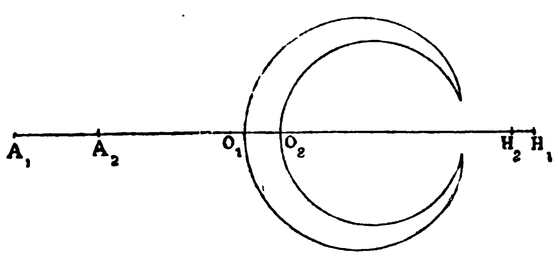


Fig. 11.

XI. *Distance focale d'un système de lentilles.* — Soit un système de deux lentilles convergentes données par leurs plans principaux $H_1H'_1$, $H_2H'_2$ et par leurs foyers principaux F_1, F'_1, F_2 et F'_2; soient d la distance H'_1H_2 et f, f', les deux distances focales des deux lentilles; soit toujours un objet ab tel que $bF_1 = \varphi$ (fig. 12), $b_1F'_1 = \psi$, $b'F'_2 = -\varphi'$ et $b'F_2 = -\psi'$; on aura, comme il est aisé de voir :

$$\frac{a_1b_1}{ab} = -\frac{f}{\varphi} = -\frac{\psi}{f}, \quad \frac{a'b'}{a_1b_1} = \frac{\varphi'}{f'} = \frac{f}{\psi'}.$$

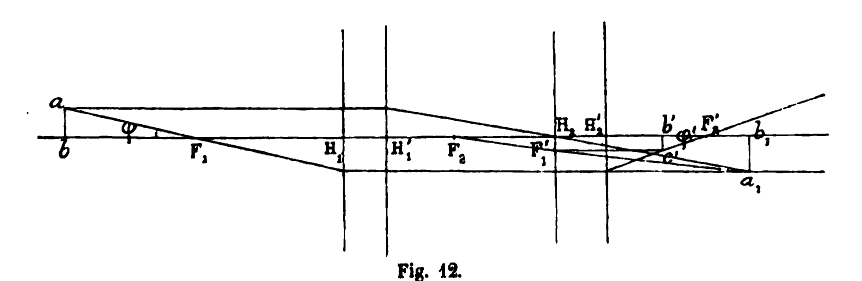


Fig. 12.

Si nous tenons compte des relations

$$\psi = \frac{f^2}{\varphi}, \quad \psi' = \psi + f + f' - d = \psi' + \lambda,$$

nous arrivons à l'équation :

$$f^2\varphi' + \lambda\varphi\varphi' = f'^2\varphi.$$

Posant enfin $-\varphi' = \varphi'_1 + y$, $\varphi = \varphi_1 + x$, et déterminant x et y de manière que les coefficients de φ_1 et de φ'_1 s'annulent, nous obtenons

$$\varphi_1\varphi'_1 = \left(\frac{ff'}{\lambda}\right)^2.$$

Nous voyons ainsi que le système des deux lentilles convergentes placées à la distance d peut être remplacé par une lentille convergente unique de distance focale

$$\frac{ff'}{f + f' - d}.$$

Il est aisé d'appliquer cette théorie aux doublets de Ramsden, de Wollaston et de Huygens.

Corollaire. I. — Si $f + f' - d = 0$, la construction montre que le rapport absolu $\frac{a'b'}{ab}$ est invariable et égal à $\frac{f'}{f}$; cette remarque peut être utilisée pour trouver le grossissement de la lunette astronomique et de la lunette terrestre.

Corollaire II. — Si l'une des lentilles est divergente, il suffit de changer le signe de la distance focale f' correspondante, et dès lors la distance focale du système devient

$$\frac{-ff'}{f - f' - d} = \frac{ff'}{f' + d - f}.$$

NOTE
SUR LES ROCHES ÉRUPTIVES
DE
L'ILE DE JERSEY

PAR

M. Alb. de LAPPARENT

Professeur à l'Institut catholique de Paris.

Les traits principaux de la géologie de l'île de Jersey sont aujourd'hui bien connus, d'abord par les travaux anciens de Transon et d'Ansted, mais surtout depuis la description, accompagnée d'une très bonne carte au 100 000ᵉ, que le R. P. Ch. Noury en a donnée en 1886 (*).

On sait que l'île de Jersey est constituée par un noyau de schistes et de fines arkoses feldspathiques, communément rapportés à l'étage des schistes de Granville, et que traversent des roches éruptives très variées, les unes granitoïdes, les autres porphyriques. Déjà, dans une note présentée en 1890 à l'Académie des sciences de Paris, nous avons rectifié l'erreur que nous avions commise, quelques années auparavant, quand nous avions cru devoir attribuer à l'époque permienne les éruptions porphyriques de l'île, alors qu'elles sont antérieures à la formation du pou-

---

(*) *Géologie de Jersey.* Paris, Savy, et Jersey, Le Feuvre.

dingue de Rozel, qu'on s'accorde maintenant à reconnaître comme contemporain des poudingues pourprés de Normandie. Dans une note ultérieure, publiée en 1891, nous avons décrit sommairement la succession chronologique des roches éruptives, nous réservant de revenir, avec plus de détails, sur les caractères de ces roches ainsi que sur leurs relations mutuelles. C'est ce travail complémentaire que nous présentons aujourd'hui à la Société scientifique.

Nous rappellerons brièvement les conditions dans lesquelles notre étude a été entreprise et poursuivie. Jusqu'en juillet 1890, nous ne connaissions l'île de Jersey que par les envois d'échantillons qu'avait bien voulu nous faire le R. P. Noury. A cette date, mis en éveil par des communications de MM. Bigot et Hill, qui ne nous permettaient pas de continuer à regarder comme du *new red sandstone* le conglomérat de la pointe nord-est de l'île, nous fîmes le voyage de Jersey, où une exploration de quelques jours, exécutée sous la conduite du R. P. Noury, suffit à nous édifier sur l'ancienneté des éruptions porphyriques et, *a fortiori*, sur celle des venues granitiques antérieures. Rentré en France avec une collection d'échantillons qui paraissait suffisante pour représenter toutes les variétés de roches, nous en fîmes tailler des plaques minces en vue de l'examen microscopique. Mais, au cours de ce travail, la diversité des types se montra beaucoup plus grande que nous ne l'avions d'abord imaginé. A chaque instant les points d'interrogation surgissaient, et des difficultés nous apparaissaient, dont chacune eût exigé une nouvelle visite des lieux. Nous résolûmes alors d'utiliser la bonne volonté de notre savant ami, en réclamant de lui une exploration méthodique de toutes les falaises, dont il connait si bien les moindres recoins, et de tous les endroits de l'île où le sous-sol se montre à découvert. Chaque fois, le R. P. Noury nous adressait une série d'esquilles numérotées, avec un croquis à grande échelle, où la place de chaque prise d'essai était exactement marquée. Les esquilles étaient l'objet d'un examen attentif, soit macroscopique, soit, quand cela semblait nécessaire, sur plaques minces.

Le travail une fois achevé, nous jugeâmes nécessaire de soumettre au contrôle d'une revision directe les résultats qui nous avaient paru ressortir de l'étude de ce grand nombre d'échantillons. Ce fut l'objet d'un second voyage à Jersey, exécuté en juillet 1891, et au cours duquel de nouveaux éléments furent recueillis, qui bientôt portèrent à près de *deux cents* le nombre de nos plaques minces. Tout le temps dont nous pouvions disposer en 1892 fut consacré à l'étude de ces plaques, poursuivie avec la précieuse assistance de MM. Michel Lévy et Lacroix. Aussi nous croyons-nous en droit d'affirmer que nos conclusions reposent sur un ensemble de données tel, qu'il serait, à l'heure présente, malaisé d'en réunir un plus complet. Non, certes, que toutes les difficultés nous paraissent résolues; mais la solution de ce qui peut demeurer douteux dépend de l'ouverture éventuelle de tranchées qui mettraient en évidence des contacts non encore observés. Le soin extrême avec lequel notre dévoué collaborateur s'est constamment tenu au courant des moindres travaux exécutés dans l'île, les nombreuses et intrépides visites qu'il a faites à ces falaises dont chacun connaît le difficile accès, nous donnent l'espoir que les conclusions du présent travail ne sauraient être modifiées que sur des points secondaires.

L'intérêt de la série éruptive de Jersey est double : il résulte d'abord de la très grande variété de texture et de composition des roches observées; ensuite de l'extrême localisation dans le temps des éruptions, qui toutes ont dû se produire entre la fin de l'époque *précambrienne* et le commencement du dépôt des poudingues *cambriens* (*). En effet, les plus anciennes des roches cristallines de l'île ont été nettement injectées à travers des schistes et arkoses quartzeuses ou feldspathiques à grain fin, sans fossiles, mais tellement semblables aux schistes de Granville (Manche), qu'aucun géologue n'a jusqu'ici hésité à les rapporter

(*) On trouvera dans la troisième édition de notre *Traité de Géologie*, actuellement en cours de publication, la définition des limites respectives de ces deux divisions des temps géologiques.

à la même formation, c'est-à-dire au sommet de la série précambrienne des phyllades du Cotentin (*phyllades de Saint-Lô*). D'autre part, entre Boulay-Bay et Sainte-Catherine, on voit reposer, sur les derniers épanchements porphyriques, un poudingue qui contient des fragments des diverses roches éruptives de l'île. Or, l'allure et la composition de ce poudingue établissent, selon MM. Bigot et Hill, son identité avec le poudingue d'Aurigny et celui d'Omonville en Cotentin, lesquels ne sauraient être distingués du poudingue pourpré de Normandie, base du système silurien, et équivalent probable des couches cambriennes à faune primordiale de l'Angleterre et du pays de Galles. Ainsi la série des éruptions s'est déroulée dans un laps de temps relativement très court, et sans doute à la faveur de mouvements orogéniques qui, en modifiant puissamment le relief de la contrée, ont déterminé les érosions d'où est issu le poudingue de Rozel. La brièveté de cet intervalle donne un intérêt particulier à la succession des roches, et l'on peut dire qu'il est rare de trouver une occasion aussi favorable d'analyser, sur un espace restreint, soit les modifications que peut subir la composition d'un foyer d'éruptions, soit l'influence que les roches encaissantes ou les circonstances de la sortie sont susceptibles d'exercer sur l'état définitif des produits.

Les roches éruptives de l'île de Jersey se divisent en deux grandes séries : une série *granitoïde*, qui comprend à la fois des types acides et des types basiques ; et une série *porphyroïde*, nettement postérieure à la première, où les roches acides et les roches neutres sont surtout représentées.

Épidiorites. — La plus importante parmi les variétés granitoïdes est le granite bien connu de Jersey, qui, dans toute la partie occidentale de l'île, traverse nettement les schistes. Mais dans le sud-est, ainsi qu'à Rosnez, le même granite se montre en filons au sein d'un massif de roches foncées dioritiques, qui lui sont évidemment antérieures. Et sur un point de la côte septentrionale, à Belle-Hougue, on peut constater que ces roches dioritiques traversent un affleurement schisteux. Elles doivent

donc être considérées comme les premières en date parmi les venues précambriennes, et c'est pourquoi nous commencerons par la description de cette famille.

Le type des roches dioritiques doit être pris dans le massif qui comprend le rocher de l'Ermitage d'Elizabeth Castle, la grève de la Pointe-des-Pas et d'Azette, le tertre de Look-Out et de Saint-Clément, enfin une bonne partie de la grève en avant de la tour Seymour. On retrouve les mêmes roches dans le nord, d'abord à Belle-Hougue, ensuite au promontoire de Rosnez.

La composition minéralogique est loin d'être constante. Ce qui domine en quantité est une *Épidiorite*, c'est-à-dire une diabase dont le pyroxène est devenu, par ouralitisation, un agrégat de fibres d'amphibole. Le type de cette roche, à l'Ermitage et à la Pointe-des-Pas, comporte un feldspath vert clair, en petits cristaux, dans un enchevêtrement de lamelles et de fibres d'un vert foncé. Le grain est celui d'une diabase normale, et la couleur n'en diffère que par un plus grand développement de l'élément blanc. Au microscope (voir la planche, fig. 1), on distingue les cristaux de pyroxène ouralitisé, avec magnétite et fer titané. L'allongement habituel du feldspath oligoclase indique une tendance vers la texture ophitique. La roche est assez sensiblement magnétique.

Suivant l'abondance du feldspath, l'épidiorite est de teinte plus ou moins claire. Aux environs de Saint-Clément, on la voit passer, par l'augmentation de son grain, à une très belle variété, où l'amphibole, en gros cristaux ayant jusqu'à 1 centimètre, contraste par sa teinte avec la couleur très claire du feldspath blanc, légèrement verdâtre quand il est frais, et rosé après altération. On croirait voir une syénite. Mais le microscope dévoile de l'oligoclase en fines lamelles hémitropes, formant des parties intactes, noyées au sein d'une masse feldspathique très décomposée et piquetée de séricite. L'amphibole est riche en sphène, l'épidote abonde, et il y a, par places, du quartz pegmatoïde. L'orthose est bien reconnaissable et, de cette façon, la roche pourrait être qualifiée, tantôt de *diorite quartzifère,* tantôt de *granite à amphibole* pauvre en quartz.

Au pied de Belle-Hougue, on retrouve le type de l'Ermitage et de la Pointe-des-Pas, avec un peu de mica, de sphène, de pyrite, et d'assez grosses inclusions d'apatite. Mais, à Rosnez, c'est plutôt une *diabase ophitique à labrador*, avec un mélange de pyroxène ouralitisé et de hornblende brune, qui paraît primaire. Seulement, dans la même localité, il y a des parties qui tournent au *gabbro*.

En définitive, l'Épidiorite de Jersey est une roche très polymorphe, mais qui garde la texture granitoïde, et où la composition, quoique assez franchement basique, tend, par le développement du quartz et la présence fréquente de l'orthose, à s'élever d'un degré au point de vue de l'acidité.

Granite. — Le granite forme à Jersey deux larges traînées : l'une, au sud, embrassant la baie de Saint-Brelade avec les rochers de Corbière; l'autre, au nord, entre l'Étacq et Plémont. C'est dans la bande schisteuse comprise entre ces deux massifs granitiques que les vagues ont creusé la baie de Saint-Ouen. A ces affleurements il faut ajouter une bande qui traverse la grève de Saint-Clément, entre La Motte et la tour Seymour.

Le trait caractéristique du granite de Jersey, tel qu'on peut l'observer dans les grandes carrières de La Moye, est le large développement et le vif éclat des cristaux rougeâtres d'orthose, atteignant facilement 15 millimètres de largeur sur 30 de longueur, d'où résulte pour la roche un aspect porphyroïde. Ces cristaux sont remarquables par la facilité de leurs clivages (ce qui nuit à la cohésion de la roche), ainsi que par les nombreuses fissures et facules dont ils sont parsemés, ce qui en fait une sorte de microperthite. La structure de l'orthose est très souvent zonée. L'oligoclase, parfois bien visible à l'œil nu, grâce à ses stries, se distingue par sa blancheur de l'orthose, auquel il est d'ailleurs intimement soudé. Le mica noir se présente en petites paillettes, qui jouent un rôle absolument subordonné. Dans l'ensemble, on compte à peu près deux tiers de feldspath et un tiers de quartz. L'amphibole, fibreuse et d'un vert noirâtre, est toujours visible, mais à l'état sporadique. La roche est donc tout

au plus un *granite à amphibole*, et ne mérite nullement la qualification souvent employée de syénite.

Le quartz est en grandes parties irrégulières, brillant, et rarement granulitique d'aspect.

Au microscope (fig. 2), on distingue à merveille les facules de l'orthose (où M. Michel Lévy reconnait des veinules d'albite) ainsi que les fines lamelles de l'oligoclase. Le mica est verdi, devenu fibreux et en partie chloritisé. L'amphibole, maclée suivant la face h^1, offre un polychroïsme marqué, entre le vert foncé et le vert clair. La macle de Carlsbad est habituelle dans l'orthose. Certaines variétés paraissent abonder en anorthose, et il en est où l'on aperçoit un peu de zircon.

Le granite de l'Étacq est très analogue à celui de la Moye, don il diffère surtout par un grain un peu plus fin et une teinte générale plus claire. La roche renferme de l'amphibole sporadique et abonde en veines où l'épidote, d'un vert clair jaunâtre, se détache agréablement sur un fond rougeâtre d'orthose. Au microscope, on distingue (fig. 3) de grands débris de plagioclase et d'orthose ancien, ainsi qu'un orthose à facules plus récent, injecté de silice et passant à l'anorthose à raison de son aspect quadrillé. Le mica noir, peu abondant et partiellement chloritisé, renferme de nombreuses aiguilles d'apatite, ainsi que du rutile en paquets aciculaires. On aperçoit aussi du zircon.

Le contact du granite et de l'arkose schisteuse est remarquablement net dans les carrières de l'Étacq. On y peut suivre, sur une grande longueur, la ligne ondulée et capricieuse qui limite les deux roches, le granite ayant corrodé la roche encaissante en même temps qu'il la durcissait. Ce n'est pas là qu'on pourrait parler d'un contact par faille, et il est de toute évidence qu'il y a eu injection d'un magma fluide. L'arkose, qui dans ce point peut être qualifiée de quartzite à grain fin, a vu tout son quartz remis en mouvement. Il s'y est développé de petits cristaux d'orthose, de plagioclase, et un mica noir faisant du quartzite une sorte de leptynolite compacte. De son côté, le quartz du granite est devenu pegmatoïde, une nouvelle poussée siliceuse ayant corrodé les cristaux anciens, qui se montrent remarquablement craquelés.

Mais ce qui est surtout intéressant, c'est la texture et la composition des filons minces, de quelques centimètres, qu'on voit se détacher de la masse granitique et se poursuivre dans le schiste précambrien de la petite anse du Pulec. Ces filons laissent seulement voir des noyaux de quartz, se détachant sur une pâte d'un gris clair, qui semble vernissée. Au microscope, le tout se résout en une *micropegmatite* extraordinairement belle. On doit donc admettre qu'au moment de l'éruption, la masse granitique était déjà assez consolidée pour que, dans les fissures minces, il ne pût pénétrer que le résidu final d'orthose et de silice qui, dans tous les granites, s'est consolidé après tous les autres éléments. La cristallisation rapide de cette liqueur mère a déterminé la prise simultanée du quartz et du feldspath, s'orientant l'un dans l'autre, comme cela se fait dans les pegmatites, à la faveur du départ immédiat des dissolvants.

A côté du type de la Moye, de l'Étacq et de la Saline, à larges lamelles de feldspath miroitant, on observe en divers points de l'île, par exemple à Plémont et à Lecq, d'autres variétés granitiques à grain beaucoup plus fin, qui prennent, à l'œil nu, un aspect tout à fait semblable à celui du granite de Vire et des îles Chausey. A Lecq, le quartz (fig. 4) est en éléments sensiblement plus petits, et le plagioclase domine relativement à l'orthose. On remarque la même rareté du mica, et la même dissémination de l'amphibole, que dans le granite de la Moye. Du reste, ces variétés passent insensiblement au granite normal de l'île, et le type de Plémont établit très nettement la transition entre celui de Lecq et la roche de l'Étacq. Dans tous ces granites indistinctement, on retrouve les mêmes intercalations de schiste métamorphique, en fragments anguleux. Nous croyons donc que les différences sont dues aux conditions locales d'un même magma, et qu'il n'y a pas lieu d'admettre plusieurs injections de granites d'âges différents. Fréquemment d'ailleurs, dans le granite de la Moye, on observe des parties noirâtres à grain plus fin, beaucoup plus riches en mica noir, et que leur composition, comme l'irrégularité de leurs formes aux contours mal définis, conduisent à considérer comme dues à des phénomènes de ségrégation.

Syénite. — C'est aussi comme une dépendance étroite du granite que nous envisageons la *syénite* de Rouge Road et de Longueville près de Saint-Hélier. Bien que sa liaison directe avec les massifs de l'ouest ne puisse être démontrée, cette roche, comme l'a bien remarqué le R. P. Noury (*), ressemble beaucoup, par ses larges cristaux de feldspath fendillé, au granite porphyroide de la Moye et de la Saline. Comme lui, elle est traversée par des filons de granulite rose, et l'on y voit, à côté d'un orthose qui paraît avoir eu deux générations successives, de l'oligoclase net et abondant. La syénite se trouve d'ailleurs sur le prolongement de la bande granitique de la Moye, et l'irrégularité avec laquelle le quartz s'y présente, pouvant tantôt faire défaut, tantôt se montrer abondant, autorise la pensée que cette syénite n'est qu'un *granite à amphibole,* localement appauvri en quartz.

A côté de la variété rougeâtre normale, il en est, dans la même carrière, dont le feldspath est d'un gris foncé. Le plagioclase se voit quelquefois à l'œil nu. La roche exerce sur l'aiguillle aimantée une action plus sensible que le granite.

Granulite, pegmatite, microgranulite. — Les deux bandes granitiques de Jersey sont lardées, si l'on peut s'exprimer ainsi, de filons granulitiques, que leur teinte rouge-chair fait, en général, très bien ressortir sur le fond grisâtre des granites. La puissance de ces filons varie depuis 1 ou 2 centimètres jusqu'à un grand nombre de mètres, et l'on peut dire que, la plupart du temps, le grain de la roche est proportionnel à l'épaisseur de la veine.

Ainsi tous les filons minces sont constitués par une *granulite* à cassure saccharoïde, presque uniquement formée de feldspath rougeâtre et de petits grains de quartz, tout juste visibles à l'œil nu. Ce sont donc, à vrai dire, des *microgranulites* (**). Au

---

(*) *Géolog e de Jersey*, p. 21.

(**) Cette dénomination est employée par notre éminent ami, M. Michel Lévy, pour désigner les porphyres quartzifères dont la pâte se résout au microscope en granulite. Il nous parait préférable d'appliquer à ces roches le nom de *granophyres* (ou *granulophyres*), réservant la qualification de microgranulite pour celles qui n'ont eu qu'un seul temps de consolidation.

contraire, dans les gros filons qui traversent l'épidiorite de Rosnez et de Sorel, le grain est très sensible, et un peu de mica noir s'associe aux autres éléments.

Le quartz de ces roches est en grains bien distincts. L'orthose et l'oligoclase sont très reconnaissables, malgré le fréquent état de décomposition du feldspath. Le mica noir est chloritisé, et il ne parait pas y avoir d'amphibole.

Une variété très intéressante, qui remplit une veinule d'un centimètre dans le granite aux environs de Saint-Brelade, présente, juste au contact de la roche encaissante, une salbande bien nette de *micropegmatite*. Du reste, dans les filons semblables, le quartz offre souvent des contours hexagonaux.

A l'est de la bande granitique du nord se présente, sans qu'on en puisse définir les contacts, le massif de *pegmatite* du Mont Mado. Il ne paraît pas douteux que ce soit un mode d'injection en grande masse de la matière qui, dans les filons minces, a donné la granulite précédemment décrite. Mais les circonstances de l'épanchement ont permis la cristallisation simultanée des deux principaux éléments, et il en est résulté une véritable pegmatite, parfois même une pegmatite *graphique*. Par places, on observe de gros noyaux ou des veines lenticulaires de quartz gras, et il n'est pas rare d'y trouver des cristaux de quartz enfumé, avec enduit chloriteux.

Cependant cette roche se distingue, par quelques traits essentiels, des pegmatites normales du Cotentin et de la Bretagne. D'abord la tourmaline, si caractéristique de ces dernières roches, fait complètement défaut à Jersey. Ensuite, au lieu de mica blanc, minéral habituel des granites pegmatoïdes, la variété du Mont Mado ne renferme que du mica noir, assez régulièrement disséminé et fortement chloritisé. Si l'on songe que les pegmatites à tourmaline sont généralement d'âge dévonien ou carboniférien, il ne paraîtra pas sans intérêt de constater l'absence de ce minéral et celle du mica blanc dans les épanchements similaires, mais d'âge précambrien, de l'île de Jersey.

Au Mont Mado, l'orthose est injecté d'albite et forme une vraie microperthite. Il parait en outre y avoir un peu de microcline.

La chlorite engendrée par l'altération du mica est en sphérolithes de signe positif, ce qui peut la faire rapporter à la delessite. On distingue dans la masse de la roche une quantité de petits débris de plagioclase en lamelles hémitropes. Ces fragments sont mangés par l'orthose, comme s'il s'agissait de morceaux du granite encaissant. Enfin, par endroits, on voit des taches violettes de fluorine.

La parenté de la pegmatite de Jersey avec la granulite ordinaire s'affirme encore par ce fait qu'à Saint-Brelade, où la granulite rose est devenue très puissante, constituant à elle seule les belles falaises de Beauport, on observe dans cette roche des veines de pegmatite à grandes parties, où d'énormes lamelles de feldspath rouge rayonnent autour de gros noyaux quartzeux.

Le rocher qui porte le vieux château de Montorgueil consiste en une granulite qui, pour avoir moins de cohésion et une couleur un peu plus sombre que celle des variétés précédentes, semble pourtant ne pas pouvoir en être séparée. Son feldspath, assez altéré, est rouge foncé. Le quartz, extrêmement riche en inclusions, formées de files de gouttelettes, est grisâtre et en gros grains. Le microscope montre du plagioclase en fragments juxtaposés, d'orientations très diverses. Des parties noires, en petits grains miroitants d'éclat presque métallique, appartiennent à la chlorite. Dans un échantillon, nous avons rencontré deux octaèdres quadratiques de zircon rouge-brun, de plus de deux millimètres de hauteur.

La dimension du rocher de Montorgueil suffirait à expliquer la large cristallisation de la granulite. Là encore, du reste, il s'agit d'une roche étroitement apparentée à la pegmatite; car le quartz est parfois très régulièrement aligné en taches allongées et parallèles, d'orientation identique dans un même champ.

La granulite de Montorgueil a été traversée par de minces filons de porphyre quartzifère du type des *granophyres*, se rapprochant de ceux qui ont apparu avec les grandes éruptions porphyriques de l'île. C'est une raison de plus de la rattacher aux venues granulitiques dont il vient d'être parlé, et qui toutes sont postérieures à la sortie des granites proprement dits.

Micropegmatite. — C'est une circonstance digne de remarque, que les filons de granulite, si abondants parmi les deux bandes granitiques de Jersey, fassent absolument défaut au sein des massifs épidioritiques du sud-est. On voit pourtant, dans ces derniers, des filons de vrai granite, où le quartz a parfois une légère tendance granulitique, comme ceux qui affleurent sur la grève d'Azette ainsi qu'entre la pointe de la Roque et la tour Seymour. Mais la microgranulite rose, fréquente en veines parmi les granites en question, semble s'éloigner des épidiorites encaissantes. En revanche et comme par compensation, on voit apparaître avec les épidiorites, à Elizabeth Castle, comme au grand rocher du Mont de la Ville, qui supporte le Fort Regent, une roche très spéciale, où le microscope révèle de très nombreuses parties de *micropegmatite.*

C'est sous la forteresse d'Elizabeth Castle qu'il convient d'étudier cette roche, pour saisir son passage progressif à la microgranulite typique. Massive et de teinte franchement rouge, comme la roche de Beauport, sous l'ancien château, où elle offre la constitution d'une granulite à grain fin, elle se modifie peu à peu à mesure que, se rapprochant de l'Ermitage de Saint-Hélier, elle se partage en un plexus compliqué de filons minces, ramifiés en tous sens au milieu de l'épidiorite. C'est alors que, du grain normal de la granulite, on passe à un *microgranite,* le plus souvent sans quartz apparent, où deux feldspaths, l'un rouge, l'autre blanc jaunâtre, sont enchevêtrés dans une sorte de pâte rougeâtre et comme vernissée. C'est cette pâte que le microscope résout en *micropegmatite* (fig. 5,6). Mais il est aisé de voir, surtout si l'on n'emploie qu'un faible grossissement, que cette micropegmatite ne forme pas la totalité de la roche. De grands cristaux, plus ou moins corrodés, d'orthose et de plagioclase, des grains de quartz d'orientations diverses, semblent indiquer que le fond de la roche est une granulite, au sein de laquelle la micropegmatite s'est abondamment répandue en résorbant une partie des anciens cristaux, comme si les circonstances de l'éruption, peut-être l'influence de l'épidiorite encaissante, avaient modifié une pâte granulitique en cours de consolidation.

Au microscope, on reconnaît de l'amphibole en fibres polychroïques d'un brun verdâtre, de l'allanite et une assez forte proportion de chlorite. Les grands cristaux de feldspath, fort décomposés et mouchetés de séricite, ont leurs bords corrodés par la pâte pegmatoïde, qui se groupe autour d'eux en auréoles comme dans beaucoup de porphyres globulaires.

En étudiant le mode de pénétration de l'épidiorite verte par cette roche rougeâtre, on reconnait que des parties infiniment petites de la première peuvent ainsi se trouver isolées. Parfois, si l'on n'avait à sa disposition qu'un petit échantillon, on pourrait croire que c'est l'épidiorite qui forme veinule dans l'autre. De là l'idée vient assez naturellement que l'amphibole de la micropegmalite pourrait n'être autre chose que celle de l'épidiorite, dissoute au sein de la pâte granulitique qui s'y trouvait injectée.

Il y a des cas où la pénétration de cette pâte a été assez intime pour engendrer une roche mixte, à la fois verte et rosée, où le quartz pegmatoïde court comme une trame au milieu des éléments encore reconnaissables de l'épidiorite.

C'est au-dessous du Fort Regent, comme aussi au voisinage de l'embarcadère de la ligne ferrée du sud-est, que la micropegmatite est le mieux caractérisée et le plus constante. Son grain, très régulier, est celui d'un microgranite sans quartz apparent. Les parties nettement microgranulitiques sont moins fréquentes qu'à Elizabeth Castle, et quand les grains de quartz deviennent visibles à l'œil nu, on peut constater qu'ils ont une tendance pegmatoïde bien accentuée. Toujours les débris de plagioclase et les grands cristaux d'orthose altéré, nageant avec des faisceaux rayonnés de chlorite au milieu de la micropegmatite en houppes, accusent une résorption qui a dû s'attaquer à un magma originairement granulitique.

En somme, tout nous porte à considérer la roche de Fort Regent et d'Elizabeth Castle comme une modification latérale de la granulite. On peut penser que cette modification est due à l'influence de l'épidiorite encaissante, tandis que, dans le granite, le même magma se consolidait partout en granulite ou en microgranulite normales.

Porphyre globulaire. — Tout autour de Saint-Clément et au sud de Grouville, sur le prolongement des affleurements épidioritiques de la grève d'Azette, et en même temps en continuation de la traînée micropegmatoïde d'Elizabeth Castle et du Fort Regent, on observe, sur une largeur et une longueur d'environ 2 kilomètres, un véritable enchevêtrement de deux sortes de roches, l'une acide, l'autre basique, celle-ci traversée par la première.

La roche basique est cette variété d'épidiorite, à feldspath blanc et à grands cristaux d'amphibole, dont il a déjà été question. Sa liaison latérale avec la roche type de la grève d'Azette ne saurait faire le moindre doute. Il s'agit simplement d'une augmentation de la grosseur du grain, et souvent l'épidiorite à grands cristaux alterne avec des parties à grain fin, identiques avec la roche de la Pointe-des-Pas et de la base du Mont de la Ville.

La roche acide offre, du côté de Grouville, tous les caractères de la granulo-pegmatite de Montorgueil, seulement avec une dimension un peu moindre des éléments. Mais, à partir de Saint-Clément, et surtout au tertre de Look Out, on voit dominer une texture porphyrique, essentiellement caractérisée par l'apparition du *quartz globulaire*, groupé autour des cristaux anciens.

L'observation est particulièrement nette dans la carrière de Look Out, où l'épidiorite est traversée par un filon rougeâtre, ramifié, de 3 à 4 mètres de puissance, de la roche acide en question. La plus grande partie du filon présente, à l'œil nu, identiquement les mêmes caractères que la roche du Fort Regent, sinon que le quartz y est plus apparent. Mais au lieu d'une micropegmatite franche, le microscope dévoile un *porphyre globulaire* avec amphibole, où les cristaux anciens, parmi lesquels figurent des quartz brisés et corrodés, à contours partiellement hexagonaux, s'enveloppent de houppes et d'auréoles sphérolithiques, noyées dans une pâte microgranulitique. De plus, sur les deux salbandes, embrassant chacune près de 20 centimètres, la roche prend une pâte absolument compacte, à cassure très esquilleuse, et de teinte brun-rouge, sur laquelle se détachent des cristaux bien isolés de feldspath et des grains vitreux de

quartz, en nombre à peu près égal. On s'attend à ce que le microscope confirme la détermination du felsophyre ou porphyre pétrosiliceux, suggérée par ces apparences extérieures. Cependant, la pâte se résout en porphyre globulaire, ne différant de celui de la masse principale du filon que parce que son grain est à peu près dix fois plus petit. Il serait difficile d'imaginer un exemple plus net de l'influence exercée sur le refroidissement d'un magma par les parois encaissantes.

La continuité de ces affleurements avec ceux de la région du Fort Regent, bien qu'interrompue par l'ancienne baie de Samarès, nous semble évidente, et nous ne pouvons guère hésiter à considérer le porphyre globulaire de Look Out comme une forme extrême de la consolidation du magma granulitique d'Elizabeth Castle et de Montorgueil. A l'appui de cette conclusion, on peut remarquer qu'à moitié chemin de Look Out et de Saint-Clément, l'épidiorite est traversée par un porphyre globulaire où un grossissement de 350 diamètres met en évidence une très belle structure de micropegmatite. D'ailleurs, la région où se produisent ces enchevêtrements d'épidiorite et de porphyre est en dehors du grand district porphyrique dont il nous reste à parler. Même elle en est séparée, au lieu dit Le Bourg, par du schiste précambrien non modifié. Il est donc fort peu probable que le porphyre globulaire doive être relié aux coulées acides qui ont terminé les éruptions porphyriques du nord-est.

Toutefois, quand on voit qu'à Montorgueil, à l'extrémité du promontoire, la granulite est traversée par des filons très nets, de quelques centimètres de puissance, d'un porphyre globulaire, on peut penser que cette forme d'injection, à Look Out, au lieu d'être exactement contemporaine des granulites de l'ouest, représente en quelque sorte un terme extrême de l'éruption.

Il nous semble difficile de ne pas rapporter au même type le filon de porphyre gris verdâtre qui traverse la veine d'épidiorite de Belle-Hougue. Cette variété (fig. 9) est riche en cristaux corrodés de quartz, semblables à ceux des felsophyres, mais entourés d'auréoles sphérolithiques où domine le quartz (ou la quartzine). En outre, la pâte manifeste très souvent un arran-

gement rayonnant, dû à des groupements de fibres feldspathiques, qui diffèrent essentiellement des sphérolithes quartzeux. Les houppes qui entourent les cristaux anciens se résolvent, à un fort grossissement, en micropegmatite, ce qui nous paraît une raison de plus (bien qu'assurément elle ne soit pas décisive à elle seule) pour rattacher la sortie de ce type à celle des filons de l'Ermitage, qui d'ailleurs ont la même roche encaissante.

Série porphyrique. Orthophyre. — Toutes les roches précédemment décrites, et où dominent, presque sans partage, la structure massive ainsi que la texture granitoïde, appartiennent soit à la moitié occidentale de l'île, soit à la lisière méridionale de la seconde moitié. Mais la plus grande partie de celle-ci est occupée par une formation d'un tout autre genre, que limitent, à l'ouest une ligne nord-sud, suivant la vallée de Bellozanne et prolongeant sa direction jusqu'à la baie de Bonne-Nuit, au sud une ligne à peu près droite, tirée de Saint-Hélier par Gorey jusqu'au nord du rocher de Montorgueil. Dans cet espace se succèdent des *nappes* et des *tufs* de roches *porphyriques* et *porphyritiques*, lesquelles, à travers de nombreuses dislocations locales, n'en présentent pas moins un plongement général vers le nord-est, de manière à disparaître, entre Boulay-Bay et Sainte-Catherine, sous le poudingue que nous attribuons, avec MM. Bigot et Hill, à la base du cambrien. De cette façon, et dans l'ensemble, les parties les plus anciennes sont celles qui occupent la bordure occidentale et méridionale de ce territoire.

Cette grande série porphyrique, évidemment postérieure aux injections granitoïdes, qui jamais ne la traversent, a débuté par des émissions de *porphyrites*, qui forment comme une auréole continue autour du district que nous venons de définir.

En général, la partie la plus extérieure de cette auréole est constituée par une roche assez altérable, donnant à l'air une argile bleuâtre, tandis que, quand elle est fraîche, on voit des cristaux blanchâtres de feldspath se détacher sur une pâte d'un gris bleuâtre ou verdâtre, souvent parsemée de mouches de pyrite. C'est le *porphyre argileux* ou *porphyre bleu* des auteurs qui ont écrit sur Jersey.

L'allure des feldspaths et la teinte générale rendent parfois la roche très voisine du *porphyre vert antique.* Mais le microscope y montre une masse de microlithes d'orthose, qui doivent la faire regarder comme un *orthophyre.* Les feldspaths sont extrêmement décomposés, et la pâte n'est pas exclusivement microlithique; car, en beaucoup de points, elle laisse voir, surtout autour des grands cristaux, des parties de microgranulite. On peut dire que cette roche, où le quartz ancien fait défaut, établit, au double point de vue de la texture et de l'acidité, le passage de la microgranulite à la porphyrite. Et ce caractère de transition s'accuse encore par ce fait, que partout où les relations de l'orthophyre peuvent être définies, on le trouve formant des filons irréguliers, comme si ces premiers épanchements, encore internes, avaient préparé la sortie des nappes porphyritiques.

C'est à Five Oaks que l'orthophyre moucheté de pyrite est le plus frais. Un filon identique s'épanouit dans le schiste près de la maison Saint-Louis de Saint-Hélier. Un autre se voit dans l'épidiorite à la pointe de Rockberg, près de Saint-Clément. Nous y rapportons également la roche noire qui s'observe à l'angle de l'escarpement méridional du Fort Regent, presque à l'entrée de la grande tranchée ouverte dans la micropegmatite. C'est cette roche que le R. P. Noury a signalée sous le nom d'*eurite grise*(*), en faisant remarquer que le bord de l'épanchement, au contact de la roche rouge granitoïde, est pétrosiliceux et homogène au point d'être presque vitreux.

Au delà de cette salbande, dont la couleur et la compacité sont celles d'une cornéenne noire, la roche normale, très fraîche, offre une pâte gris noirâtre, parsemée de petits cristaux, dont beaucoup sont de feldspath blanchâtre. Il n'y a pas de quartz visible. Au microscope, on remarque que les grands cristaux de plagioclase sont partiellement corrodés, et nagent au sein d'une pâte moitié microlithique, moitié microgranulitique. Le mica brun et la hornblende brune figurent parmi les éléments discernables.

(*) *Géologie de Jersey*, p. 23.

Cet orthophyre a réussi à injecter des veinules très capricieuses et d'une minceur extrême au milieu de la micropegmatite du Fort Regent. Si l'on taille une plaque mince dans cette région de pénétration mutuelle, on voit (fig. 7) les éléments de la roche acide flotter confusément dans la pâte orthophyrique dont la fluidalité est ici bien accusée. Mais, au contact, cette pâte est devenue finement microgranulitique, et l'on peut s'assurer que le mélange de cette texture avec la texture microlithique est tout à fait complet dans les parties comprises entre l'orthophyre normal et la salbande compacte.

Un autre filon d'orthophyre, épais de quelques centimètres, traverse la syénite de Longueville. Il est décomposé comme l'arène syénitique qui l'environne, et se reconnait aux mouches blanches, provenant de la kaolinisation du feldspath, qui se détachent sur un fond gris argileux.

Porphyrite, spilite. — Quelque répandu que puisse être l'orthophyre, il ne paraît former qu'un accident secondaire, et la roche par laquelle a vraiment débuté la venue porphyrique en nappes est une *porphyrite* à pâte foncée, variant du noir verdâtre au violet sombre. Cette porphyrite est remarquable, dans la partie méridionale des épanchements, par les cristaux maclés de feldspath dont elle est parsemée. A cet égard, elle a tout à fait l'aspect du *porphyre vert antique*, et mieux encore celui des porphyrites de Belfahy, dans les Vosges. Mais, en outre, elle est toujours vacuolaire, avec cavités remplies par de la calcite et du quartz. On peut donc lui appliquer la dénomination de *spilite*.

Le meilleur type de cette roche se trouve dans la grande carrière de Homestead (Val des Vaux). Les feldspaths, maclés en assemblages rayonnants, ressortent en vert jaunâtre sur une pâte brun verdâtre. La roche est pénétrée de calcite, soit en minces lamelles, soit comme noyaux spathiques, remplissant des cavités capables d'atteindre plusieurs centimètres de diamètre, dont les bords sont marqués par un enduit continu de chlorite.

Les grands cristaux de feldspath, très décomposés, sont tous aplatis dans le même sens, qui indique sans doute l'ancienne

direction d'écoulement de la nappe; de sorte que, sur certaines cassures, les feldspaths n'apparaissent que par de minces sections, allongées et parallèles, tandis que, sur les cassures perpendiculaires, ils s'étalent largement en groupes rayonnés.

Le microscope révèle dans la pâte des microlithes d'oligoclase.

L'acide chlorhydrique enlève à la roche 13,18 °/₀ de son poids. La quantité de silice est, avant l'action de l'acide, de 48,80 °/₀ et, après l'enlèvement du carbonate de chaux, de 56,20 °/₀.

Dans les affleurements de porphyrite qu'on observe au nord de l'île, par exemple dans le parc du Manoir de Rozel, il n'y a pas de cristaux apparents; mais les vacoles sont nombreuses et remplies de quartz ainsi que de calcite. La texture microlithique est remarquablement nette (fig. 8). C'est une *porphyrite andésitique* bien caractérisée, dont les allures sont absolument celles d'une lave.

La porphyrite ou spilite à cristaux semble former quelque chose d'intermédiaire entre des massifs et des nappes proprement dites. A la sortie du parc de la maison Saint-Louis sur Water Lane, on voit cette roche, altérée et parsemée de cavités arrondies, se mélanger de la façon la plus capricieuse avec les schistes dont elle empâte de grands fragments. Le schiste est fort disloqué en ce point; on y voit de l'argilolite violacé. Derrière la maison Saint-Louis même, la porphyrite à cristaux alterne avec des strates grenues, d'apparence sédimentaire, qui sont certainement des *tufs porphyritiques*. La constitution tufacée est mieux visible encore près de Saint-Sauveur, dans les carrières de Stephen's Mill, où la roche, toujours teintée de vert, de brun et de violet, est bréchiforme, caverneuse, mouchetée d'épidote, offrant toutes les transitions imaginables entre une nappe éruptive franche et un tuf porphyritique stratifié. On y retrouve les apparences caractéristiques des porphyrites et tufs qui, dans les Vosges et le Plateau Central de la France, alternent avec les grauwackes carbonifériennes.

Le mélange bréchoïde de porphyrite et de tufs se répète à

Belle-Hougue et constitue toute la masse du promontoire de ce nom. Mais là, par suite des dislocations énergiques que l'ensemble a subies, la chlorite a pris un développement considérable, si bien que, par places, on croirait avoir affaire à un schiste chloriteux, d'un gris verdâtre très clair, si le microscope ne mettait en évidence des microlithes encore bien reconnaissables. Le tuf, toujours teinté de vert foncé et de violet, a pris un aspect satiné et froissé, Au pied de Belle-Hougue, sur l'îlôt de Long-Échet, ces roches dynamométamorphiques alternent avec de minces couches de schiste disloqué, d'où l'on peut inférer que la sortie des porphyrites, accompagnée de projections, a été contemporaine du dépôt des derniers schistes précambriens.

Au cours de travaux exécutés derrière la maison Saint-Louis, le R. P. Noury a constaté que la spilite était traversée par un filon vertical, puissant de 0^m40, d'un porphyre quartzifère de teinte gris rougeâtre. Le microscope y montre une pâte de microgranulite très fine, et les cristaux anciens, quartz ou feldspath plagioclase, y sont remarquablement brisés et tordus. Il convient vraisemblablement de rapporter à l'injection de ce *granophyre* d'autres filons, d'un gris jaunâtre, de *porphyre globulaire*, qui traversent le schiste à la montée de Victoria College. Il paraît naturel de voir dans ces filons une forme d'éruption des pâtes acides, que nous allons bientôt retrouver en nappes au-dessus des porphyrites.

Brèches, porphyre gris. — A la sortie des porphyrites a succédé la formation d'une brèche à gros fragments anguleux, qui est particulièrement développée dans le nord de l'île, au Havre Giffard. Dans cette localité, le substratum de la série éruptive est constitué, à Frémont et au Côtil, par des roches très problématiques où de petits noyaux de quartz, semblables à ceux des felsophyres, se détachent sur un fond grisâtre soit de tuf, soit de schiste fortement métamorphosé. Au-dessus vient la brèche dont nous parlons, caractérisée par le mélange de parties d'un blanc verdâtre avec d'autres d'un brun violacé. C'est au milieu de cette brèche que nous avons recueilli, entre autres fragments, un mor-

ceau anguleux, gros comme le poing, d'une porphyrite andésitique vacuolaire identique avec celle de Rozel. Cela permet de placer, comme nous le faisons, la formation de la brèche (sans doute l'*old conglomerate* d'Ansted) après l'éruption porphyritique. On peut aussi, à marée basse, observer un galet de granulite rosée, incorporé à la brèche, et attestant, ce qui ne faisait pas de doute pour nous, l'antériorité des éruptions granulitiques. Ajoutons que, sur la plage même de Havre Giffard, nous avons recueilli un gros galet roulé de porphyrite à pâte gris verdâtre et à grands cristaux de feldspath et que, dans la brèche voisine, il semble qu'on ait toutes les transitions entre ce type franchement porphyritique (peut-être orthophyrique) et de simples concentrations de matière feldspathique blanchâtre dans un tuf gris ou vert. Cela pourrait donner à penser que l'orthophyre précédemment décrit, au lieu d'être antérieur à la porphyrite, lui serait peut-être postérieur.

Si, aux environs du Havre Giffard, le caractère clastique et sédimentaire paraît dominer dans la brèche, il n'en est plus de même vers l'est, notamment entre Anne Port et Montorgueil, à la falaise de Jeoffroy's Leap, comme aussi près de l'asile des aliénés, au voisinage du Moulin de la Reine. Dans ces parages, bien que la structure soit encore assez visiblement bréchiforme, le caractère éruptif l'emporte, et il en résulte un *porphyre gris*, très pauvre en quartz, tandis qu'il abonde en cristaux de feldspath de couleurs variées, qui lui donnent un aspect truité.

Au microscope, on remarque des morceaux d'orthose à facules ou d'anorthose, de grands cristaux de plagioclase, qui souvent sont presque entièrement rongés, au point qu'on les devine, plutôt qu'on ne les voit, à des filaments de lamelles hémitropes, demeurés reconnaissables au milieu de la pâte cristalline qui en interrompt la continuité. Quelques fragments ont été ressoudés de travers, et on voit aussi des lamelles tordues de mica. La pâte est un mélange de microlithes s'éteignant suivant leur longueur, de microgranulite et de matière pétrosiliceuse. Il y a même, par endroits, des nids de micropegmatite et, dans certains échantillons, on peut distinguer des fragments indiscutables de porphy-

rite, tandis que, dans d'autres, c'est du porphyre quartzifère, de teinte claire, qui s'y trouve inclus en morceaux anguleux.

En résumé, il semble que cette roche, très voisine d'un tuf, soit le produit d'une sorte de lutte entre les éléments basiques du début de l'éruption porphyrique, et les éléments acides destinés à triompher plus tard.

Du reste, dans la falaise de Jeoffroy's Leap, le porphyre gris bréchiforme, en nappes assez régulières, affectées d'un fort plongement, alterne avec des couches de quelques décimètres, d'un vert foncé, qui sont ou des nappes contemporaines, ou des intrusions très peu postérieures; car elles participent à toutes les dislocations du porphyre. La plupart sont ou des *diabases ophitiques* à petit grain, ou des *porphyrites* microlithiques. L'une de ces veines, par l'épidote et la calcite qu'elle contient, se rapproche sensiblement de la *porphyrite andésitique* déjà décrite. Nous serions porté à y voir les derniers efforts de la venue basique qui, dans le sud, s'était si largement épanchée au début.

Le contact du prophyre gris avec la granulite peut s'observer dans la petite crique qui s'ouvre au nord du rocher de Montorgueil. Le porphyre y est devenu extrêmement siliceux et a pris l'aspect d'un filon de quartz concrétionné. A cet état, il enclave des morceaux de la granulite voisine, dont les éléments sont brisés et tordus, présentant les apparences désignées en Allemagne sous le nom de *Kataklas-structur*. Cela seul suffirait, à défaut d'autres preuves, pour établir l'antériorité de la granulite. Le porphyre au contact offre une sorte de masse palmée et persiliée, qui accuse la corrosion ou la résorption du feldspath de la granulite.

A l'extrémité de la falaise de Jeoffroy's Leap, du côté d'Anne Port, on voit apparaître, au milieu du porphyre gris, une bande d'un porphyre à pâte compacte, où la couleur brune et la teinte gris noirâtre alternent en zones régulières d'un centimètre. Sur cette pâte se détachent des cristaux de feldspath et des noyaux de quartz. L'aspect est celui d'un *felsophyre*, mais le microscope révèle la fréquence des houppes et auréoles globulaires autour des cristaux anciens, parmi lesquels le quartz est relative-

ment rare, tandis que le feldspath à facules (anorthose?) abonde. En revanche, entre Jeoffroy's Leap et Montorgueil, on constate plus d'une fois l'apparition d'un *felsophyre* absolument typique, avec nombreux cristaux anciens, brisés et corrodés, de quartz, et seulement des parties isolées de microgranulite ou de micropegmatite. Cette variété paraît souvent se coincer au milieu du porphyre gris, au contact duquel ses zones de fluidalité éprouvent une déviation, ce qui semble bien indiquer une injection du porphyre acide dans la roche bréchiforme.

Porphyres acides, tufs et pyromérides. — C'est ainsi que se préparait l'émission acide en nappes qui va caractériser la fin du phénomène éruptif, et qui a laissé des traces si nettes dans les falaises septentrionales, d'une part entre Anne Port et Archirondel, de l'autre entre Boulay Bay et la baie de Bonne-Nuit. Mais auparavant on retrouve, au pied du promontoire de la Crête, la formation bréchiforme et tufacée. Elle est remarquable en ce point par l'abondance des cordons et noyaux de jaspe rouge-sang, annonçant le rôle que va jouer la silice, et qu'accusent encore des filonnets où, dans une gangue de chlorite, sont disséminés de longs et petits prismes de quartz.

Là-dessus apparaît le porphyre rouge de la Crête, si régulièrement divisé en colonnes hexagonales, dont l'axe ne fait avec l'horizontale qu'un angle de 20 à 30 degrés; ce qui, en concordance avec le plongement de la brèche sous-jacente, implique un très fort relèvement de la nappe, originairement épanchée en couche à peu près horizontale. Le porphyre est euritique, et sa fluidalité, perpendiculaire à l'axe des prismes, est accusée par une infinité de petites veinules quartzeuses, alternant avec les veines rouges de la roche. On pourrait s'attendre à rencontrer une texture pétrosiliceuse bien caractérisée. Il n'en est rien, et le microscope dévoile un *porphyre globulaire* typique, avec beaucoup de quartz secondaire, expliquant les veinules blanches. Les globules eux-mêmes, en auréoles autour de cristaux anciens décomposés, se résolvent en micropegmatite extrêmement fine, et il y a des endroits où la pâte mériterait d'être qualifiée de microgranulite.

A partir de la Crête jusqu'à Archirondel, c'est-à-dire au point où la formation porphyrique vient disparaître sous le conglomérat cambrien de Sainte-Catherine, on ne voit plus qu'une masse de roches pétrosiliceuses d'un brun-chocolat, où la division en prismes ne se manifeste nettement qu'une fois, suivant une bande verticale qui traverse la carrière d'Archirondel. Ces porphyres sont identiques avec celui de la petite carrière du Moulin de la Reine, à l'ouest de Gorey, roche remarquable par sa fraîcheur, sa teinte brune, sa cassure esquilleuse et la netteté avec laquelle s'y détachent les cristaux de quartz vitreux et de feldspath. Il s'agit bien là d'un *felsophyre* à pâte en grande partie amorphe, et dont la fluidalité est marquée par un pointillé d'hématite. Les cristaux craquelés et corrodés de quartz y sont abondants et typiques (fig. 10).

A côté de ces felsophyres francs, on voit à Archirondel des roches compactes, d'un brun foncé, qu'au premier abord on y rattacherait sans hésitation, mais qui, au microscope, se montrent bréchoïdes, très vitreuses et affectent une texture microlithique. Ce sont des pâtes de porphyrite, tufacées et devenues siliceuses par injection. Puis des parties sphéroïdales s'y montrent, et parfois on voit des globules blancs de $^1/_3$ à $^1/_2$ millimètre se détacher sur un fond rouge, à côté de séparations perlitiques qui isolent de plus gros sphéroïdes. Le microscope montre alors qu'il s'agit bien d'une *pyroméride* à globules fibreux, dont les fibres s'éteignent suivant leur longueur et sont formées à la fois de quartz et de feldspath.

C'est surtout sur la falaise du nord, entre Vicart Point et la Tête des Hougues, que les pyromérides demandent à être observées. De Petit-Port à Vicart Point, on retrouve les porphyrites et les tufs porphyritiques de Belle-Hougue. Mais, à partir du promontoire de Vicart et jusqu'à l'extrémité orientale de Boulay-Bay, on ne cesse pas de se trouver sur des roches où alternent, en mélange intime, les felsophyres francs, les tufs et les brèches, enfin les pyromérides à gros éléments.

Les porphyres ont des teintes variant du gris clair, presque blanc, au vert et au rouge-brun. Dans les variétés claires, la

structure bréchoïde et tufacée est bien marquée; des fragments anguleux, à structure fluidale accusée par un pointillé d'hématite, sont pincés dans une autre pâte également fluidale. Le tout est ressoudé par des injections quartzeuses. On y distingue des boutonnières de micropegmatite, à centre globulaire et rayonné. Ces variétés plongent, en général, sous la roche brun-chocolat, avec larges filets quartzeux, où les séparations perlitiques engendrent les gros sphéroïdes à couches concentriques, si abondants contre la jetée ouest de Boulay-Bay. La roche de ces *pyromérides* est un felsophyre à tendance microgranulitique ou tout au moins globulaire. Par endroits, l'état déchiqueté du menu quartz de la pâte engendre presque une micropegmatite. Tantôt il y a de vrais sphérolithes rayonnés de quartz et de feldspath, noyés dans la microgranulite, tantôt d'énormes sphéroïdes se soudent les uns aux autres, les vides étant remplis par du quartz, concrétionné ou cristallisé.

La roche de l'îlot (Islet) situé au centre de la plage de Boulay-Bay est formée par la succession d'un nombre infini de veinules, les unes blanches, les autres lie de vin, d'un millimètre d'épaisseur, quelquefois ondulées et plissées. La même roche, mais avec des ondulations encore plus capricieuses dans les veinules, forme tout le sommet de la falaise du Havre Giffard. C'est, de toute évidence, un tuf porphyrique surchargé de silice, et ne différant que par une cristallisation moins avancée du porphyre en colonnes de La Crête. Les mouvements différentiels qui ont dû se produire dans la masse pâteuse ont déterminé, dans les veinules superposées, des plissements et des zigzags comparables à ceux des micaschistes les plus disloqués. Les zones blanches sont des filets de quartz, fréquemment bordés d'hématite. A l'œil nu, ces filets se résolvent souvent, surtout au Havre Giffard, en petites concrétions radiées d'apparence globulaire. Mais cette apparence s'évanouit au microscope. Le vrai nom qui convienne à ces tufs est celui d'*éponges siliceuses* de porphyre.

Une variété solide de cette roche finement rubanée forme l'énorme pierre ayant servi de table supérieure au monument mégalithique du Faldouet, près d'Anne Port.

Ces remarquables indices de fluidalité expliquent et justifient le nom de ***rhyolites anciennes*** (***old rhyolites***) appliqué par M. Davies aux roches felsitiques qui viennent d'être décrites.

Les autres tufs de Boulay-Bay offrent une pâte gris clair, parfois verdâtre, avec fragments anguleux de porphyre rouge ; leur enchevêtrement avec les pyromérides est complet, bien qu'ils apparaissent surtout à la base des roches à sphéroïdes. Du reste, le terrain a subi de grandes dislocations qui en compliquent énormément l'étude stratigraphique, et il n'est pas rare de voir, comme à l'Islet, les zones de fluidalité devenues exactement verticales.

Néanmoins, l'ensemble plonge au nord-est, et c'est ainsi qu'à la Tête des Hougues on voit les pyromérides s'enfoncer sous le poudingue cambrien. C'est dans cette localité que le R. P. Noury a trouvé les sphéroïdes géants signalés dans la *Géologie de Jersey* (*), et dont un mesurait plus d'un demi-mètre de diamètre. La roche-mère de ces sphéroïdes, identique avec celle qui compose les zones concentriques dont ils sont formés, est compacte, esquilleuse, lie de vin, et ne laisse pas apercevoir de fibres. Au microscope, c'est une sorte de microgranulite à grain très fin, richement pointillée d'hématite, avec parties de quartz globulaire.

Un peu en arrière de la côte de Boulay-Bay, sur la paroisse de la Trinité, au lieu dit Blanche-Pierre, apparaît un porphyre euritique, à séparations prismatiques, dont la pâte, lie de vin et assez terne, contient de petits noyaux vitreux de quartz, des cristaux de feldspath et des parties esquilleuses d'un jaune verdâtre, dues à des concentrations de silice. Le quartz y est corrodé et déchiqueté, l'hématite abonde, et on voit au microscope des fragments de feldspath à facules, d'aspect moiré. La matière amorphe est certainement présente, et ce type est extrêmement voisin du felsophyre du Moulin de la Reine. Cependant, la roche n'est pas franchement pétrosiliceuse et tourne partiellement

(*) Page 34

à la microgranulite. En somme, c'est un phénomène général à Jersey, où il y a, en quelque sorte, répugnance envers l'état à peu près amorphe de la pâte des felsophyres typiques. Aussi peut-on dire que ces *rhyolites anciennes*, d'âge précambrien, diffèrent des felsophyres permiens par une cristallinité plus prononcée de la pâte.

PORPHYRITES MICACÉES, DIABASES, etc. — Toutes les roches dont il a été parlé jusqu'ici sont certainement plus anciennes que le conglomérat cambrien de Rozel. Non seulement ce dernier les recouvre; mais, à côté de galets schisteux qui prédominent dans sa masse, il contient, en grand nombre, des fragments de granite, de granulite, de pegmatite, de granophyre, de porphyre globulaire et de felsophyre. Cependant la série des éruptions jersiaises ne s'est pas arrêtée avec les pyromérides et, à une époque ultérieure, que l'on peut, par analogie avec les régions voisines, rapporter aux temps carbonifériens, de nouvelles fentes se sont ouvertes, qui ont livré passage à des *porphyrites micacées* ou *amphiboliques* et à des *diabases*, les unes granitoïdes, les autres tournant à la *porphyrite*.

Le R. P. Noury a figuré, par des cartes spéciales, les principales d'entre ces veines. Nous nous bornerons à en mentionner quelques-unes.

En premier lieu, il convient de parler du filon de porphyrite micacée de la Grève au Lançon, près de Plémont (*). A travers le granite, disloqué par de nombreuses petites failles, auxquelles participent les veines de microgranulite rosée qui le recoupent, s'ouvre une fissure verticale, large par endroits de près d'un mètre, et remplie par une *porphyrite micacée* d'un noir de charbon. Le centre du filon, sur quelques centimètres, est entièrement globulaire, la matière de la porphyrite s'étant réunie en petites boules de 4 à 5 millimètres, que recouvre habituellement un enduit ferrugineux. Le filon subit des rejets latéraux;

(*) Voir NOURY, *Géologie de Jersey*, p. 50.

mais la porphyrite se poursuit d'une portion à l'autre dans la fente qui a produit le rejet, lequel, par conséquent, n'est pas postérieur à l'éruption.

A l'œil nu, on voit briller les paillettes de mica noir, régulièrement disséminées dans une pâte terne et foncée, que le microscope résout en une trame feldspathique à fibres courbes et enchevêtrées. Les contours du mica sont très réguliers (fig. 11) et ses teintes de polarisation très vives, surtout dans les tons jaunes et bruns, avec irisations fréquentes. En plus d'un point, la pâte contient de vrais nids de petits grains quartzeux. On serait tenté de croire à des injections locales de microgranulite; mais, en lumière naturelle, on reconnaît que ces parties microcristallines sont limitées par des polygones rectilignes et représentent des épigénies, produites aux dépens d'anciens cristaux, peut-être de pyroxène.

La *minette* ou porphyrite micacée de la Grève au Lançon, qui rentre essentiellement parmi les *lämprophyres* des pétrographes allemands, est remarquablement plus riche en silice que les roches basiques dont sa teinte foncée pourrait la faire rapprocher, car elle en renferme 63 °/₀. On pouvait du reste le prévoir à l'abondance du feldspath que le microscope met en évidence, et qui paraît être de l'orthose.

Une veine de porphyrite identique, mais sans partie globulaire médiane, traverse le rocher de Fort Regent, non loin du filon d'orthophyre précédemment décrit.

Les deux veines en question ne traversant que des roches antérieures à la venue porphyrique, leur âge relatif ne peut se déduire que de la verticalité presque absolue des filons, comparée aux dislocations considérables dont les épanchements granitoïdes et porphyriques ont été affectés. Mais il y a aussi des roches éruptives qui traversent, en filons verticaux, le poudingue cambrien. L'une d'elles, assez altérée pour qu'il soit difficile d'en bien définir la composition, s'observe à la pointe de Sainte-Catherine. Un peu plus au nord, à La Coupe, près de Verclut, une autre veine, celle-là beaucoup plus fraîche, traverse le conglomérat, devenu métamorphique et durci à son contact. Elle est

remplie par une roche foncée, où l'œil nu distingue aisément de nombreuses aiguilles d'amphibole fibreuse d'un vert foncé, avec grains de feldspath rose à demi décomposés. Le microscope montre beaucoup d'orthose, et l'amphibole ne paraît pas résulter d'ouralitisation. Ce serait donc une sorte de *lamprophyre syénitique*.

Le R. P. Noury a bien fait connaître (*) l'allure de la grande veine de *diabase* qui s'étend de Noirmont à l'Ermitage de Saint-Hélier, où des travaux récents en ont mis à découvert une partie très fraîche. Cette roche, très nettement granitoïde (fig. 12), offre tout à fait l'aspect des diabases du Cotentin. Elle forme ici un filon d'environ 5 mètres, qui recoupe le mélange d'épidiorite et de micropegmatite. Mais, en outre, elle est traversée et, sur une de ses salbandes, accompagnée par quelques décimètres d'une roche noire très compacte qui s'en distingue nettement, et que le microscope résout en une *porphyrite andésitique* avec augite, riche en chlorite. Le contact des deux roches est signalé par un filet blanc de calcite et de wollastonite.

Des filons de nature analogue sont assez fréquents dans diverses parties de l'île, notamment à Look Out, et à Fort Regent, où ils traversent la micropegmatite en veines foncées, de 20 à 30 centimètres, très voisines de la verticale. Tous sont à grain fin, et généralement fort décomposés aux affleurements. Mais il est un filon vertical qui traverse le granite de la Moye et dont la composition est assez différente. La roche qui le remplit, assez dure pour être exploitée comme pavés, est une *diabase ophitique* à pyroxène, où l'on distingue à l'œil nu de petits cristaux verts, allongés, avec du feldspath blanc verdâtre, de la pyrite et de l'ilménite. Les éléments, par leur allongement, accusent une tendance microlithique, que confirme le microscope, en même temps qu'il montre du sphène, de la chlorite et des grains de zircon à auréoles polychroïques. Ce qui appelle spécialement l'attention dans ce filon, ce sont de gros cristaux jaunes, corrodés

(*) *Géologie de Jersey*, p. 38.

et altérés, qu'on voit nager dans la masse verte de la diabase. Il est facile d'y reconnaître les grandes lamelles de feldspath du granite encaissant, que l'action du magma basique a rongées et remplies d'inclusions.

Enfin, il convient de signaler un beau filon vertical de *diabase* noirâtre, qui surgit au Côtil parmi les roches métamorphiques ou tufacées de la falaise voisine de Frémont. Sur un fond noir, où l'on distingue de la horblende et du mica brun-tombac, se détachent de nombreux petits cristaux blanchâtres de feldspath. Le microscope indique, pour ce minéral, une espèce basique, voisine du labrador ou de l'anorthite. Il y a beaucoup de péridot, et la horblende brune entoure un pyroxène de même couleur. La texture est ophitique au moins autant que granitoïde.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Si nous cherchons à résumer ce que nous apprennent la composition et l'allure des roches éruptives de Jersey, nous remarquerons que les types granitoïdes, tous concentrés dans l'ouest et le sud, appartiennent, sans doute possible, à des émissions profondes, qui ont donné naissance à des massifs et à des filons, jamais à des nappes épanchées. On peut penser que la position actuelle de ces roches tient en partie à un mouvement de bascule qui a couché, en les inclinant au nord-est, des masses originairement verticales. Ce qui donne du poids à cette hypothèse, c'est que, dans le rocher de l'Ermitage de Saint-Hélier, on voit, se détachant de la masse granulitique d'Elizabeth-Castle, pour traverser l'épidiorite verte, un grand nombre de *couches* minces et parallèles de micropegmatite : et ces couches, peu éloignées de l'horizontale, sont légèrement courbées en voûte. Aussi, en voyant cette succession régulière de strates vertes et rouges, dirait-on d'un terrain sédimentaire relevé en dôme, avec plongement principal au nord-est. Il est assez naturel de penser que

c'était autrefois un système de fentes à peu près verticales, par où le magma granulitique sous-jacent avait été injecté dans la roche verte, et que le mouvement de bascule supposé leur a donné cette apparence de couches inclinées.

La probabilité de ce mouvement nous semble encore accrue par le fait que les spilites ou porphyrites à grands cristaux et les orthophyres, par lesquels a débuté la seconde série des éruptions, apparaissent tous sur la lisière sud et sud-ouest, se montrant à peine du côté du nord. Les spilites qu'on observe au voisinage de la côte septentrionale, comme celle du Manoir de Rozel, appartiennent à un type sans cristaux apparents, comme il convient à des roches qui se seraient épanchées plus près de la surface et plus librement que les spilites à feldspaths maclés de Homestead.

Il est probable que le mouvement dont nous admettons l'existence, préparé dès la sortie des porphyrites, de manière à rendre possible la substitution des épanchements extérieurs au régime des émissions profondes, s'est accentué surtout après la formation des pyromérides. Il a eu pour conséquence d'amener au dehors et de rendre accessibles à l'érosion des roches qui jusqu'alors étaient restées dans la profondeur. Ainsi a pu se former le conglomérat cambrien, où la grosseur des éléments exclut toute idée de transport lointain. Au début, comme on le voit à la Tête des Hougues, l'érosion ne s'est attaquée qu'aux pyromérides, engendrant les petites couches, rouges et régulières, avec veines de menu gravier, qu'on observe à la base du poudingue. Mais, le mouvement orogénique s'accentuant, les porphyres et les granites, avec les schistes encaissants, ont été relevés jusqu'au jour et ont pu être attaqués, semant leurs débris dans le conglomérat (où certains blocs de granite ont plus d'un mètre cube). Plus tard, dans cet ensemble profondément disloqué, se sont ouvertes les fentes que la porphyrite micacée et les diabases ont remplies. Mais, depuis lors, la contrée paraît avoir été assez stable pour que ces dernières fentes se soient peu écartées de la verticale.

Il convient de remarquer que c'est par des roches basiques,

les épidiorites, que l'éruption granitoïde a commencé, comme si ces roches venaient préparer en quelque sorte la voie aux émissions granitiques, suivies à leur tour par les épanchements granulitiques, encore plus acides.

De la même façon, des orthophyres assez basiques et de vraies porphyrites, accompagnés de projections qui engendraient des tufs et des brèches, ont marqué le début des éruptions en nappes. Puis une roche intermédiaire, le porphyre gris, s'est montrée, laissant plus d'une fois apparaître des magmas acides, pétrosiliceux ou globulaires. Enfin, les émissions se sont régularisées et les porphyres acides ont pris le dessus, terminant, avec les pyromérides et les tufs siliceux, la série des éruptions précambriennes.

Deux autres observations se présentent encore à l'esprit : la première est relative à l'état remarquablement cristallin des porphyres quartzifères, où nous avons vu que, malgré des apparences extérieures de felsophyres, la pâte était presque toujours, en partie au moins, microgranulitique ou globulaire. La seconde se rapporte au grand rôle joué par les émanations hydrothermales, qui ont saturé de silice les porphyres acides et leurs tufs, masquant si bien le caractère igné que les premiers observateurs ont méconnu, en les décrivant sous le nom de *grès*, la plupart des tufs porphyriques à pâte claire du nord de l'île.

Enfin, le centre éruptif de Jersey nous paraît offrir de précieux exemples de l'influence endomorphique exercée sur les magmas injectés par les roches encaissantes. Nous avons vu les émissions granulitiques prendre un grain fin, presque d'*aplite*, dans les filons minces, tandis qu'elles affectent un grain moyen dans les filons puissants, et une texture de pegmatite dans les grands massifs comme ceux du Mont Mado et de Montorgueil. Nous avons pris sur le fait, à Look Out, la modification du porphyre globulaire lorsque, de granitique qu'il était au centre des filons, le grain devient entièrement felsitique sur les salbandes. Nous avons indiqué les raisons qui nous font regarder la micropegmatite du Fort Regent comme une modification de la granulite au contact des épidiorites, et il nous a paru que le même magma,

dans les diorites à grands cristaux de Saint-Clément, semblait avoir préféré la forme de porphyre globulaire. En raison de l'allure pegmatoïde du quartz que ces diorites contiennent par occasion, nous ne serions pas surpris qu'on y dût voir l'effet d'une pénétration *intersertale*, contemporaine de l'injection de la micropegmatite. Même nous nous demandons s'il ne s'est pas produit une pénétration du même genre dans la masse du granite normal de la Moye; car bien souvent on est frappé de ce fait, qu'à côté de grandes parties de quartz, courant à travers le feldspath, d'autres se présentent où le quartz est en tout petits grains, comme si c'était un réseau de veinules granulitiques fondues dans le reste de la masse.

C'est encore le lieu de rappeler ce que nous a appris l'observation des filons du Pulec, lorsque nous avons vu la liqueur siliceuse et feldspathique du granite à demi consolidé pénétrer seule dans les fentes minces de la roche encaissante et y engendrer une micropegmatite. Rien n'est plus propre à confirmer les idées aujourd'hui admises sur la lente élaboration des magmas granitiques, où la séparation progressive des éléments les plus basiques a de plus en plus enrichi le résidu en silice et en alcalis.

Le travail qu'on vient de lire n'a pas la prétention d'avoir épuisé la question des roches éruptives de Jersey. Au contraire, il doit être considéré comme une étude sommaire, propre à frayer la voie à ceux qui voudraient entreprendre une description plus détaillée. Non seulement, dans cette île si heureusement partagée au point de vue pittoresque, la variété des types de roches est assez grande pour mériter, de la part d'un pétrographe de profession, une monographie complète; mais l'enchevêtrement des variétés est tel, et les dislocations dont le terrain est affecté sont si nombreuses et si considérables, qu'un certain doute peut encore planer sur quelques-unes des relations que nous avons admises. Ce doute ne saurait être levé que par de minutieuses explorations exigeant, avec un séjour prolongé dans l'île, des mesures de précision, qui réclameraient la possession

d'une carte topographique plus exacte que celles dont on dispose actuellement, et auxquelles il serait indispensable de joindre des opérations de nivellement.

Nous souhaitons vivement que cette monographie de détail soit bientôt entreprise, avec l'espoir que, si elle complète et rectifie sur plus d'un point les résultats de notre étude, elle en laissera du moins subsister les principales conclusions.

LÉGENDE DE LA PLANCHE.

FIGURE 1. **Épidiorite** d'Elizabeth Castle; nicols croisés; grossissement : 80 diamètres. L'amphibole est figurée par un grainé spécial.

— 2. **Granite** du Portelet; nic. croisés; grossissement : 30 diamètres. Q, quartz; P. plagioclase; O, orthose; M, mica.

— 3. **Granite** de l'Étacq; nic. croisés; grossissement : 80 diamètres. Q, quartz diversement orienté; P, plagioclase; O, orthose; M, mica.

— 4. **Granite** de Lecq; nic. croisés; grossissement : 80 diamètres. Q, quartz; P, plagioclase; O, orthose; M, mica.

— 5. **Micropegmatite** de Fort Regent; nic. croisés; grossissement : 80 diamètres.

— 6. Détail, au double, d'une partie de la micropegmatite.

— 7. Contact de la **micropegmatite** de Fort Regent avec **l'orthophyre**; nic. croisés; grossissement : 80 diamètres.

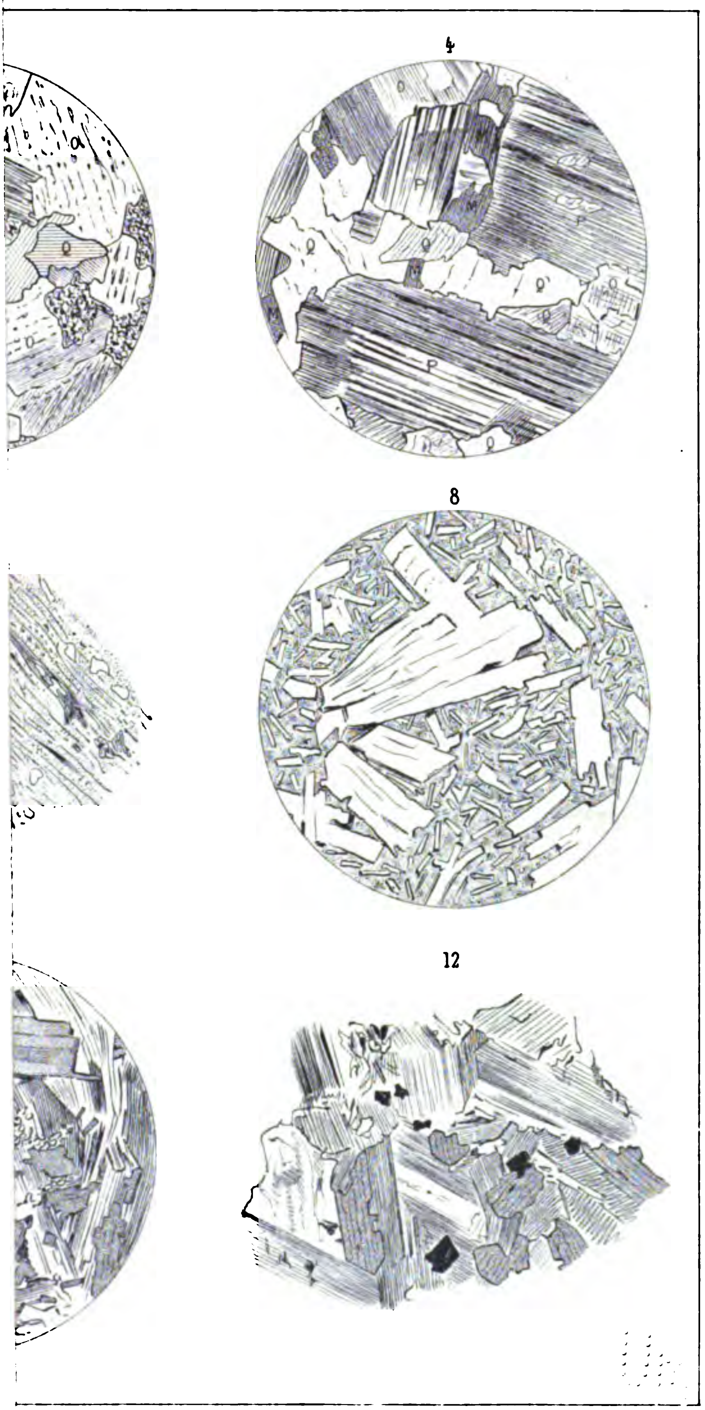
— 8. **Porphyrite andésitique** de Rozel, lumière naturelle; grossissement : 80 diamètres.

— 9. **Porphyre globulaire** de Belle Hougue; nic. croisés; grossissement: 80 diamètres.

— 10. **Quartz** brisé et corrodé dans le porphyre pétrosiliceux du Moulin de la Reine; nic. croisés; grossissement : 30 diamètres.

— 11. **Porphyrite micacée** de La Grève au Lançon; nic. croisés; grossissement : 80 diamètres. Le mica est figuré par un grainé uniforme.

— 12. **Diabase** granitoïde de l'Ermitage de Saint-Hélier; nic. croisés; grossissement : 80 diamètres. Le grainé s'applique au pyroxène.



Gravé par L. Wuhrer, Rue de l'Abbé de l'Épée 4, Paris.

LA MACHINE DE WIMSHURST
A COURANTS ALTERNATIFS

PAR

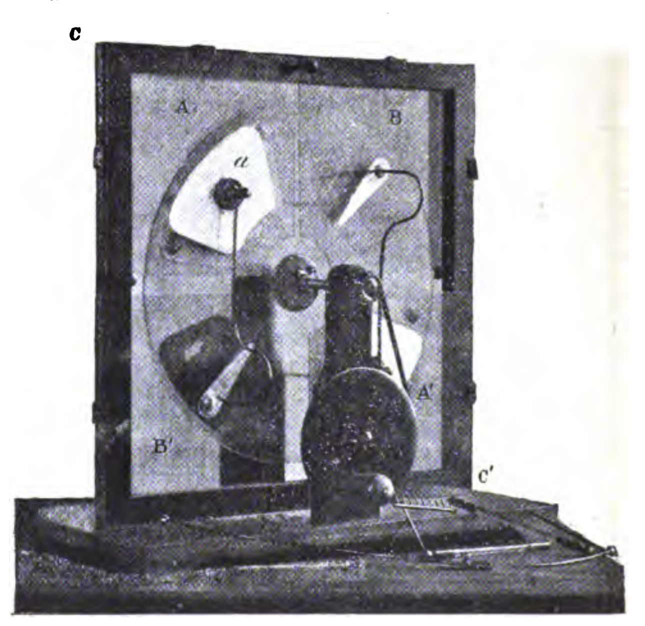
J. THIRION, S. J.

Le 17 avril 1891, M. James Wimshurst présenta à la *Société de physique de Londres* « une machine à influence à courants alternatifs » dont un ouvrage récent a reproduit une description détaillée (*). Cette description nous a permis de construire nous-même cet appareil. Avant de résumer quelques-uns des résultats qu'il nous a donnés et qui contribueront peut-être à édifier la théorie des réactions très complexes dont il est le siège, nous décrirons brièvement le modèle que nous avons réalisé : c'est une reproduction de celui de M. Wimshurst.

1. Description de l'appareil. — Il comporte un seul plateau circulaire de verre à vitre ordinaire, de 40 centimètres de diamètre, verni à la gomme-laque. Ce plateau peut être uni ou armé de secteurs métalliques en nombre quelconque, distribués régulièrement ou au hasard sur les deux faces ou sur une seule. Nous en avons construit quatre : le premier uni; le second armé de douze secteurs équidistants et tous placés sur la même face du plateau; le troisième armé de douze secteurs, six sur chacune des faces, et opposés, c'est celui que représente la figure; le quatrième armé de huit secteurs, quatre sur chacune des faces, mais non opposés. Nous avons, en outre, varié les expériences en collant successivement sur le premier plateau des secteurs en

(*) *Les machines électriques à influence*, par John Gray; traduit de l'anglais et annoté par G Pellissier. Paris, Gauthier-Villars, 1892. Appendice par M. G. Pellissier, pp. 208-214. Description de la machine; résumé des expériences de Wimshurst; théorie des réactions principales en jeu dans la machine.

nombre variable et dans des positions diverses. La machine est construite de manière à rendre très facile la substitution d'un plateau à un autre.



Tous les secteurs sont en étain et découpés en forme de coins à angles arrondis; ils ont 10 centimètres de long, 6 millimètres de largeur à une extrémité et 25 millimètres à l'autre; ils sont munis de boutons de cuivre, comme ceux des machines ordinaires de Wimshurst et de Voss.

Le plateau tourne dans le plan d'un cadre carré en bois vertical CC', de 2 centimètres d'épaisseur et de 50 centimètres de côté. Ce cadre porte les inducteurs.

Ces inducteurs sont au nombre de quatre : A, A', B et B'. Ce sont des plaques de verre vernies de 24 centimètres de côté, échancrées à l'un des coins, de manière à laisser passer l'axe et le manchon du disque mobile. Chacune de ces plaques de verre porte, collé à l'extérieur, un secteur d'étain *a*, à coins arrondis, de 10 centimètres de largeur et de 17 centimètres à la circonférence extérieure. Au milieu de la feuille d'étain est collé un

disque en bois de 3 centimètres de diamètre qui porte une tige en laiton munie d'un balai et recourbée de manière à amener le balai en contact avec le plateau ou les boutons de ses secteurs *du même côté* que son armature, *en avant* de celle-ci, et en un point situé à 90° environ de son milieu.

Ces inducteurs sont placés aux quatre coins du cadre alternativement de part et d'autre du disque de verre qui tourne entre eux; en sorte qu'il y a deux inducteurs A, A′, d'un côté du disque aux extrémités opposées d'une diagonale du cadre, et deux B, B′ de l'autre côté, aux bouts de l'autre diagonale. Des chevilles et des pinces les maintiennent en place, mais on peut facilement les enlever, les déplacer et les échanger.

Nous avons suspendu à chacun des disques en bois des inducteurs un petit pendule à balle de sureau (non représenté dans la figure); deux peignes isolés et munis d'un excitateur ordinaire peuvent être ajoutés à l'appareil. On peut les enlever aisément; la machine est alors parfaitement symétrique; c'est dans ces conditions que nous avons étudié surtout son fonctionnement.

2. Amorçage. — Les peignes sont enlevés; les quatre inducteurs sont en place; on fait tourner le plateau dans un sens tel que tous les balais touchent les secteurs ou les points du plateau qui *marchent vers les inducteurs correspondants.*

1° En général, la machine se charge d'elle-même et d'autant plus rapidement que le nombre des secteurs est plus considérable;

2° Cependant le disque non armé de secteurs métalliques et même le disque à huit secteurs, quatre sur chaque face *et non opposés*, ont résisté *aux premiers essais.* Plus tard, nous avons obtenu, avec ces plateaux, l'excitation automatique. La présence des secteurs facilite certainement l'amorçage automatique et semble diminuer l'influence de l'humidité de l'air;

3° Quand le plateau et les inducteurs ont été parfaitement déchargés et que l'on écarte les balais de manière à les empêcher de toucher le plateau ou les secteurs, l'amorçage spontané ne se produit plus; mais il suffit généralement pour l'exciter d'approcher jusqu'au contact un balai tenu à la main. L'électricité de frottement joue donc un rôle capital dans l'origine de la charge

spontanée; mais le frottement de l'air sur le plateau ne suffit pas à expliquer l'auto-excitation;

4° Quand le plateau ou les inducteurs ont conservé une charge résiduelle, l'excitation automatique peut se produire sans que les balais touchent le plateau ou les secteurs, c'est-à-dire sans aucun frottement, sans aucun contact. Il est probable que les fils métalliques des balais jouent alors le rôle de pointes; on peut, en effet, les remplacer par des pointes et la machine se charge d'elle-même. En enlevant les brosses sans les remplacer par des pointes, on n'obtient plus évidemment l'amorçage spontané. Les charges résiduelles jouent donc un rôle important dans l'amorçage de la machine; et des phénomènes d'induction peuvent tenir lieu des phénomènes de contact;

5° Quand la machine est amorcée, on la décharge rapidement en changeant le sens de rotation du plateau, à moins toutefois qu'on ne change en même temps la direction des tiges de laiton qui portent les balais.

3. Phénomènes que présente la machine. — 1° Une fois en marche, des étincelles jaillissent nombreuses des balais sur le plateau et les secteurs, et des secteurs sur les inducteurs. En expérimentant dans l'obscurité, on constate aisément que tous les balais ne lancent pas à la fois et d'une manière continue leurs étincelles, mais que l'état électrique des armatures est variable ;

2° En ajoutant les peignes et en écartant les boules de l'excitateur, on obtient des étincelles nombreuses, et l'on constate aux aigrettes des pointes des peignes que chacun d'eux lance alternativement sur le plateau de l'électricité positive et de l'électricité négative;

3° Une bouteille de Leyde mise en communication avec l'un des peignes ou avec un quelconque des inducteurs *ne se charge pas*;

4° Si l'on applique contre un des inducteurs l'extrémité d'une tige métallique isolée et si l'on approche de l'autre extrémité un électroscope à feuilles d'or, on voit les feuilles s'écarter et se rapprocher alternativement et très régulièrement quand on tourne lentement le plateau. Si l'on vient à accélérer la rotation,

les feuilles restent écartées, mais un frémissement continu montre bien qu'elles oscillent rapidement autour d'une position moyenne d'équilibre ;

5° On peut mettre au sol ou enlever un quelconque des inducteurs, la machine continue à marcher, mais moins énergiquement ;

6° On peut mettre en communication, par une tige métallique isolée, deux inducteurs placés de part et d'autre du plateau; mais la machine se décharge dès que l'on réunit deux inducteurs situés du même côté du plateau.

Plusieurs de ces faits ont été signalés par M. Wimshurst, et nous n'avons fait que les reproduire; ils montrent, à l'évidence, que les charges des inducteurs changent périodiquement et rapidement de signes. Nous nous sommes attaché surtout à étudier la distribution et la loi de variation de ces charges.

4. Distribution et variation des charges. — Après plusieurs essais trop peu précis pour permettre d'asseoir une conclusion, l'idée nous vint d'ajouter à chacun des inducteurs un petit pendule à balle de sureau. Quand la machine est en marche et que l'on tourne lentement le plateau, on voit

1° Les pendules osciller régulièrement : ils se lèvent d'un côté du plateau, pendant qu'ils s'abaissent de l'autre côté. Ainsi *deux inducteurs placés au bout d'une même diagonale du cadre se chargent simultanément pendant que les deux autres inducteurs se déchargent ensemble.* Ce jeu est continu, et la marche des pendules est symétrique : deux d'entre eux arrivent à leur écartement maximum quand les deux autres passent par la verticale ;

2° Au moment où deux pendules divergent, touchons successivement les inducteurs correspondants à l'aide d'un plan d'épreuve; un électroscope préalablement chargé nous permet de constater que *les charges qui s'accumulent sur leurs armatures sont de signes contraires.* Il en est de même de celles des deux inducteurs en train de se décharger ;

3° Ce procédé très simple et très sûr nous a permis de suivre la série des transformations successives dont la machine est le

siége. Nous la représentons dans les diagrammes suivants : P et *p*, N et *n* signifient *charge positive* et *charge négative;* R et *r*, *état neutre.* Les grandes lettres se rapportent aux inducteurs antérieurs, les petites aux inducteurs postérieurs :

P *r*	R *p*	N *r*
r N	*n* R	*r* P ;
R *n*	P *r*	etc.
p R	*r* N	

La loi qui découle de ces faits est très simple : *les choses se passent comme si une charge positive et une charge négative, toujours situées sur deux inducteurs placés aux bouts d'une même diagonale du cadre, circulaient dans le sens de la rotation du plateau.* Cette loi rend très bien compte des phénomènes décrits au paragraphe précédent;

4° En mettant un des inducteurs au sol, la machine continue à marcher et ses états successifs sont représentés par les mêmes diagrammes dans chacun desquels on remplace par l'une des lettres R, *r*, la lettre correspondante à l'armature maintenue à l'état neutre;

5° Le temps que met chaque armature à perdre sa charge et à en reprendre ensuite une de signe contraire, dépend de la vitesse de rotation du plateau; *peut-être* le nombre des secteurs métalliques intervient-il également. *Le pendule d'une armature déterminée diverge de plus en plus pendant un temps voisin de celui qui met le plateau à tourner des $^3/_8$ environ d'un tour entier; il retombe peu à peu pendant un temps égal au premier; mais il ne fait que passer par la position verticale,* en sorte que le temps d'une oscillation du pendule est égal à celui qui met le plateau à faire $^3/_4$ de tour environ. La série complète des transformations de la machine est donc épuisée en trois tours; en d'autres termes, *les inducteurs se retrouvent dans le même état après chaque période de trois tours environ du plateau.*

Nous aurions d'autres faits encore à signaler, mais plusieurs d'entre eux n'ont été jusqu'ici qu'entrevus; nous les réservons, s'il y a lieu, pour une prochaine communication.

NOTE

SUR

LA DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DE LA LENTILLE

ÉQUIVALENTE AU SYSTÈME OPTIQUE DE L'OEIL (*);

PAR

G. VAN DER MENSBRUGGHE

Membre de l'Académie royale de Belgique, Professeur à l'Université de Gand.

I. Je crois rendre service aux oculistes et peut-être même aux professeurs de physiologie, en faisant connaître une méthode bien simple pour déterminer les éléments de la lentille équivalente au système optique de l'œil : en effet, les ouvrages de physique sont en général insuffisants ou trop difficiles à comprendre à cet égard. Pour plus de clarté, je reviendrai sur quelques points déjà traités dans la note précédente (**).

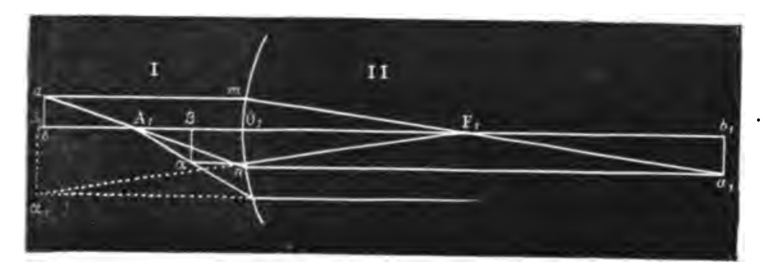


Fig. 1.

Et d'abord, rappelons la construction très simple de l'image d'un point lumineux a (fig. 1) placé devant une surface sphé-

---

(*) Communication faite à la séance du 27 octobre 1892.

(**) *Théorie élémentaire des lentilles épaisses et des systèmes optiques* (ANNALES DE LA SOC. SCIENT., 1891-1892, t. XVI, 2e partie, pp. 207-221).

rique transparente mn qui sépare deux milieux I et II, tels que l'indice de réfraction du second milieu par rapport au premier soit n_1. Si R_1 est le rayon de courbure de la surface supposée, tout rayon parallèle à l'axe principal passant par le centre de courbure et par le centre de figure O_1 se réfractera en passant par un point bien déterminé F_1 quand la lumière va du milieu I au milieu II, et par un autre point fixe A_1 lorsque les rayons passent du second milieu dans le premier; on démontre aisément (voir fig. 2 de la note citée) qu'on a les relations

$$A_1O_1 = \frac{R_1}{n_1 - 1}, \quad O_1F_1 = \frac{n_1R_1}{n_1 - 1} = A_1O_1 + R_1.$$

D'après cela, le rayon am, parallèle à l'axe, se réfracte suivant mF_1, tandis que le rayon incident aA_1n donne un rayon réfracté na_1 parallèle à l'axe, de sorte que a_1 est l'image de a. Si l'on mène ab, a_1b_1 perpendiculairement à l'axe et qu'on pose

$$O_1A_1 = A_1, \quad O_1F_1 = F_1, \quad bA_1 = \varphi \quad \text{et} \quad b_1F_1 = \psi,$$

il est aisé de voir que l'on a, en faisant attention que l'image a_1b_1 est renversée,

$$\frac{a_1b_1}{ab} = -\frac{A_1}{\varphi} = -\frac{\psi}{F_1}.$$

Comme dans la note déjà rappelée, nous conviendrons que les distances telles que φ, ψ seront prises avec le signe + lorsque, comptées à partir du foyer correspondant, elles s'écartent de la face réfringente, et avec le signe — quand elles se rapprochent de la même face. D'après cette convention, on aurait pour l'image $\alpha'\beta'$ d'un objet $\alpha\beta$ placé entre le foyer A_1 et la face mn :

$$\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta} = \frac{A_1}{\varphi_1} = \frac{\psi_1}{F_1}.$$

II. Cela posé, abordons l'examen du système optique de l'œil : nous savons qu'il se compose essentiellement :

1° De la *cornée* transparente, qui est une surface ellipsoïdale de révolution ;

2° Du *cristallin*, qui est une lentille biconvexe, plus fortement bombée en arrière qu'en avant, et où la densité va en augmentant de la surface au centre, de sorte que l'indice de réfraction par rapport à l'air varie d'une couche à la suivante, et cela entre les limites 1,337 à 1,399; la distance de la cornée au cristallin est de $3^{mm},78$;

3° De deux cavités remplies de milieux un peu différents;

4° Enfin d'une membrane excessivement ténue, appelée *rétine;* elle forme l'épanouissement du nerf optique et occupe le fond de l'œil.

L'une des cavités est limitée d'un côté par la cornée, de l'autre par la face antérieure (la moins bombée) du cristallin, et contient l'*humeur aqueuse*, qui est de l'eau presque pure et a pour indice 1,337.

L'autre cavité contient *l'humeur vitrée*, dont l'indice de réfraction est 1,339, et qui baigne, d'une part, la surface postérieure du cristallin, de l'autre, la *rétine* sur laquelle se dessine l'*image*.

D'après ce qui vient d'être dit, ni la cornée, ni les faces du cristallin n'ont même courbure en tous les points : c'est pourquoi on a simplifié le calcul en substituant à chacune d'elles une surface sphérique ayant une courbure moyenne entre les valeurs extrêmes des courbures de la surface considérée. Ces valeurs se rapportent à l'état statique de l'œil, pendant lequel les courbures des faces du cristallin demeurent invariables.

III. Passons actuellement à la solution du problème.

Soient donc CO_1C (fig. 2) la cornée transparente, R_1 son rayon de courbure moyen, n_1 l'indice de réfraction de l'humeur aqueuse par rapport à l'air; les distances focales principales seront

$$A_1 = \frac{R_1}{n_1 - 1}, \quad F_1 = A_1 + R_1.$$

Le cristallin D est placé à une distance $O_1O_2 = \delta$ de la cornée; si R_2 est le rayon de courbure moyen de la face antérieure,

et n_2 l'indice moyen de réfraction du cristallin par rapport à l'humeur aqueuse, les deux distances focales correspondantes seront

$$A_2 = \frac{R_2}{n_2 - 1}, \quad F_2 = A_2 + R_2.$$

Enfin si R_3 est le rayon moyen de courbure de la face postérieure du cristallin, n_2 étant aussi l'indice de réfraction du cristallin par rapport à l'humeur vitrée (*), nous aurons pour distances focales correspondantes à la face considérée :

$$A_3 = \frac{R_3}{n_2 - 1}, \quad F_1 = A_3 + R_3.$$

Nous désignerons par e l'épaisseur O_2O_3 du cristallin.

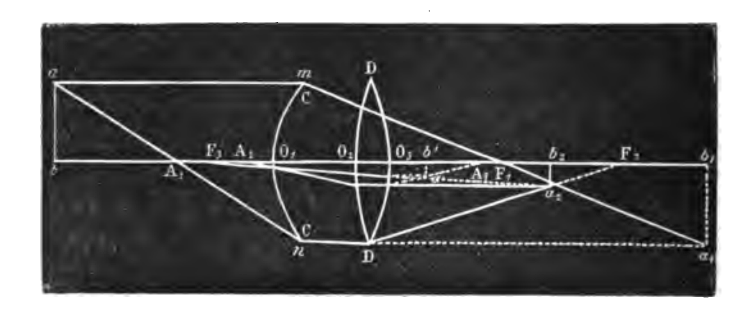


Fig. 2.

Dès lors, soit a un point lumineux quelconque ; le rayon incident am parallèle à l'axe principal passant par les centres de figure $O_1O_2O_3$, donnera un rayon réfracté mF_1 passant par le foyer F_1 ; de même le rayon aA_1n se réfracte parallèlement à l'axe suivant na_1, de sorte que le point d'intersection a_1 des deux rayons réfractés est l'image du point a. En opérant comme au § I, on pourra écrire :

$$\frac{a_1b_1}{ab} = -\frac{A_1}{\varphi} = -\frac{\varphi}{F_1}.$$

(*) Nous regardons l'humeur aqueuse et l'humeur vitrée comme ayant même indice de réfraction.

Passons à l'effet produit par la face antérieure du cristallin sur l'image a_1b_1 due à la première réfraction; si a_2b_2 est l'image due à la deuxième réfraction, on aura de même, en posant $b_1A_1 = \psi_1$, $b_2F_2 = \psi_2$:

$$\frac{a_2b_2}{a_1b_1} = \frac{A_2}{\psi_1} = \frac{\psi_2}{F_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

Enfin si $a'b'$ est l'image produite par la troisième réfraction, qui s'opère à la face postérieure du cristallin, on aura, en écrivant $b'A_3 = \varphi'$ et $b_2F_3 = \chi$:

$$\frac{a'b'}{a_2b_2} = \frac{\varphi'}{A_3} = \frac{F_3}{\chi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [3]$$

Remarquons actuellement que

$$b_1A_2 \quad \text{ou} \quad \psi_1 = b_1F_1 + A_2F_1 = \psi + A_2 + F_1 - \delta,$$

ou, si nous désignons le trinôme $A_2 + F_1 - \delta$ par λ,

$$\psi_1 = \psi + \lambda.$$

D'autre part, nous avons

$$b_2F_3 \quad \text{ou} \quad \chi = F_2F_3 - b_2F_2 = F_2 + F_3 - e - \psi_2,$$

ou, si nous faisons $F_2 + F_3 - e = \lambda'$,

$$\chi = \lambda' - \psi_2.$$

Combinons maintenant les relations [1], [2] et [3]: nous obtiendrons successivement, par substitution des valeurs de ψ, ψ_1, ψ_2 et χ :

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{A_1A_2\varphi'}{\varphi\psi_1A_3} = -\frac{\psi\psi_2F_3}{F_1F_2\chi},$$

$$-\frac{A_1A_2\varphi'}{\varphi(\psi + \lambda)A_3} \quad \text{ou} \quad \frac{A_1A_2\varphi'}{A_3(A_1F_1 + \lambda\varphi)} = \frac{\dfrac{A_1F_1}{\varphi} \cdot \dfrac{A_2F_2\varphi}{A_1F_1 + \lambda\varphi} \cdot F_3}{F_1F_2\left(\lambda' - \dfrac{A_2F_2\varphi}{A_1F_1 + \lambda\varphi}\right)}.$$

relation qui se réduit à

$$\left[\lambda'(A_1F_1 + \lambda\varphi) - A_2F_2\varphi\right]\varphi' = A_3F_3(A_1F_1 + \lambda\varphi),$$

ou bien

$$(\lambda\lambda' - A_2F_2)\,\varphi\varphi' + \lambda' A_1F_1\varphi' = A_1A_3F_1F_3 + \lambda A_3F_3\varphi.$$

IV. *Foyers principaux de la lentille cherchée.* L'équation que nous venons d'obtenir se ramène aisément à la forme

$$\varphi_1\varphi_1' = \text{constante}.$$

A cet effet, posons $-\varphi' = \varphi_1' + y$, $\varphi = \varphi_1 + x$, et remplaçons le binôme $\lambda\lambda' - A_2F_2$ par c; nous obtiendrons

$$c\varphi_1\varphi_1' + \left.\begin{array}{r} cy \\ +\lambda A_3F_3 \end{array}\right|\varphi_1 + \left.\begin{array}{r} cx \\ +\lambda' A_1F_1 \end{array}\right|\varphi_1' + \left.\begin{array}{l} cxy \\ +\lambda' A_1F_1 y \\ +\lambda A_3F_3 x \\ +A_1A_3F_1F_3 \end{array}\right| = 0.$$

Si nous faisons évanouir les coefficients de φ_1, φ_1', c'est-à-dire si nous posons

$$x = -\frac{\lambda' A_1F_1}{c}, \quad y = -\frac{\lambda A_3F_3}{c},$$

la substitution de ces valeurs réduit l'équation ci-dessus à la suivante :

$$c\varphi_1\varphi_1' = A_1A_3F_1F_3\left(\frac{\lambda\lambda'}{c} - 1\right),$$

ou bien, puisque $c = \lambda\lambda' - A_2F_2$,

$$c\varphi_1\varphi_1' = \frac{A_1A_2A_3F_1F_2F_3}{c}, \quad \varphi_1\varphi_1' = \frac{A_1A_2A_3F_1F_2F_3}{c^2}.$$

La forme de cette équation montre bien que si le point lumineux prend la place de l'image, réciproquement celle-ci prend la position du point lumineux ; en outre, si $\varphi_1 = 0$, c'est à-dire si

le point lumineux se trouve dans le plan normal à l'axe et passant par la nouvelle origine des distances φ_1, on a $\varphi'_1 = \infty$, c'est-à-dire que l'image se transporte à l'infini ; de la même manière φ_1 devient infini pour $\varphi'_1 = 0$. Or, ces propriétés caractérisent précisément les foyers principaux d'une lentille ; il résulte de notre calcul que le foyer extérieur de la lentille équivalente au système optique de l'œil se trouve à la distance $\frac{\lambda' A_1 F_1}{c}$ à droite de A_1, et le foyer intérieur, situé dans le milieu d'indice n, est placé à une distance $\frac{\lambda A_3 F_3}{c}$ à gauche de A_3.

V. ***Distances focales de la lentille cherchée.*** Pour les connaître, il suffit de voir ce que devient le rapport $\frac{a'b'}{ab}$ quand on remplace, dans sa valeur, φ par $\varphi_1 - \frac{\lambda' A_1 F_1}{c}$, et $-\varphi'$ par $\varphi'_1 - \frac{\lambda A_3 F_3}{c}$; cette substitution donne

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{A_1A_2}{A_3} \cdot \frac{\varphi'_1 - \frac{\lambda A_3 F_3}{c}}{A_1F_1 + \lambda\left(\varphi_1 - \frac{\lambda' A_1 F_1}{c}\right)} = \frac{A_1A_2\,(c\varphi'_1 - \lambda A_3F_3)}{A_3\,(\lambda c\varphi_1 - A_1A_2F_1F_2)}.$$

Enfin, en substituant à φ'_1 sa valeur, on trouve

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{A_1A_2\left[\frac{A_1A_2A_3F_1F_2F_3}{(\lambda\lambda' - A_2F_2)\,\varphi_1} - \lambda A_3F_3\right]}{\lambda c\varphi_1 - A_1A_2F_1F_2} = -\frac{A_1A_2F_3}{c\varphi_1},$$

et, par conséquent aussi,

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{c\varphi'_1}{A_3F_1F_2}.$$

Nous voyons donc que si nous posons $f_1 = \frac{A_1A_2F_3}{c}$, $f_2 = \frac{A_3F_1F_2}{c}$, les valeurs du rapport $\frac{a'b'}{ab}$ deviennent $-\frac{f_1}{\varphi_1}$ et $-\frac{\varphi'_1}{f_2}$, c'est-à-dire celles qui conviennent à une lentille de distances focales principales f_1 et f_2.

VI. ***Points et plans principaux de la lentille.*** Puisque tout point situé dans un plan principal doit avoir pour image un

point situé dans l'autre plan principal, à la même hauteur au-dessus de l'axe principal, les distances φ_1, φ'_1 qui déterminent les points et les plans principaux doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{a'b'}{ab} = -\frac{f_1}{\varphi_1} = -\frac{\varphi'_1}{f_2} = +1,$$

C'est-à-dire que $\varphi_1 = -f_1$ et $\varphi'_1 = -f_2$.

Il suffit donc de porter à droite du foyer extérieur une distance égale à f_1, et à gauche du foyer intérieur une distance égale à f_2; on obtient ainsi les points principaux H_1, H_2 (fig. 3) de la lentille; les plans normaux à l'axe et passant par ces points sont les plans principaux.

VII. *Points nodaux.* Il suffit de porter à droite du foyer intérieur une distance égale à f_2, et à gauche du foyer intérieur une distance égale à f_1; les points N_1, N_2 ainsi obtenus sont les points nodaux; leur distance mutuelle est égale à celle des points principaux.

VIII. Pour achever la solution de notre problème, il ne nous reste plus qu'à chercher les valeurs numériques des différents paramètres qui entrent dans nos calculs. A cet effet nous nous appuyons sur les nombres donnés dans l'*Optique physiologique* de von Helmholtz, savoir :

	mm.
Rayon de courbure moyen R_1 de la cornée	7,8
» » R_2 de la face antérieure du cristallin	9,51
Rayon de courbure moyen R_3 de la face postérieure . .	5,87
Distance δ de la surface antérieure de la cornée à la première face du cristallin	3,78
Épaisseur e du cristallin	4,00
Indice de réfraction de la cornée et des humeurs de l'œil	1,3465
» » moyen du cristallin	1,4545
» » moyen du cristallin par rapport aux humeurs de l'œil	1,0802

Nous pouvons donc écrire :

$$A_1 = \frac{7,8}{0,5465} = 22^{mm},51, \quad F_1 = R_1 + A_1 = 30,31,$$

$$A_2 = \frac{9,51}{0,0802} = 118^{mm},58, \quad F_2 = A_2 + R_2 = 128,09,$$

$$A_3 = \frac{5,87}{0,0802} = 73^{mm},19, \quad F_3 = A_3 + R_3 = 79,06.$$

Nous déduisons de là :

$$\lambda = A_2 + F_1 - \delta = 145,11, \quad \lambda' = F_2 + F_3 - e = 203,15, \quad c = \lambda\lambda' - A_2F_2 = 14290,1845,$$

$$\frac{\lambda' A_1 F_1}{c} = 9^{mm},695, \quad \frac{\lambda A_3 F_3}{c} = 58^{mm},751.$$

Nous pouvons conclure que les foyers principaux de la lentille cherchée se trouvent, l'un f_1 (fig. 3) (*) à $22^{mm},51 - 9^{mm},695 = 12^{mm},815$ en avant de la cornée transparente, l'autre f_2 à $73^{mm},19 - 58^{mm},751 = 14^{mm},439$ en arrière de la face postérieure du cristallin.

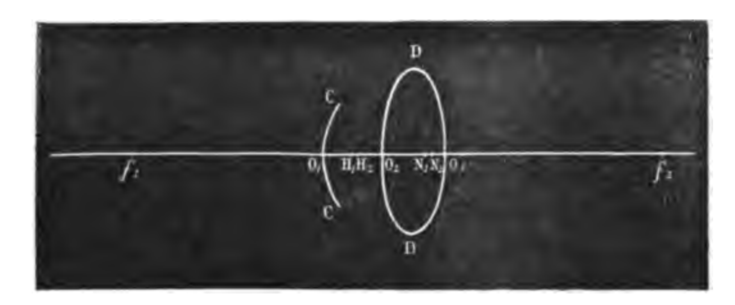


Fig. 3.

Les distances focales elles-mêmes sont

$$f_1 = \frac{A_1A_2F_3}{c} = 14^{mm},76 \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{A_3F_1F_2}{c} = 19^{mm},8845;$$

(*) Les distances sont toutes doublées dans la figure, qui devient ainsi plus claire.

il suit de là que les deux points principaux se trouvent, le premier à $1^{mm},94$ derrière la cornée transparente, le second à $1^{mm},44$ de la face antérieure du cristallin, c'est-à-dire que leur distance mutuelle est de $0^{mm},4$.

Il est clair que la distance des deux points nodaux est également $0^{mm},4$; le premier point nodal est à $3^{mm},28$ en arrière de la face antérieure du cristallin, le second à $0^{mm},32$ en avant de la face postérieure.

La conclusion de ce petit travail est la suivante :

Le système optique de l'œil normal est équivalent à une lentille convergente dont les points principaux sont placés l'un à 2 millimètres, l'autre à $2^{mm},4$ en arrière de la cornée; la distance focale extérieure est de $14^{mm},76$, et la distance focale intérieure de $19^{mm},88$; enfin le premier point nodal est à $3^{mm},28$ en arrière de la face antérieure du cristallin, le second à $0^{mm},32$ en avant de la face postérieure du même cristallin.

Si l'on néglige la petite distance $0^{mm},4$ qui sépare les points principaux, la lentille convergente qui produirait le même effet que l'œil normal a pour distance focale extérieure 15 millimètres, et pour distance focale intérieure 20 millimètres.

MÉMOIRE

SUR LA

RECHERCHE LA PLUS GÉNÉRALE

D'UN

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

PAR

M. le V[te] de SALVERT

Professeur à l'Université Catholique de Lille.

NOTE V

SUR UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE(*) DU THÉORÈME D'ABEL, POUR LE CAS PARTICULIER DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES, RENFERMÉE IMPLICITEMENT DANS LES RÉSULTATS DE LA NOTE III PRÉCÉDENTE.

La théorie que nous avons développée dans la Note III ci-dessus, comme seconde méthode pour traiter le problème déjà résolu dans notre Chapitre V, n'offre pas d'intérêt seulement quant à la question spéciale du Système triplement Isotherme, en vue de laquelle nous l'avons exposée ; elle met encore en lumière, d'une façon simple, l'un des résultats les plus considérables de la Science moderne, auquel on arrive habituellement, dans les différents traités d'Analyse, par des procédés beaucoup

(*) Nous entendons par ce mot *élémentaire* une démonstration indépendante des considérations d'intersection de courbes, empruntées à la Géométrie Supérieure, sur lesquelles on a coutume, dans les différents traités d'Analyse, de fonder la démonstration du célèbre théorème d'Abel.

plus élevés. Aussi ne résistons-nous pas, maintenant que notre tâche est accomplie, à l'envie de cueillir, avant de terminer, ce fruit mûr de nos recherches précédentes, qui s'offre ainsi sur notre route, suivant en cela l'exemple illustre de Jacobi, qui, rencontrant également le même résultat comme application de sa belle méthode d'intégration des systèmes canoniques d'équations différentielles, ne trouve pas déplacé de lui consacrer l'une de ses Leçons sur la Dynamique (*).

A la vérité, de même que cette démonstration de Jacobi, celle que nous allons présenter dans cette Note n'envisagera pas le cas le plus général des fonctions auxquelles se rapporte le célèbre théorème en question, et se contentera de l'établir à propos des seules transcendantes qui viennent, par ordre de complication, immédiatement après celles que l'on étudie dans l'enseignement classique, à savoir les fonctions hyperelliptiques de la première classe; mais ce cas particulier le plus simple suffit parfaitement, comme on le verra, pour mettre en pleine lumière la proposition dont il s'agit, et permettre dès l'instant d'en apprécier l'importance. C'est, au reste, ce que prouverait d'une façon péremptoire, s'il en était besoin, l'intéressante application que nous nous proposons d'en faire, après que nous l'aurons démontrée complètement de la manière suivante.

I

Si dans les formules diverses et les différents résultats de la Note III ci-dessus, c'est-à-dire notamment dans les formules (48), (46), (66), et (87), nous convenons d'attribuer aux deux fonctions U et V deux valeurs constantes quelconques, les trois fonctions de ces variables

$$W = -\frac{1}{4d}\mathcal{F}(U, V) + \text{const.}, \qquad W_1 = \frac{d\mathcal{F}}{dV}, \qquad W_2 = \frac{d\mathcal{F}}{dU},$$

(*) Vorlesungen über Dynamik, 30ste Vorl., page 231.

se réduiront par là semblablement à de simples constantes; et si nous représentons dans cette hypothèse par $F(\rho)$ le polynôme du cinquième degré

$$(1)\qquad F(\rho) = f(\rho)(\rho^2 + U\rho + V),$$

nous aurons alors, entre les quatre variables u, λ, μ, ν et les constantes U, V, α, β, γ, ou bien U, V, W_1, W_2, suivant que nous supposerons le calcul effectué comme nous l'avons fait en réalité dans le second paragraphe de la Note III, ou comme nous l'avions exposé tout d'abord dans le paragraphe I : dans la première hypothèse, les deux équations (66) et la solution (87), dans lesquelles X, Y, Z représentent par définition les expressions (65), et qui sont par conséquent algébriques en λ, μ, ν; et dans la seconde hypothèse, les deux équations (32), que nous récrirons alors, sous forme condensée, ainsi qu'il suit

$$(2)\qquad \sum_\rho \int^{\bullet} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, \qquad \sum_\rho \int^{\bullet} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2,$$

et la même solution sous la forme primitive (49) ou (8), qui s'écrira avec le même mode de notation

$$u = \frac{1}{2d} \sum_\rho \int^{\bullet} \sqrt{\frac{\rho^2 + U\rho + V}{f(\rho)}}\, d\rho + W,$$

et pourra par conséquent être mise aussi bien, à l'aide du symbole F, sous la forme

$$\sum_\rho \int^{\bullet} \frac{\rho^2 + U\rho + V}{\sqrt{F(\rho)}}\, d\rho = 2d.(u - W),$$

ou mieux encore, en retranchant de cette dernière équation les précédentes (2), respectivement multipliées par les facteurs constants V et U, sous cette autre forme, analogue à celle des dites équations (2),

$$\sum_\rho \int^{\bullet} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 2d.(u - W) - (VW_1 + UW_2) = 2d.(u - W_3),$$

en désignant, pour abréger, par W_3 la nouvelle constante

$$W_3 = W + \frac{1}{2d}(VW_1 + UW_2).$$

Cela revient à dire, en résumé, que nous aurons alors entre les quatre variables u, λ, μ, ν les trois équations

$$(3)\quad \sum_\rho \int^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, \quad \sum_\rho \int^\rho \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2, \quad \sum_\rho \int^\rho \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 2d.(u - W_3),$$

qui peuvent être considérées comme constituant l'intégrale générale, sous forme transcendante, du système d'équations différentielles simultanées

$$(4)\quad \sum_\rho \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0, \quad \sum_\rho \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0, \quad \sum_\rho \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 2d.du,$$

pendant que les trois équations précitées (66) et (87) de la Note III, savoir

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha X + 6Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2) - (\lambda + \mu + \nu) = U, \\ \left(\frac{bc}{a}\alpha X + \frac{ca}{b}6Y + \frac{ab}{c}\gamma Z\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{6^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\lambda\mu\nu = V, \end{array} \right.$$

$$(6)\quad \alpha X + 6Y + \gamma Z = d.(u - u_0),$$

constitueront pareillement, mais sous forme algébrique cette fois, l'intégrale générale du même système (4).

C'est donc le *Théorème d'Abel*, pour les fonctions hyperelliptiques de la première classe engendrées par l'irrationnelle $\sqrt{F(\rho)}$, qui ressort ainsi d'une façon inopinée des raisonnements et des calculs que nous avons présentés dans la Note III, sous la forme même où Jacobi l'établit dans ses *Vorlesungen* (*), et que nous

(*) « Dies sind die transcendenten Integralgleichungen des Systems gewöhnlicher » Differentialgleichungen (4), während in (5)-(6) die algebraischen Integralgleichungen des » nämlichen Systems enthalten sind.

» In dieser algebraischen Integration der Differentialgleichungen (4) besteht das

rencontrons de notre côté, comme conséquence de la double voie que nous avons indiquée, successivement dans le premier et le deuxième paragraphe de cette Note, pour obtenir la solution du problème que nous nous proposions d'y traiter.

Toutefois, comme ce n'est pas précisément sous cette forme que ce même théorème est présenté dans plusieurs traités d'Analyse, nous croyons utile de faire voir également que l'autre énoncé, sous lequel on le trouve habituellement formulé, peut se déduire aussi bien de nos calculs antérieurs avec la même facilité (*).

Pour cela, remarquant en premier lieu que les trois équations (3) envisagées tout à l'heure offrent ce caractère commun que les premiers membres rentrent tous dans le type $\sum_{\rho}\int\frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ pour les trois premières valeurs entières $m = 0, 1, 2$ et que, eu

---

» *Abel*sche Theorem, ... » dit textuellement Jacobi, en substituant toutefois, pour l'adaptation de ce texte à la démonstration ci-dessus, le numérotage de nos propres équations à celui du passage en question des *Vorlesungen* (30ste Vorl., p. 234, en haut).

Pour faire d'ailleurs coïncider *littéralement* les formules de l'illustre Auteur, tant avec celles que nous venons de donner, qu'avec celles que nous allons présenter ultérieurement dans cette Note, il suffira d'établir simplement entre les deux systèmes de notation la corrélation suivante

$$\left\{\begin{array}{llllll}
\alpha_1 = \frac{2A'}{d}, & & \alpha_2 = \frac{2B'}{d}, & & \alpha_3 = \frac{2C'}{d}, & \\
\alpha'_1 = A'' + A'W_3, & & \alpha'_2 = B'' + B'W_3, & & \alpha'_3 = C'' + C'W_3, & \\
x_1 = X, & x_2 = Y, & x_3 = Z, & \lambda_i = \rho, & n = 3, & f = F, \\
a_1 = a^2, & a_2 = b^2, & a_3 = c^2, & c = V, & c_1 = U, & c_2 = \frac{1}{2}h = 1, \\
c' = \frac{1}{2}W_1, & c'_1 = \frac{1}{2}W_2, & t = \frac{1}{2}d.u, & \tau = \frac{1}{2}d.W_3, & &
\end{array}\right.$$

moyennant quoi, les formules (3), (8), et (9) de la démonstration précitée de Jacobi, ainsi que la formule sans numéro qui précède ces deux dernières, se confondront *littéralement* avec nos propres formules (21), (3), et (4) empruntées à la présente Note.

(*) Jacobi, en effet, dans le passage précité des *Vorlesungen*, ne prend pas la peine d'établir la concordance en question, qu'il laisse à la sagacité du Lecteur le soin de rechercher et de vérifier.

égard à l'équation (6), le second membre est dans chacune une fonction algébrique des variables λ, μ, ν (cette fonction se réduisant même à une simple constante pour les deux premières), il est bien facile de voir que l'on pourra déduire successivement des précédentes une équation présentant le même caractère pour chaque valeur entière et positive de l'exposant m.

En effet, tout d'abord, pour la valeur suivante $m = 3$, la différentiation des dites équations (3) fournissant immédiatement les trois équations suivantes (4), si nous posons pour un instant

$$(7)\qquad \xi = \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}, \qquad \eta = \frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}, \qquad \zeta = \frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}},$$

ces trois équations (4) établissant alors entre les trois inconnues ξ, η, ζ le système linéaire dont le dénominateur commun sera le déterminant Δ, savoir

$$\left\{\begin{aligned} \xi + \eta + \zeta &= 0, \\ \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta &= 0, \\ \lambda^2\xi + \mu^2\eta + \nu^2\zeta &= 2d.du, \end{aligned}\right. \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \end{vmatrix},$$

elles fourniront donc pour ces trois inconnues les valeurs

$$(8)\quad \xi = \frac{1}{\Delta}(\nu - \mu).2d.du, \qquad \eta = \frac{1}{\Delta}(\lambda - \nu).2d.du, \qquad \zeta = \frac{1}{\Delta}(\mu - \lambda).2d.du,$$

d'où l'on conclura par conséquent pour la différentielle de l'expression précitée

$$\sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \frac{\lambda^3 d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{\nu^3 d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} = \lambda^3\xi + \mu^3\eta + \nu^3\zeta$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[(\nu - \mu)\lambda^3 + (\lambda - \nu)\mu^3 + (\mu - \lambda)\nu^3\right] 2d.du,$$

c'est-à-dire, en faisant attention que la valeur du déterminant Δ

n'est autre que la quantité que nous avons appelée Θ dans notre Chapitre V [équation (115)], savoir

$$(9) \qquad \Delta = (\nu-\mu)\lambda^2 + (\lambda-\nu)\mu^2 + (\mu-\lambda)\nu^2 = (\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu) = \Theta,$$

puis ayant égard de plus à la seconde formule (59) de la Note III, on trouvera pour l'expression de la différentielle en question :

$$(10) \qquad \sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \frac{1}{\Theta}.\Theta(\lambda+\mu+\nu).2d.du = 2d.(\lambda+\mu+\nu)\,du.$$

Or, comme, d'autre part, la première équation (5) et l'équation (6), dans lesquelles U est par hypothèse une simple constante, fournissent immédiatement la valeur

$$\begin{aligned} \lambda+\mu+\nu &= (\alpha X + 6Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2) - U \\ &= d^2.(u-u_0)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U), \end{aligned}$$

l'égalité précédente (10), devenant par la substitution de cette dernière valeur

$$\begin{aligned} \sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= 2d.\left[d^2.(u-u_0)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\right] du, \\ &= 2d^3.(u-u_0)^2\,du - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\,d.du, \end{aligned}$$

donnera tout de suite, en intégrant, puis ayant égard de nouveau à l'équation (6),

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \frac{2}{3} d^3.(u-u_0)^3 - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\,d.(u-u_0) + \text{const.}, \\ &= \frac{2}{3}(\alpha X + 6Y + \gamma Z)^3 - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)(\alpha X + 6Y + \gamma Z) + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire encore une expression algébrique en λ, μ, ν.

Or, ce résultat suffit pour établir le fait que nous avons annoncé tout à l'heure, car le degré du polynôme sous le radical $F(\rho)$ étant 5, un procédé de réduction exposé dans la plupart des traités d'enseignement classique permettra d'exprimer toutes les intégrales telles que $\int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, pour une valeur entière et posi-

égard à l'équation (6), le second membre est dans chacune une fonction algébrique des variables λ, μ, ν (cette fonction se réduisant même à une simple constante pour les deux premières), il est bien facile de voir que l'on pourra déduire successivement des précédentes une équation présentant le même caractère pour chaque valeur entière et positive de l'exposant m.

En effet, tout d'abord, pour la valeur suivante $m=3$, la différentiation des dites équations (3) fournissant immédiatement les trois équations suivantes (4), si nous posons pour un instant

$$(7) \qquad \xi=\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}, \qquad \eta=\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}, \qquad \zeta=\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}},$$

ces trois équations (4) établissant alors entre les trois inconnues ξ, η, ζ le système linéaire dont le dénominateur commun sera le déterminant Δ, savoir

$$\left\{\begin{aligned} \xi+\ \eta+\ \zeta&=0,\\ \lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta&=0,\\ \lambda^2\xi+\mu^2\eta+\nu^2\zeta&=2d.du, \end{aligned}\right. \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1\\ \lambda, & \mu, & \nu\\ \lambda^2, & \mu^2, & \nu^2 \end{vmatrix},$$

elles fourniront donc pour ces trois inconnues les valeurs

$$(8) \quad \xi=\frac{1}{\Delta}(\nu-\mu).2d.du, \qquad \eta=\frac{1}{\Delta}(\lambda-\nu).2d.du, \qquad \zeta=\frac{1}{\Delta}(\mu-\lambda).2d.du,$$

d'où l'on conclura par conséquent pour la différentielle de l'expression précitée

$$\sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=\frac{\lambda^3 d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\frac{\mu^3 d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\frac{\nu^3 d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=\lambda^3\xi+\mu^3\eta+\nu^3\zeta$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left[(\nu-\mu)\lambda^3+(\lambda-\nu)\mu^3+(\mu-\lambda)\nu^3\right]\ 2d.du,$$

c'est-à-dire, en faisant attention que la valeur du déterminant Δ

n'est autre que la quantité que nous avons appelée Θ dans notre Chapitre V [équation (115)], savoir

$$(9) \qquad \Delta = (\nu-\mu)\lambda^2 + (\lambda-\nu)\mu^2 + (\mu-\lambda)\nu^2 = (\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu) = \Theta,$$

puis ayant égard de plus à la seconde formule (59) de la Note III, on trouvera pour l'expression de la différentielle en question :

$$(10) \qquad \sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \frac{1}{\Theta}.\Theta(\lambda+\mu+\nu).2d.du = 2d.(\lambda+\mu+\nu)\,du.$$

Or, comme, d'autre part, la première équation (5) et l'équation (6), dans lesquelles U est par hypothèse une simple constante, fournissent immédiatement la valeur

$$\begin{aligned}\lambda+\mu+\nu &= (\alpha X + 6Y + \gamma Z)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2) - U \\ &= d^2.(u-u_0)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U),\end{aligned}$$

l'égalité précédente (10), devenant par la substitution de cette dernière valeur

$$\begin{aligned}\sum_\rho \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= 2d.\left[d^2.(u-u_0)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\right]du, \\ &= 2d^3.(u-u_0)^2\,du - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\,d.du,\end{aligned}$$

donnera tout de suite, en intégrant, puis ayant égard de nouveau à l'équation (6),

$$(11) \quad \left\{\begin{aligned}\sum_\rho \int \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \frac{2}{3}d^3.(u-u_0)^3 - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)\,d.(u-u_0) + \text{const.}, \\ &= \frac{2}{3}(\alpha X + 6Y + \gamma Z)^3 - 2(a^2\alpha^2 + b^2 6^2 + c^2\gamma^2 + U)(\alpha X + 6Y + \gamma Z) + \text{const.},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire encore une expression algébrique en λ, μ, ν.

Or, ce résultat suffit pour établir le fait que nous avons annoncé tout à l'heure, car le degré du polynôme sous le radical $F(\rho)$ étant 5, un procédé de réduction exposé dans la plupart des traités d'enseignement classique permettra d'exprimer toutes les intégrales telles que $\int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, pour une valeur entière et posi-

tive quelconque de l'exposant *m*, en fonction linéaire des quatre premières intégrales seules, savoir celles correspondant aux deux valeurs 0 et 1 qui sont dites de *première espèce*, et celles correspondant aux valeurs 2 et 3 qui sont dites de *seconde espèce*. Et dès lors, en ajoutant ensemble les trois égalités semblables qui fourniraient l'expression d'une même intégrale du type précité, respectivement pour les trois valeurs $\rho=\lambda, \mu, \nu$, il est bien évident que l'on obtiendra ainsi pour la somme $\sum_\rho\int\frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ une expression de même catégorie analytique que chacune des quatre sommes analogues correspondant aux quatre valeurs ci-dessus spécifiées de l'exposant *m*, savoir, $m=0, 1, 2, 3$, c'est-à-dire par conséquent une fonction simplement algébrique des variables λ, μ, ν.

Plus généralement, si l'on convient de représenter, quel que soit ρ, par u_ρ le radical $\sqrt{F(\rho)}$, ou, ce qui est la même chose, la fonction de ρ déterminée par l'équation algébrique

$$u_\rho^2 - f(\rho)(\rho^2 + U\rho + V) = 0, \tag{12}$$

il y a lieu de se demander à quelle catégorie analytique appartiendra, en tenant compte des équations considérées (3), ou (5) et (6), l'expression d'une somme d'intégrales telles que $\sum_\rho\int\varphi(u_\rho, \rho)\,d\rho$, φ désignant une fonction rationnelle à la fois par rapport à ρ et à u_ρ.

A cet effet, opérant à l'égard des trois équations de définition (65) de la Note III, comme nous le faisons à la fin du Chapitre V, à propos des équations (155), nous mettrons ce système sous la forme équivalente

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{X^2}{a^2+\lambda}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda}=1,\\
&\frac{X^2}{a^2+\mu}+\frac{Y^2}{b^2+\mu}+\frac{Z^2}{c^2+\mu}=1,\\
&\frac{X^2}{a^2+\nu}+\frac{Y^2}{b^2+\nu}+\frac{Z^2}{c^2+\nu}=1,
\end{aligned}\right.$$

qui montre que les trois coordonnées λ, μ, ν sont les trois racines de l'équation du troisième degré

(13) $$\frac{X^2}{a^2+\rho}+\frac{Y^2}{b^2+\rho}+\frac{Z^2}{c^2+\rho}=1,$$

ou, ce qui est la même chose, sous forme entière, de l'équation $\mathcal{F}(\rho)=0$, en désignant par $\mathcal{F}(\rho)$ le polynôme

(14) $$\mathcal{F}(\rho)=-f(\rho)\left(\frac{X^2}{a^2+\rho}+\frac{Y^2}{b^2+\rho}+\frac{Z^2}{c^2+\rho}-1\right),$$

c'est-à-dire en développant, puis en ordonnant par rapport à l'inconnue ρ,

(15) $$\left\{\begin{aligned}\mathcal{F}(\rho)&=-\left[X^2(b^2+\rho)(c^2+\rho)+Y^2(c^2+\rho)(a^2+\rho)+Z^2(a^2+\rho)(b^2+\rho)\right]\\&\qquad+(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho),\\&=\rho^3+\left[a^2+b^2+c^2-(X^2+Y^2+Z^2)\right]\rho^2+\left[.\;.\;.\;.\;.\;.\right]\rho\\&\qquad+a^2b^2c^2-(b^2c^2X^2+c^2a^2Y^2+a^2b^2Z^2)=0,\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, que l'on a les relations

(16) $$\mathcal{F}(\rho)=(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)$$

(17) $$\left\{\begin{aligned}-(\lambda+\mu+\nu)&=a^2+b^2+c^2-(X^2+Y^2+Z^2)\\-\lambda\mu\nu&=a^2b^2c^2-(b^2c^2X^2+c^2a^2Y^2+a^2b^2Z^2).\end{aligned}\right.$$

Ces dernières valeurs étant donc substituées dans les deux équations (5), en tenant compte en même temps de la relation (64) de la Note III, savoir

(18) $$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

les transformeront dès lors dans les suivantes

$$\left\{\begin{aligned}U&=(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)\\&\qquad+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left[a^2+b^2+c^2-(X^2+Y^2+Z^2)\right],\\V&=\left(\frac{bc}{a}\alpha X+\frac{ca}{b}\beta Y+\frac{ab}{c}\gamma Z\right)^2\\&\qquad+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left[a^2b^2c^2-(b^2c^2X^2+c^2a^2Y^2+a^2b^2Z^2)\right],\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, en changeant tous les signes,

$$\left\{\begin{aligned} -\mathrm{U} &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)-(\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{Y}+\gamma\mathrm{Z})^2\\ &\quad -\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(a^2+b^2+c^2)-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)\right],\\ -\mathrm{V} &= \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)(b^2c^2\mathrm{X}^2+c^2a^2\mathrm{Y}^2+a^2b^2\mathrm{Z}^2)\\ &\quad -\left(\frac{\alpha}{a}.bc\mathrm{X}+\frac{\beta}{b}.ca\mathrm{Y}+\frac{\gamma}{c}.ab\mathrm{Z}\right)^2-a^2b^2c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right), \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire finalement, en vertu de l'identité de Lagrange,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} -\mathrm{U} &= (\gamma\mathrm{Y}-\beta\mathrm{Z})^2+(\alpha\mathrm{Z}-\gamma\mathrm{X})^2+(\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y})^2\\ &\quad -\left[(b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2\right],\\ -\mathrm{V} &= a^2(\gamma\mathrm{Y}-\beta\mathrm{Z})^2+b^2(\alpha\mathrm{Z}-\gamma\mathrm{X})^2+c^2(\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y})^2\\ &\quad -(b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\beta^2+a^2b^2\gamma^2). \end{aligned}\right.$$

De cette nouvelle forme des équations (5) ressort immédiatement une conséquence importante que leur forme primitive n'eût pas permis d'apercevoir, à savoir que les trois quantités X, Y, Z sont de simples fonctions linéaires de u; car, si, en vue de déterminer leurs expressions en fonction de cette variable, l'on introduit, à titre d'inconnues auxiliaires, les trois quantités

$$(19^{\text{bis}})\quad \mathfrak{X}=\gamma\mathrm{Y}-\beta\mathrm{Z},\qquad \mathfrak{Y}=\alpha\mathrm{Z}-\gamma\mathrm{X},\qquad \mathfrak{Z}=\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y},$$

lesquelles seront astreintes par conséquent, par leur définition même, à vérifier les équations

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha\mathfrak{X}+\beta\mathfrak{Y}+\gamma\mathfrak{Z}=0,\qquad \mathfrak{X}\mathrm{X}+\mathfrak{Y}\mathrm{Y}+\mathfrak{Z}\mathrm{Z}=0,\\ &\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=(\beta-\gamma)\mathrm{X}+(\gamma-\alpha)\mathrm{Y}+(\alpha-\beta)\mathrm{Z}, \end{aligned}\right.$$

et si l'on désigne alors, pour un instant, par H et K les deux constantes

$$(20^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H} &= (b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2-\mathrm{U},\\ \mathrm{K} &= b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\beta^2+a^2b^2\gamma^2-\mathrm{V}, \end{aligned}\right.$$

l'ensemble des six équations (20), (19), et (6), auxquelles devront satisfaire simultanément nos six inconnues $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, X, Y, Z, et qui seront, étant récrites avec ces notations,

$$(20^{\text{ter}}) \begin{cases} \alpha\mathfrak{X} + 6\mathfrak{Y} + \gamma\mathfrak{Z} = 0, & \mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z = 0, \\ \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = H, & (6-\gamma)X + (\gamma-\alpha)Y + (\alpha-6)Z = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}, \\ a^2\mathfrak{X}^2 + b^2\mathfrak{Y}^2 + c^2\mathfrak{Z}^2 = K, & \alpha X + 6Y + \gamma Z = d.(u - u_0), \end{cases}$$

se partagera, comme on le voit, en deux systèmes partiels : celui de gauche, dont tous les coefficients sont constants, déterminant évidemment en premier lieu les inconnues auxiliaires $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, sous la forme de simples constantes; et, partant de ce résultat, celui de droite déterminera dès lors ensuite les inconnues X, Y, Z, sous la forme d'expressions linéaires de u que nous représenterons par

$$(21) \qquad X = A'u + A'', \qquad Y = B'u + B'', \text{ (*)} \qquad Z = C'u + C'',$$

A', B', C', A″, B″, C″ désignant des constantes qui seront évidemment des fonctions algébriques des arbitraires α, 6, γ.

Ces préliminaires étant admis, revenons à présent à l'expression susmentionnée $\sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$, dont nous nous proposons de reconnaître la nature analytique, u_ρ désignant le radical $\sqrt{F(\rho)}$, lorsque, prenant pour φ une fonction rationnelle à la fois par rapport à ρ et à u_ρ, l'on supposera toujours les variables λ, μ, ν liées entre elles par les mêmes équations (5), U et V étant encore des constantes données.

Nous y arriverons aisément, à l'aide des résultats qui précèdent, en empruntant comme point de départ les conclusions de la

(*) Ces équations reproduisent, par le moyen de la *clef* indiquée dans la note de la page 157 ci-dessus, les trois premières équations (3) de la démonstration précitée de Jacobi (page 232 des *Vorlesungen*).

théorie classique déjà rappelée un peu plus haut, et qui se formulent, pour le cas du polynôme du cinquième degré $F(\rho) = u_\rho^2$, par l'égalité suivante (*) :

$$
(22)\quad \begin{cases} \int \varphi(u_\rho, \rho) d\rho = \Phi_1(\rho)\sqrt{F(\rho)} + \int \Phi_2(\rho)\, d\rho \\ \qquad + \int (A + B\rho + C\rho^2 + D\rho^3) \dfrac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \sum_r \int \dfrac{R_r}{\rho - r} \dfrac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \text{const}, \end{cases}
$$

Φ_1 et Φ_2 désignant deux fonctions rationnelles de ρ seule, et A, B, C, D, r, et R_r, étant des constantes déterminées, qui dépendent seulement, évidemment, des coefficients de φ et de F.

Partant de là, nous obtiendrons donc, en ajoutant les trois égalités semblables pour les trois hypothèses $\rho = \lambda, \mu, \nu$,

$$
(23)\quad \begin{cases} \sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = \sum_\rho \Phi_1(\rho)\sqrt{F(\rho)} + \sum_\rho \int \Phi_2(\rho) d\rho \\ + A \sum_\rho \int \dfrac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + B \sum_\rho \int \dfrac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + C \sum_\rho \int \dfrac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + D \sum_\rho \int \dfrac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} \\ \qquad + \sum_r R_r \left(\sum_\rho \int \dfrac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{F(\rho)}} \right) + \text{const.}, \end{cases}
$$

expression dont nous connaissons la nature de tous les termes, en y supposant introduits les résultats précédemment acquis, sauf en ce qui concerne le dernier seulement.

Pour le calculer également, nous remarquerons que la différentielle de la quantité écrite entre parenthèses dans ce terme a pour valeur, en introduisant d'abord les quantités auxiliaires (7), puis tenant compte des expressions (8) et (9), et aussi de la relation (16),

---

(*) Voir, si l'on veut, à ce sujet, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, JORDAN, tome II, pages 30 et 35.

$$
(24)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho-r)\sqrt{F(\rho)}} = \frac{1}{\lambda-r}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{1}{\mu-r}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{1}{\nu-r}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} \\
&= \frac{1}{\lambda-r}\xi + \frac{1}{\mu-r}\eta + \frac{1}{\nu-r}\zeta = \frac{2d}{\Theta}\left(\frac{\mu-\nu}{r-\lambda} + \frac{\nu-\lambda}{r-\mu} + \frac{\lambda-\mu}{r-\nu}\right).du \\
&= \frac{2d}{\Theta}\frac{(\mu-\nu).(r-\mu)(r-\nu)+(\nu-\lambda).(r-\nu)(r-\lambda)+(\lambda-\mu).(r-\lambda)(r-\mu)}{(r-\lambda)(r-\mu)(r-\nu)}du \\
&= \frac{2d}{\Theta}\cdot\frac{(\mu-\nu)\mu\nu + (\nu-\lambda)\nu\lambda + (\lambda-\mu)\lambda\mu}{\mathcal{F}(r)}du,
\end{aligned}\right.
$$

expression dont le numérateur n'est autre, ainsi qu'on le reconnaît tout de suite, que la valeur (9) de Θ changée de signe, et dont le dénominateur, qui est, d'après la définition (14) de la fonction $\mathcal{F}(\rho)$, et en tenant compte des valeurs (21),

$$
\mathcal{F}(r) = -f(r)\left[\frac{(A'u+A'')^2}{a^2+r} + \frac{(B'u+B'')^2}{b^2+r} + \frac{(C'u+C'')^2}{c^2+r} - 1\right],
$$

peut dès lors être présenté sous l'une ou l'autre des deux formes

$$
(25)\qquad \mathcal{F}(r) = G_r u^2 + 2H_r u + K_r = G_r(u-p_r)(u-q_r),
$$

les coefficients G_r, H_r, K_r, ainsi que les deux racines p_r, q_r, qui sont par conséquent des fonctions algébriques de la constante envisagée r, dépendant de même algébriquement des constantes arbitraires α, β, γ, par l'intermédiaire des coefficients A', A''..., B', ... C'', d'après ce que nous avons dit plus haut (p. 163).

En tenant compte de ces deux observations, et prenant pour la quantité $\mathcal{F}(r)$ la seconde expression (25), comme la différentielle en question (24) se présentera alors sous la forme

$$
\sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho-r)\sqrt{F(\rho)}} = \frac{2d}{G_r}\frac{-du}{(u-p_r)(u-q_r)} = \frac{-2d}{G_r(p_r-q_r)}\left(\frac{du}{u-p_r} - \frac{du}{u-q_r}\right),
$$

on trouvera donc, en intégrant, eu égard aux deux valeurs

$$
p_r = \frac{1}{G_r}\left(-H_r + \sqrt{H_r^2 - G_r K_r}\right), \qquad q_r = \frac{1}{G_r}\left(-H_r - \sqrt{H_r^2 - G_r K_r}\right),
$$

pour l'expression que nous nous proposions de calculer :

$$\sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{F(\rho)}} = \frac{-d}{\sqrt{H_r^2 - G_r K_r}} \log \frac{u - p_r}{u - q_r} + \text{const.}$$

Et dès lors, en remettant au second membre de l'égalité (23) cette dernière valeur, ainsi que celles indiquées par les quatre équations (3) et (11), puis représentant alors, pour simplifier, par W la constante arbitraire $W = AW_1 + BW_2$, et désignant enfin à nouveau par C la constante introduite par la quadrature considérée, l'on voit que l'expression en question se présentera sous la forme

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)d\rho = C + \sum_\rho \Phi_1(\rho)\sqrt{F(\rho)} + \sum_\rho \int \Phi_2(\rho)d\rho + W \\ + \mathcal{A}u^3 + \mathcal{B}u^2 + \mathcal{C}u + \mathcal{D} - \sum_r \frac{R_r d}{\sqrt{H_r^2 - G_r K_r}} \log \frac{u - p_r}{u - q_r}, \end{aligned} \right.$$

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et $\mathcal{D}$ étant des constantes, ou dépendant algébriquement de α, β, γ, d'après la première égalité (11), de même que G_r, H_r, K_r, p_r, et q_r, et la constante d'intégration C devant évidemment, pour la plus grande généralité possible, être envisagée comme dépendant d'une façon tout à fait indéterminée des différentes constantes qui entrent dans les autres termes du même développement, c'est-à-dire, par conséquent, en particulier des arbitraires α, β, γ.

Si l'on tient compte alors de l'équation (6), ainsi que des définitions [formules (63) de la Note III] des symboles X, Y, Z, et si l'on se rappelle en outre la nature analytique de l'intégrale de toute fonction rationnelle, on aperçoit alors de suite que le développement précédent comprendra, en sus de la constante d'intégration C, des termes de deux catégories différentes, les uns simplement algébriques en λ, μ, ν, et les autres logarithmiques; car, après avoir remis au second membre de l'égalité (26), à la place du troisième terme, la valeur qui résulterait du calcul effectif de chaque quadrature, savoir

$$(27)\qquad \sum_\rho \int \Phi_2(\rho)\,d\rho = \sum_\rho \Phi_3(\rho) + \sum_c \sum_\rho C_c \log(\rho - c),$$

Φ_3 désignant encore une fonction rationnelle, il est bien clair que la partie rationnelle de cette dernière valeur étant réunie au second terme du développement (26) ainsi qu'au polynome en u, formera une première partie algébrique en λ, μ, ν, et que semblablement les termes logarithmiques de cette même valeur (27), étant réunis à ceux figurés par le dernier terme du même développement, formeront au second membre de cette égalité (26) une seconde partie de même nature : de telle sorte que, finalement, le résultat auquel nous venons d'arriver affectera en résumé la forme suivante

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\rho} \int \varphi(u_\rho, \rho) d\rho = \psi(\alpha, \beta, \gamma) + \Psi(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) \\ + \sum_i \psi_i(\alpha, \beta, \gamma) \log \Psi_i(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \right.$$

la fonction ψ étant, comme nous l'avons dit, complètement indéterminée, et les trois symboles Ψ, ψ_i, et Ψ_i désignant à présent trois fonctions simplement algébriques par rapport à toutes les quantités qui figurent dans leur algorithme (*).

Ce résultat, toutefois, n'offre encore que peu d'intérêt sous sa forme actuelle, et n'est susceptible ainsi d'aucune conclusion

---

(*) La formule de réduction en éléments simples de toute intégrale hyperelliptique (22), sur laquelle nous avons basé notre démonstration, n'est pas indispensable, en réalité, pour arriver au résultat (28) que nous venons d'établir. On peut également y parvenir sans supposer la connaissance de cette formule, dont la démonstration est longue et laborieuse, et que l'on ne trouve pas dans tous les traités d'Analyse, en invoquant à la place les propriétés connues des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique, et empruntant seulement à la théorie précitée, relative aux intégrales hyperelliptiques, la proposition très simple, établie en quelques mots, qui en forme le point de départ, et consistant en ce que « toute fonction $\varphi(u_\rho, \rho)$, rationnelle à la fois par rapport à ρ et » à $u_\rho = \sqrt{F(\rho)}$, peut être mise sous la forme $\Phi_1(\rho) + \frac{\Phi_2(\rho)}{\sqrt{F(\rho)}}$, Φ_1 et Φ_2 étant deux fonc- » tions rationnelles de ρ. »

En effet, ces deux fonctions Φ_1 et Φ_2 donnant naissance à des développements tels que

$$\int \Phi_1(\rho) d\rho = \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \log(\rho - c), \qquad \Phi_2(\rho) = \sum_m P_m \rho^m + \sum_{n,r} \frac{Q_{n,r}}{(\rho - r)^n},$$

Φ_3 désignant une nouvelle fonction rationnelle, et c, r, C_c, P_m, $Q_{n,r}$, étant des constantes

pratique, parce que, dans cette dernière égalité, une seule des trois variables λ, μ, ν, demeure arbitraire, ν par exemple, ainsi que deux des constantes α, β, γ, du moment que, par hypothèse, ces constantes, d'une part, satisfont à la relation (18), et les variables λ, μ, ν, d'autre part, aux deux équations (5) dans lesquelles U et V sont de même des constantes données. Il

---

faciles à déterminer, l'on trouvera donc successivement, en partant de la proposition que nous venons de rappeler,

$$\int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = \int \left[\Phi_1(\rho) + \frac{\Phi_2(\rho)}{\sqrt{F(\rho)}}\right] d\rho$$

$$= \int \Phi_1(\rho)\, d\rho + \int \left[\sum_m P_m \rho^m + \sum_{n,r} \frac{Q_{n,r}}{(\rho - r)^n}\right] \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$$

$$= \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \log(\rho - c) + \sum_m P_m \int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$$

$$+ \sum_{n,r} Q_{n,r} \int (\rho - r)^n \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \text{const.},$$

et nous obtiendrons par conséquent, en ajoutant les trois égalités semblables pour les trois valeurs $\rho = \lambda, \mu, \nu$, et désignant par C la constante d'intégration,

$$(\alpha) \begin{cases} \displaystyle\sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho) d\rho = C + \sum_\rho \Phi_3(\rho) + \sum_c C_c \sum_\rho \log(\rho - c) \\ \displaystyle\qquad + \sum_m P_m \left(\sum_\rho \int \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \sum_{n,r} Q_{n,r} \left(\sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)^n \sqrt{F(\rho)}}\right). \end{cases}$$

La question se réduit donc à reconnaître la nature analytique de chacune des deux expressions écrites entre parenthèses qui figurent dans les deux derniers termes de ce développement. Or, rien n'est plus facile, en se basant sur les résultats antérieurement acquis.

En effet, elles ont respectivement pour différentielles

$$(\beta) \begin{cases} \displaystyle\sum_\rho \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \frac{\lambda^m d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{\mu^m d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} + \frac{\nu^m d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}, \\ \displaystyle\sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho - r)^n \sqrt{F(\rho)}} = \frac{d\lambda}{(\lambda - r)^n \sqrt{F(\lambda)}} + \frac{d\mu}{(\mu - r)^n \sqrt{F(\mu)}} + \frac{d\nu}{(\nu - r)^n \sqrt{F(\nu)}}, \end{cases}$$

acquerra, au contraire, une signification et une portée considérables, si on le transforme par le moyen des deux opérations que nous allons dire, auxquelles on se trouve tout naturellement

---

quantités qui, étant récrites à l'aide des variables auxiliaires (7), deviendront, eu égard aux valeurs obtenues plus haut (8) et (9),

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned} \sum_\rho \frac{\rho^m d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \lambda^m\xi + \mu^m\eta + \nu^m\zeta \\ &= \frac{2d}{\Theta}\left[(\nu-\mu)\lambda^m + (\lambda-\nu)\mu^m + (\mu-\lambda)\nu^m\right]du \\ \sum_\rho \frac{d\rho}{(\rho-r)^n\sqrt{F(\rho)}} &= \frac{\xi}{(\lambda-r)^n} + \frac{\eta}{(\mu-r)^n} + \frac{\zeta}{(\nu-r)^n} \\ &= \frac{2d}{\Theta}\left[\frac{\nu-\mu}{(\lambda-r)^n} + \frac{\lambda-\nu}{(\mu-r)^n} + \frac{\mu-\lambda}{(\nu-r)^n}\right]du, \end{aligned}\right.$$

et représenteront dès lors, comme l'on voit, deux fonctions symétriques des racines λ, μ, ν de l'équation (15) ou (13).

Pour la première, cette fonction est entière, car le facteur entre crochets peut être écrit, en changeant son signe,

$$\begin{aligned}(\mu-\nu)\lambda^m + (\nu-\lambda)\mu^m + (\lambda-\mu)\nu^m &= (\mu-\nu)\lambda^m - \lambda(\mu^m-\nu^m) + \nu\mu^m - \mu\nu^m \\ &= (\mu-\nu)\lambda^m - \lambda(\mu^m-\nu^m) + \mu\nu(\mu^{m-1}-\nu^{m-1}),\end{aligned}$$

expression dont chacun des trois termes est divisible isolément par $\mu-\nu$. Dès lors, étant symétrique en λ, μ, ν, du moment qu'elle admet le facteur $\mu-\nu$, elle admet forcément par cela même les deux autres facteurs homologues $\nu-\lambda$ et $\lambda-\mu$, et par conséquent le facteur Θ (9).

La première des deux différentielles (6) étant ainsi une fonction entière symétrique des trois racines λ, μ, ν, est donc, en vertu de la propriété rappelée tout à l'heure, une fonction entière des coefficients de l'équation (15), c'est-à-dire, par conséquent, d'après les valeurs (21), une fonction entière de u dont les coefficients dépendent algébriquement de α, β, γ; et dès lors il en sera de même de son intégrale, c'est-à-dire de la première des deux expressions envisagées, laquelle, eu égard à l'équation (6), se trouve ainsi être une fonction algébrique à la fois de λ, μ, ν, et de α, β, γ. C'est le résultat déjà reconnu un peu plus haut (pp. 159-160), en invoquant la formule de décomposition des intégrales hyperelliptiques que nous nous proposons d'éviter dans cette note.

De même, pour la seconde des différentielles (γ) ou (6), le facteur entre crochets étant visiblement une fonction rationnelle symétrique des mêmes racines λ, μ, ν, sera par conséquent aussi une fonction rationnelle de la variable u, dont les coefficients dépendront encore algébriquement de α, β, γ. Son intégrale par rapport à u, c'est-à-dire la seconde des deux expressions à calculer, sera donc celle d'une différentielle rationnelle de u : d'où il suit qu'elle se composera d'une partie rationnelle en u, et d'une somme de termes logarithmiques tels que $C_i \log(u-c)$, dont tous les coefficients, tant d'une partie que de l'autre, seront toujours des fonctions simplement algébriques des arbitraires α, β, γ.

En reportant les deux valeurs ainsi obtenues pour les deux intégrales des différen-

conduit, si l'on cherche à obtenir une interprétation plus claire et plus symétrique de cette même égalité (28).

1° Nous y introduirons, comme constantes arbitraires, à la

---

tielles (β) dans les deux derniers termes du second membre de l'égalité (α), puis cela fait, réunissant ensemble, séparément, d'une part, les parties entières et rationnelles en u, et d'autre part tous les différents termes logarithmiques, il est clair alors que nous obtiendrons pour l'expression en question (α) un développement tel que

$$(\delta) \quad \sum_\rho \int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = C + \sum_\rho \Phi_s(\rho) + \sum_c C_c \sum_\rho \log(\rho - c) + \Phi(u) + \sum_i C_i \log(u - c_i),$$

Φ désignant une fonction rationnelle complètement déterminée dont tous les coefficients, de même que les C_i et c_i, dépendront algébriquement de α, β, γ, tandis que la constante d'intégration C devra évidemment, pour la plus grande généralité, être envisagée comme dépendant, au contraire, d'une façon indéterminée de toutes les constantes qui entrent dans l'expression intégrée, c'est-à-dire en particulier de α, β, γ.

En remettant donc dans le second membre de l'égalité (δ), à la place de u, sa valeur tirée de l'équation (β), et ayant égard aux valeurs de X, Y, Z, nous trouverons dès lors pour cette même quantité une expression de la forme

$$(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \varphi(u_\rho\ \rho)\, d\rho &= \psi(\alpha, \beta, \gamma) \\ &+ \Psi(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma) + \sum_i \psi_i(\alpha, \beta, \gamma) \log \Psi_i(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \right.$$

la fonction ψ étant donc complètement indéterminée, et les symboles Ψ, ψ_i, et Ψ_i désignant cette fois trois fonctions simplement algébriques par rapport à toutes les quantités qui y figurent : ce qui est précisément le résultat auquel nous arrivons dans le texte, en partant de la formule de décomposition des intégrales hyperelliptiques.

Toutefois, bien que cette démonstration, ainsi présentée, soit aussi satisfaisante que celle développée ci-dessus, elle n'éclaire pas cependant la question d'un jour aussi complet, en ce qu'elle ne fait pas voir avec certitude, comme elle, que lorsque l'intégrale $\int \varphi(u\rho, \rho)\, d\rho$ contiendra des intégrales de troisième espèce, la partie logarithmique existera alors forcément dans le second membre de la formule (ε) ou (28), et par suite aussi ultérieurement dans celle (32) du théorème d'Abel. Car, en supposant que dans la fonction rationnelle $\Phi_1(\rho)$, ainsi que dans celle en u dans laquelle se sera transformé, par le procédé que nous avons dit, le second membre de la seconde équation (γ), l'on ait fait apparaître, par la division algébrique, la partie entière, si, après cette opération, les parties rationnelles restantes sont telles l'une et l'autre que le degré de leur dénominateur surpasse d'au moins deux unités celui de leur numérateur (et rien ne montre qu'il n'en sera pas ainsi), il pourra parfaitement arriver (on doit au moins le penser en l'absence de toute raison contraire) que les intégrales des deux fonctions rationnelles précitées soient purement rationnelles, en ρ, ou u, auquel cas les termes logarithmiques feront évidemment défaut, du même coup, dans le second membre des formules (δ) et (ε) : éventualité que ne comporte pas au contraire la démonstration exposée dans le texte, pour la même hypothèse de la présence d'intégrales de troisième espèce dans l'intégrale hyperelliptique proposée.

place de α, β, γ, les valeurs particulières λ_0, μ_0 de λ et μ, correspondant, en vertu des deux équations (5) ou (19), à une valeur *numérique* arbitraire ν_0 de la variable ν (0 par exemple). Pour cela, il suffira de faire $\nu = \nu_0$ dans ces deux équations (19), puis de résoudre alors par rapport à α, β, γ les trois équations dont on aura par là la disposition, savoir

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ &(\gamma Y_0 - \beta Z_0)^2 + (\alpha Z_0 - \gamma X_0)^2 + (\beta X_0 - \alpha Y_0)^2 \\ &\quad = (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2 - U, \\ &a^2(\gamma Y_0 - \beta Z_0)^2 + b^2(\alpha Z_0 - \gamma X_0)^2 + c^2(\beta X_0 - \alpha Y_0)^2 \\ &\quad = b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2 - V, \end{aligned} \right.$$

X_0, Y_0, Z_0 étant ce que deviennent les expressions (65), données dans la Note III pour X, Y, Z, lorsque l'on y écrit λ_0, μ_0, ν_0 respectivement à la place de λ, μ, ν ; et enfin, de remettre les valeurs algébriques ainsi obtenues à la place de α, β, γ dans ladite égalité (28), opération qui la transformera dès lors dans la suivante

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_\rho \int^{\cdot} \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho = \varpi(\lambda_0, \mu_0) + \Pi(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) \;(^*) \\ &\qquad + \sum_i \varpi_i(\lambda_0, \mu_0) \log \Pi_i(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0), \end{aligned} \right.$$

la fonction ϖ étant encore complètement arbitraire, et les symboles Π, ϖ_i, et Π_i désignant de nouveau trois fonctions algébriques par rapport à toutes les quantités qui y figurent.

D'ailleurs, si l'on élimine en même temps, par un procédé quelconque, les mêmes quantités α, β, γ entre les trois équations précédentes (29) et les deux équations primitives (5) ou (19), comme celles-ci se trouveront alors remplacées par deux équa-

---

(*) Nous n'écrivons pas ν_0 dans l'algorithme de ces équations, non plus que dans les suivantes, parce que, par hypothèse, cette quantité n'est plus, comme λ_0, μ_0, un paramètre variable (pouvant par suite être considéré comme fonction de λ, μ, ν), mais un *nombre fixe* quoique arbitraire.

tions algébriques dont nous indiquerons plus loin la forme explicite, et que nous représenterons en attendant par

$$(31)\qquad \mathcal{F}_1(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) = 0, \qquad \mathcal{F}_2(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) = 0,$$

ou bien par

$$(31^{\text{bis}})\qquad F_1(X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0) = 0, \qquad F_2(X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0) = 0,$$

suivant que l'on aura adopté la forme (5) ou la forme (19) pour les équations précitées, il sera donc plus symétrique et plus rationnel de considérer dorénavant, non seulement dans ces deux dernières équations, mais aussi dans l'égalité en question (30), λ, μ, ν comme arbitraires, et λ_0, μ_0 comme deux fonctions de ces variables déterminées par ces deux mêmes équations.

2° Nous éliminerons alors, par simple soustraction, la constante d'intégration $C = \varpi(\lambda_0, \mu_0)$ (qui, étant une fonction indéterminée de λ_0, μ_0, pourrait introduire ces variables sous forme transcendante), entre l'équation obtenue tout à l'heure (30) et celle que l'on en déduira en faisant $\nu = \nu_0$, savoir

$$\sum_{\rho_0}\int \varphi(u_{\rho_0}, \rho_0)\, d\rho_0 = \varpi(\lambda_0, \mu_0) + \Pi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_0, \mu_0) + \sum_i \varpi_i(\lambda_0, \mu_0) \log \Pi_i(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \lambda_0, \mu_0),$$

ce qui conduira définitivement à l'égalité

$$\sum_{\rho}\int^{\cdot} \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho - \sum_{\rho_0}\int^{\cdot} \varphi(u_{\rho_0}, \rho_0)\, d\rho_0 = \mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0) + \sum_i \varpi_i(\lambda_0, \mu_0) \log F_i(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0),$$

dans laquelle, les limites supérieures λ, μ, ν des intégrales de la première somme demeurant arbitraires ainsi que les limites inférieures, supposées constantes, de toutes les intégrales envisagées, λ_0, μ_0 désignent par hypothèse les fonctions de ces variables déterminées par les deux équations (31), et $\mathcal{F}$, ϖ_i, et F_i

désignent de nouveau des fonctions simplement algébriques de toutes ces différentes quantités.

Si l'on fait attention que les deux équations algébriques (31), non linéaires en λ_0, μ_0, ne suffisent pas à déterminer entièrement à elles seules ces deux quantités, et qu'il resterait, pour une précision complète, à définir, à l'aide de considérations accessoires, le chemin décrit par chacune de ces variables λ_0, μ_0, pour chaque chemin arbitrairement choisi des variables indépendantes λ, μ, ν, l'on voit que le signe de chacune des deux différentielles $d\rho_0$, demeure en réalité, jusqu'à plus ample explication, indéterminé dans l'équation précédente, car il est évident que, pour un même élément de chemin décrit par la variable ρ_0, le signe de la différentielle $d\rho_0$ changera suivant le sens dans lequel cet élément sera décrit. Nous n'aborderons pas dans cette Note ce dernier point de la question, nous bornant à faire observer qu'en raison de cette réserve, la même égalité que nous venons d'obtenir pourra aussi bien être écrite en affectant du signe $+$, au lieu du signe $-$, la seconde somme du premier membre.

Sous le bénéfice de cette observation essentielle, nous pourrons maintenant formuler l'énoncé suivant, que nous croyons avoir démontré complètement par les calculs qui précèdent, et qui concorde exactement, pour l'équation algébrique envisagée (12), avec celui que l'on donne généralement du théorème d'Abel (*) :

Théorème. — *Si l'on désigne, quel que soit ρ, par u_ρ la fonction de ρ définie par l'équation algébrique $u^2 - F(\rho) = 0$, $F(\rho)$ étant un polynôme du cinquième degré, n'admettant que des facteurs simples, mais quelconque d'ailleurs, équation que l'on pourra évidemment, en réunissant ensemble deux de ces facteurs, toujours présenter sous la forme*

$$u_\rho^2 - (\rho + a^2)(\rho + b^2)(\rho + c^2)(\rho^2 + U\rho + V) = 0;$$

(*) Voir, par exemple, Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 348, pages 347-349.

par $\varphi(u_\rho, \rho)$ *une fonction rationnelle à la fois par rapport à* ρ *et à* u_ρ; *et enfin par* λ_0, μ_0 *les deux fonctions de* λ, μ, ν *déterminées par les deux équations algébriques* (31) *ou* (31bis), *l'on aura, quels que soient les valeurs finales de* λ, μ, ν, *et les chemins décrits par ces variables (les valeurs initiales étant également arbitraires, mais fixes), en choisissant convenablement le sens des chemins décrits sous ces conditions par les variables* λ_0 *et* μ_0, *l'on aura, disons-nous, l'égalité*

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\varphi(u_\lambda, \lambda)d\lambda+\int\varphi(u_\mu, \mu)d\mu+\int\varphi(u_\nu, \nu)d\nu+\int\varphi(u_{\lambda_0}, \lambda_0)d\lambda_0+\int\varphi(u_{\mu_0}, \mu_0)d\mu_0 \\ &\qquad=\mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0)+\sum_i f_i(\lambda_0, \mu_0)\log F_i(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0), \end{aligned}\right.$$

les trois fonctions $\mathcal{F}$, f_i, *et* F_i *étant trois fonctions complètement déterminées, simplement algébriques par rapport à toutes les quantités qui figurent dans leur algorithme.*

Nous calculerons effectivement, dans le paragraphe suivant, quoiqu'avec d'autres notations, les deux équations algébriques (31) ou (31bis) relatées dans l'énoncé qui précède, car les deux équations (40), dont il est question plus loin dans ce paragraphe, n'étant autres, en vertu de leur définition même, que lesdites équations (31bis), dans lesquelles on aurait écrit, par exemple, λ_1, μ_1, ν_1 à la place de λ, μ, ν, et λ_2, μ_2, ν_2 à la place de λ_0, μ_0, ν_0, il est bien clair dès lors, en se reportant à la forme explicite (48) que nous obtenons ultérieurement pour ces mêmes équations (40), que les équations en question (31bis) seront elles-mêmes les suivantes

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &(YZ_0-ZY_0)^2+(ZX_0-XZ_0)^2+(XY_0-YX_0)^2 \\ &+\{U-(b^2+c^2)\}(X-X_0)^2+\{U-(c^2+a^2)\}(Y-Y_0)^2+\{U-(a^2+b^2)\}(Z-Z_0)^2=0, \\ &a^2(YZ_0-ZY_0)^2+b^2(ZX_0-XZ_0)^2+c^2(XY_0-YX_0)^2 \\ &+(V-b^2c^2)(X-X_0)^2+(V-c^2a^2)(Y-Y_0)^2+(V-a^2b^2)(Z-Z_0)^2=0; \end{aligned}\right.$$

et il est très digne de remarque que cette forme explicite se trouve obtenue par cette voie beaucoup plus aisément qu'à l'aide

du procédé *théorique*, basé sur la considération d'intersections de courbes, sur lequel on a coutume de fonder, tant la démonstration que l'emploi, dudit théorème d'Abel (*).

La démonstration que nous venons de donner de la formule (32) permet d'apercevoir aisément, et d'une façon très claire, quelle forme particulière affectera son second membre dans chaque cas, suivant que l'on supposera le premier membre composé, d'intégrales hyperelliptiques de première espèce seulement, ou bien de première et de seconde espèce, ou enfin, comme cas le plus général, des trois espèces à la fois d'intégrales hyperelliptiques de même origine, nous voulons dire engendrées par la même irrationnelle $\sqrt{F(\rho)}$.

En effet, la réduction aux éléments les plus simples exprimée par la formule (22) n'étant évidemment possible, d'après les procédés mêmes à l'aide desquels on l'établit, que d'une seule manière pour la même fonction $\varphi(u_\rho, \rho)$, supposer que l'intégrale $\int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$ n'est composée que d'intégrales de première espèce, c'est donc admettre que le développement exprimé par la formule (22) se réduit au seul terme $\int (A + B\rho) \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, auquel cas celui exprimé par la formule suivante (23) se réduira manifestement à la valeur constante $C + AW_1 + BW_2 = C + W$. Et dès lors, il est clair que les deux opérations ci-dessus spéci-

(*) En suivant cette méthode, l'on aura à calculer d'abord l'équation du second degré

$$(\alpha) \qquad A\rho_0^2 + B\rho_0 + C = 0,$$

qui admet pour racines les deux fonctions λ_0 et μ_0, équation dont les trois coefficients A, B, C étant rationnels en $\lambda, \mu, \nu, u_\lambda, u_\mu, u_\nu$, (JORDAN, *Ibid*, § 348, p. 348, *en haut*) seront dès lors simplement algébriques en λ, μ, ν, après que l'on y aura remis, à la place de u_λ, u_μ, u_ν leurs valeurs de définition

$$(\beta) \qquad u_\lambda = \sqrt{F(\lambda)}, \qquad u_\mu = \sqrt{F(\mu)}, \qquad u_\nu = \sqrt{F(\nu)},$$

et qui fournira, par conséquent, de même que nos équations relatées ci-dessus (31), deux valeurs simplement algébriques des inconnues λ_0, μ_0, en fonction des variables λ, μ, ν. — Or, le calcul effectif de l'équation que nous venons de dire (α) sera beaucoup moins facile et moins symétrique que celui qui nous conduira dans le paragraphe suivant aux équations précitées (48), qui ne sont autres, sauf les notations, que lesdites équations demandées (31bis) ou (31).

fiées 1° et 2° (pages 170-172) conduiront à la valeur 0 pour le second membre de la formule (32), c'est-à-dire que dans ce premier cas, la partie algébrique et la partie logarithmique séront nulles à la fois.

Semblablement, supposer que la même intégrale n'est composée que d'intégrales de première et de seconde espèce, c'est admettre que le développement précité (22) se borne à son troisième terme seulement, auquel cas le suivant se réduira aux seuls termes $C + W + \mathcal{A}u^3 + \mathcal{B}u^2 + \mathcal{C}u + \mathcal{D}$, et par suite encore celui d'après (23) à ses deux premiers termes : d'où il résulte évidemment, qu'après les susdites opérations 1° et 2° réalisées, le second membre de la formule (32) se réduira simplement à la seule partie algébrique $\mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu, \lambda_0, \mu_0)$.

Enfin, l'on voit tout aussi clairement que lorsque l'intégrale en question renfermera dans son expression (22) une ou plusieurs intégrales de troisième espèce, il existera dès lors forcément, dans chacun des développements (23), (26), et (28), autant de termes correspondants compris dans la dernière somme des seconds membres de ces équations, c'est-à-dire que la partie logarithmique *existera* nécessairement au second membre de la formule envisagée (32).

La propriété remarquable que nous venons d'établir s'applique en réalité, non seulement aux intégrales hyperelliptiques à propos desquelles nous l'avons démontrée, mais encore à toutes les intégrales analogues $\int \varphi(u_\rho, \rho)\, d\rho$, φ désignant toujours une fonction doublement rationnelle, en prenant alors pour la fonction u_ρ toute fonction algébrique de ρ, c'est-à-dire en supposant cette fonction définie par l'équation la plus générale $F(u_\rho, \rho) = 0$, entière à la fois par rapport à ρ et à u_ρ : intégrales auxquelles on a donné le nom d'*intégrales abéliennes* en raison de cette propriété commune, et aussi à titre d'hommage à la mémoire de l'illustre Géomètre qui l'a découverte, et qui a ainsi posé le premier les fondements de leur théorie.

Ce fait étant admis, les caractères que nous venons de reconnaître au second membre de la formule (32), suivant que son premier membre se compose d'intégrales hyperelliptiques de pre-

mière espèce seulement, ou de première et de seconde espèce, ou qu'il y entre des intégrales de troisième espèce, pourront servir alors, par voie d'extension, de base pour la classification des intégrales abéliennes en général, et c'est justement pour cela que nous avons tenu à les faire ressortir avec évidence tout à l'heure; c'est-à-dire qu'une intégrale semblable $\int \varphi (u_\rho, \rho)\, d\rho$ sera dite, ou bien de première espèce si, relativement à elle, le second membre de la formule (32) se réduit à zéro; ou bien de seconde espèce, s'il se réduit à une fonction simplement algébrique des variables ρ; ou enfin, de troisième espèce, s'il existe dans ce second membre une partie logarithmique.

II

Nous allons indiquer maintenant une application importante que l'on pourra faire des résultats qui précèdent.

Désignant de nouveau par F (ρ) un polynôme du cinquième degré, n'admettant que des facteurs simples, mais quelconque d'ailleurs, supposons que nous ayons marqué sur le plan représentatif de la variable imaginaire ρ les cinq points qui seront les affixes des cinq racines de l'équation $F(\rho) = 0$; et comme, parmi ces cinq points, l'on pourra toujours évidemment en prendre trois, que nous marquerons A, B, C, de telle façon que les deux autres, marqués D et E, soient situés en dehors du triangle ABC, représentons par $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ les trois racines correspondant respectivement aux trois affixes A, B, C ainsi spécifiées, par U et V la somme et le produit des deux autres racines changées de signe, enfin par ρ_0 une constante arbitrairement choisie sous la seule condition que son affixe R soit située à l'intérieur du triangle ABC.

Ayant admis ces définitions qui permettront, en particulier, de mettre encore le polynôme $F(\rho)$ sous la forme déjà considérée tout à l'heure

$$(34) \qquad F(\rho) = f(\rho)(\rho^2 + U\rho + V),$$

supposons que l'on se propose d'étudier les deux fonctions bien déterminées des variables indépendantes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ (*)

$$(35) \qquad x = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \qquad y = \psi(\bar{u}, \bar{v}),$$

définies par les deux équations transcendantes

$$(35^{\text{bis}}) \quad \int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \bar{u}, \qquad \int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = \bar{v},$$

auxquelles on attribue la dénomination de fonctions hyperelliptiques de la *première classe*, et qui, dans la succession naturelle des transcendantes engendrées par l'opération de la quadrature, sont celles qui s'offrent immédiatement après les fonctions elliptiques.

Dans cette pensée, considérant seulement, pour un instant, les intégrales rectilignes relatives aux cinq droites RA, RB, RC, RD, RE, désignons simultanément par $\overline{\omega'}$ l'une quelconque de ces intégrales pour le premier type de quadrature $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, et par $\overline{\omega''}$ l'intégrale correspondant à la même droite pour le second type $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$; et de même, représentons par $\overline{\Omega'}$ une somme de multiples quelconques des périodes pour le premier de ces types, et par $\overline{\Omega''}$ la quantité analogue, c'est-à-dire la somme des mêmes multiples des périodes correspondantes pour le second type en question.

Ces nouvelles définitions étant admises également, si l'on convient, pour plus de clarté, d'écrire dorénavant entre parenthèses les intégrales supposées expressément rectilignes, l'on aura, comme on le sait, pour un même chemin quelconque

(*) Voir à ce sujet, si l'on veut, un Mémoire important de JACOBI inséré au *Journal de Crelle*. (Tome XIII, p. 55.)

allant du point fixe ρ_0 au point variable ρ, les deux égalités connexes (*)

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \overline{\Omega'} + \overline{2\omega'} - \left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \overline{\Omega''} + \overline{2\omega''} - \left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où il suit que les équations envisagées tout à l'heure (35bis) équivaudront à celles-ci

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \left[\overline{\Omega'} + \overline{2\omega'} - \left(\int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)\right] &= \overline{u}, \\ \int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \left[\overline{\Omega''} + \overline{2\omega''} - \left(\int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)\right] &= \overline{v}, \end{aligned}\right.$$

et pourront par conséquent être écrites tout aussi bien, en retranchant la quantité $\overline{2\omega'}$ des deux membres de la première, et de même la quantité $\overline{2\omega''}$ des deux membres de la seconde :

$$(35^{ter}) \quad \left\{\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \overline{u} - \overline{2\omega'}, \\ \int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} &= \overline{v} - \overline{2\omega''}. \end{aligned}\right.$$

Cela étant, si l'on introduit à présent la considération des deux nouvelles fonctions, analogues aux précédentes φ et ψ (35),

$$(36) \qquad x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v),$$

(*) Voir, si l'on veut, Briot et Bouquet, *Traité des Fonctions Elliptiques*, § 113, page 185, *en haut*.

définies cette fois par les deux autres équations transcendantes, qui ne diffèrent des précédentes (35bis) que par le signe de la seconde intégrale des premiers membres et le symbole adopté pour les variables indépendantes, savoir

$$(36^{bis})\quad \int_{\rho_0}^{x} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = u, \qquad \int_{\rho_0}^{x} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} - \int_{\rho_0}^{y} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = v,$$

les périodes de ces fonctions Φ et Ψ étant encore évidemment celles des fonctions φ et ψ (*), les équations qui précèdent (35ter) donneront donc, avec ces nouvelles définitions,

$$\begin{cases} x = \Phi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \\ y = \Psi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \end{cases}$$

égalités dans lesquelles x et y désignent toujours, par hypothèse, respectivement les mêmes valeurs que dans les équations antérieures, et qui, fourniront dès lors, étant rapprochées de celles posées en premier lieu (35), les relations

$$(37)\qquad \begin{cases} \varphi(\overline{u}, \overline{v}) = \Phi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \\ \psi(\overline{u}, \overline{v}) = \Psi(\overline{u} - \overline{2\omega'},\ \overline{v} - \overline{2\omega''}), \end{cases}$$

à l'aide desquelles l'étude des fonctions considérées de prime abord φ et ψ se trouve ainsi ramenée à celle des fonctions Φ et Ψ que l'on vient d'introduire. Or, la propriété fondamentale de celles-ci ressortira, comme on va le voir, de nos théories exposées précédemment, à l'aide de calculs beaucoup plus commodes et plus symétriques.

En effet, appelons $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ deux systèmes de

---

(*) Voir à ce sujet Puiseux, *Recherches sur les Fonctions Algébriques*, § 58, *Journal de Liouville* (Tome XV, pp. 463-465).

valeurs des variables λ, μ, ν astreints à la seule condition de vérifier tous deux, pour un même choix des constantes arbitraires, les deux équations intégrales que nous avons obtenues entre ces variables dans la théorie ci-dessus, soit sous la forme transcendante des deux premières équations (3), soit sous la forme algébrique (5) ou (19); c'est-à-dire que, par hypothèse, nous aurons à la fois, toujours avec le même mode de notation condensée, d'une part

$$(38)\quad \begin{cases} \sum_{\rho_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, & \sum_{\rho_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2, \\ \sum_{\rho_2} \int_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1, & \sum_{\rho_2} \int_{\rho_0}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2, \end{cases}$$

et d'autre part les quatre égalités

$$(38^{bis})\quad \begin{cases} (\gamma Y_1 - \beta Z_1)^2 + (\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + (\beta X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] + U = 0, \\ a^2(\gamma Y_1 - \beta Z_1)^2 + b^2(\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + c^2(\beta X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2) + V = 0, \\ (\gamma Y_2 - \beta Z_2)^2 + (\alpha Z_2 - \gamma X_2)^2 + (\beta X_2 - \alpha Y_2)^2 \\ \qquad - \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right] + U = 0, \\ a^2(\gamma Y_2 - \beta Z_2)^2 + b^2(\alpha Z_2 - \gamma X_2)^2 + c^2(\beta X_2 - \alpha Y_2)^2 \\ \qquad - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2) + V = 0 \end{cases}$$

$X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ étant ce que deviennent respectivement les expressions (65) de la Note III pour les deux systèmes de valeurs considérés des variables λ, μ, ν.

On obtiendra donc, en éliminant par simple soustraction les constantes arbitraires W_1 et W_2 entre les quatre équations transcendantes (38),



$$\left\{\begin{aligned}&\sum_\rho\left(\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}-\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)=0,\\&\sum_\rho\left(\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}-\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose sous forme explicite, en séparant en deux membres :

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\right)+\left(\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}\right)\\&\qquad=\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}},\\&\left(\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}\right)+\left(\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}\right)\\&\qquad=\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}.\end{aligned}\right.$$

Semblablement, en éliminant, à l'aide des procédés classiques, les trois arbitraires α, β, γ entre les quatre équations algébriques (38bis) et la condition (18) posée en introduisant ces constantes, équations qui sont toutes entières et du second degré par rapport à ces mêmes quantités, l'on obtiendra deux nouvelles équations, complètement analogues à celles (31bis) du paragraphe précédent, et que nous représenterons en conséquence par

$$(40)\qquad F_1(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2)=0, \qquad F_2(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2)=0,$$

les symboles F_1 et F_2 désignant de nouveau, par hypothèse, les deux mêmes fonctions, entières par rapport aux six quantités X, Y, Z dont elles dépendent, qui figurent déjà dans lesdites équations (31bis), équations que nous calculerons effectivement tout à l'heure, ainsi que nous l'avons déjà annoncé.

Ces préliminaires étant admis, si l'on convient de faire à présent

$$(41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}=u_1, & \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}-\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}=v_1,\\ \displaystyle\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}=u_2, & \displaystyle\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}-\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}=v_2, \end{cases}$$

auquel cas les équations ci-dessus (39), pourront s'écrire, en renversant dans chacune les deux membres,

$$(42)\quad \int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=u_1+u_2,\qquad \int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}-\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=v_1+v_2,$$

il est clair que l'on aura simultanément, d'après les définitions exprimées par les égalités (36)-(36[bis]),

$$(43)\quad \begin{cases} \lambda_1=\Phi(u_1,v_1), & \lambda_2=\Psi(u_1,v_1),\\ \mu_1=\Phi(u_2,v_2), & \mu_2=\Psi(u_2,v_2),\\ \nu_1=\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2), & \nu_2=\Phi(u_1+u_2,v_1+v_2); \end{cases}$$

et par conséquent, en remettant ces valeurs dans les expressions (65) de la Note III, prises successivement pour l'un et l'autre des deux systèmes de valeurs considérés des variables λ, μ, ν, l'on obtiendra ces expressions :

$$(44)\quad \begin{cases} X_1=\sqrt{\dfrac{[a^2+\Phi(u_1,v_1)]\,[a^2+\Phi(u_2,v_2)]\,[a^2+\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\\ Y_1=\sqrt{\dfrac{[b^2+\Phi(u_1,v_1)]\,[b^2+\Phi(u_2,v_2)]\,[b^2+\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},\\ Z_1=\sqrt{\dfrac{[c^2+\Phi(u_1,v_1)]\,[c^2+\Phi(u_2,v_2)]\,[c^2+\Psi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}, \end{cases}$$

$$(44^{bis})\left\{\begin{aligned} X_2 &= \sqrt{\frac{[a^2+\Psi(u_1,v_1)][a^2+\Psi(u_2,v_2)][a^2+\Phi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\\ Y_2 &= \sqrt{\frac{[b^2+\Psi(u_1,v_1)][b^2+\Psi(u_2,v_2)][b^2+\Phi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},\\ Z_2 &= \sqrt{\frac{[c^2+\Psi(u_1,v_1)][c^2+\Psi(u_2,v_2)][c^2+\Phi(u_1+u_2,v_1+v_2)]}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}.\end{aligned}\right.$$

En supposant donc calculées, de la façon que nous avons dit tout à l'heure, les deux équations représentées par les deux ci-dessus (40), et y remettant maintenant à la place des X, Y, Z les valeurs que nous venons d'écrire, ces deux équations seront alors, comme on voit, deux relations algébriques entre les deux fonctions

$$(45)\qquad \Phi(u_1+u_2,\ v_1+v_2),\qquad \Psi(u_1+u_2,\ v_1+v_2),$$

relatives à la somme des arguments quelconques (u_1, u_2), (v_1, v_2) (*), et les quatre fonctions semblables

$$\Phi(u_1, v_1),\qquad \Phi(u_2, v_2),\qquad \Psi(u_1, v_1),\qquad \Psi(u_2, v_2),$$

relatives à ces arguments eux-mêmes, relations qui détermineront dès lors les deux premières en fonction des quatre autres.

Ce seront par conséquent les *formules d'addition* de nos deux fonctions hyperelliptiques Φ et Ψ, définies par les équations (36) et (36bis).

(*) Les quatre arguments u_1, v_1, u_2, v_2 sont en réalité complètement indépendants les uns des autres. et doivent être considérés dès lors comme entièrement arbitraires, car il est facile de voir qu'il en est bien ainsi des quatre fonctions inverses de celles-là d'après les équations de définition (41), savoir λ_1, λ_2 et μ_1, μ_2. En effet, entre les neuf quantités α, β, γ, λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, les calculs antérieurs établissent seulement les cinq relations distinctes (18) et (38bis), d'où il suit que *quatre* d'entre elles demeurent complètement arbitraires, et rien n'empêche évidemment de prendre pour ces quatre là les quantités λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 : auquel cas les équations précitées (41) montrent alors que u_1 et v_1 d'une part, puis u_2 et v_2 d'autre part, seront elles-mêmes entièrement arbitraires.

Si l'on veut posséder sous forme explicite lesdites formules d'addition, toute la question se trouvera donc réduite désormais, d'abord à calculer effectivement les deux équations figurées dans les raisonnements qui précèdent par les deux équations (40), puis, après substitution à la place des X, Y, Z des valeurs (44) et (44bis), à les résoudre alors par rapport aux deux expressions (45). Nous allons, en conséquence, effectuer ici complètement la première de ces deux opérations, c'est-à-dire l'élimination des trois constantes α, β, γ entre les cinq équations (18) et (38bis); puis nous indiquerons dans quelles conditions se présentera la seconde, c'est-à-dire la résolution des équations ainsi obtenues; et enfin nous vérifierons sur un exemple simple l'exactitude des résultats auxquels nous serons arrivés.

I. A cet effet, nous remarquerons tout d'abord que, dans le groupe d'équations (38bis), l'on pourra remplacer, soit les deux premières équations, soit les deux dernières, par deux autres en présence desquelles l'opération demandée deviendra alors beaucoup plus facile.

En effet, si nous introduisons de nouveau, pour un instant, comme dans le paragraphe précédent, les inconnues auxiliaires $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, ainsi que les constantes H et K définies respectivement par les formules (19bis) et (20bis), en ayant égard en même temps à la signification convenue des indices 1 et 2, il est clair que le système des cinq équations proposées (18) et (38bis) pourra être écrit à l'aide de ces différentes notations :

$$(46)\quad \left\{ \begin{array}{ll} & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \mathcal{X}_1^2 + \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Z}_1^2 = H, & a^2\mathcal{X}_1^2 + b^2\mathcal{Y}_1^2 + c^2\mathcal{Z}_1^2 = K, \\ \mathcal{X}_2^2 + \mathcal{Y}_2^2 + \mathcal{Z}_2^2 = H, & a^2\mathcal{X}_2^2 + b^2\mathcal{Y}_2^2 + c^2\mathcal{Z}_2^2 = K. \end{array} \right.$$

Or, ayant reconnu plus haut, à l'occasion du système (20ter), que les trois équations de gauche de ce système assignaient aux inconnues auxiliaires $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ des valeurs constantes déterminées

l'on aura, par conséquent, dans la question actuelle, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2$; c'est-à-dire les trois équations

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma Y_1 - 6Z_1 = \gamma Y_2 - 6Z_2, & \alpha Z_1 - \gamma X_1 = \alpha Z_2 - \gamma X_2, \\ & 6X_1 - \alpha Y_1 = 6X_2 - \alpha Y_2, \end{array}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma (Y_1 - Y_2) = 6 (Z_1 - Z_2), & \alpha (Z_1 - Z_2) = \gamma (X_1 - X_2), \\ & 6 (X_1 - X_2) = \alpha (Y_1 - Y_2), \end{array}\right.$$

lesquelles, se réduisant manifestement à deux, tiendront lieu, par conséquent, soit de la seconde, soit de la troisième ligne d'équations du système précédent (46).

Substituant donc ces deux équations à celles de la dernière ligne de ce système, et tenant compte en même temps de la première, ainsi que des définitions précitées (19bis) et (20bis) des symboles $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, H, et K, la question proposée sera donc ramenée à éliminer les trois constantes $\alpha, 6, \gamma$ entre les quatre équations, homogènes par rapport à ces quantités,

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} (\gamma Y_1 - 6Z_1)^2 + (\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + (6X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - [(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)6^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2] + H(\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2) = 0, \\ a^2(\gamma Y_1 - 6Z_1)^2 + b^2(\alpha Z_1 - \gamma X_1)^2 + c^2(6X_1 - \alpha Y_1)^2 \\ \qquad - (b^2c^2\alpha^2 + c^2a^26^2 + a^2b^2\gamma^2) + K(\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2) = 0, \\ \dfrac{\alpha}{X_1 - X_2} = \dfrac{6}{Y_1 - Y_2} = \dfrac{\gamma}{Z_1 - Z_2}, \end{array}\right.$$

opération dont le résultat s'obtiendra dès lors évidemment en remplaçant simplement dans les deux premières de ces équations les constantes $\alpha, 6, \gamma$ par les différences $X_1 - X_2$, $Y_1 - Y_2$, $Z_1 - Z_2$, qui leur sont proportionnelles.

Or, cette substitution, supposée introduite dans les trois quantités $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$, donnant pour résultat, quant à la première,

l'expression suivante

$$\mathfrak{X}_1 = \gamma Y_1 - \beta Z_1 = (Z_1 - Z_2)Y_1 - (Y_1 - Y_2)Z_1 = -(Y_1Z_2 - Z_1Y_2),$$

et, par conséquent, pour leurs carrés, les trois valeurs

$$\mathfrak{X}_1^2 = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2, \quad \mathfrak{Y}_1^2 = (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2, \quad \mathfrak{Z}_1^2 = (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2,$$

en remettant dès lors ces expressions à la place des carrés qu'elles représentent dans les deux premières équations (47), puis effectuant la même substitution dans les autres termes de ces équations, l'on obtiendra donc définitivement, pour les équations (40) qu'il s'agissait de calculer, les deux suivantes

$$(48)\left\{\begin{aligned} &(Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + (Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + (X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 \\ &+ \{U - (b^2 + c^2)\}(X_1 - X_2)^2 + \{U - (c^2 + a^2)\}(Y_1 - Y_2)^2 + \{U - (a^2 + b^2)\}(Z_1 - Z_2)^2 = 0, \\ &a^2(Y_1Z_2 - Z_1Y_2)^2 + b^2(Z_1X_2 - X_1Z_2)^2 + c^2(X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 \\ &+ (V - b^2c^2)(X_1 - X_2)^2 + (V - c^2a^2)(Y_1 - Y_2)^2 + (V - a^2b^2)(Z_1 - Z_2)^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

lesquelles représentent ainsi, d'après ce que nous avons dit plus haut, sous une forme concrète très claire et très facile à saisir, les formules d'addition des fonctions hyperelliptiques (36)-(36bis), en entendant que les X, Y, Z y tiennent lieu des expressions (44) et (44bis).

Ces formules étant ainsi obtenues pour deux arguments de chaque sorte, on obtiendra par une simple opération algébrique celles relatives au cas de trois arguments : car ces formules (48) étant deux relations algébriques entre les six quantités

$$\left\{\begin{matrix} \Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), & \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), \\ \Phi(u_1, v_1), \quad \Phi(u_2, v_2), & \Psi(u_1, v_1), \quad \Psi(u_2, v_2), \end{matrix}\right.$$

fourniront, en y changeant u_2 en $u_2 + u_3$ et v_2 en $v_2 + v_3$, deux nouvelles relations algébriques correspondantes entre les six autres quantités

$$\left\{\begin{matrix} \Phi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), & \Psi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), \\ \Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad \Phi(u_3, v_3), & \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad \Psi(u_3, v_3); \end{matrix}\right.$$



et dès lors, en supposant ce nouveau système, ainsi que le précédent, ramenés tous deux à la forme entière, à l'aide des procédés et des formules que nous allons indiquer tout à l'heure, il est bien clair que le résultat de l'élimination entre ces quatre équations, par le moyen des procédés classiques, des deux seules quantités

$$\Phi(u_1 + u_2, v_1 + v_2), \qquad \Psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

sera deux équations algébriques entre les huit quantités

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), \qquad \Psi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3), \\ \Phi(u_1, v_1), \ \Phi(u_2, v_2), \ \Phi(u_3, v_3), \quad \Psi(u_1, v_1), \ \Psi(u_2, v_2), \ \Psi(u_3, v_3), \end{array}\right.$$

c'est-à-dire précisément les formules d'addition des mêmes fonctions Φ et Ψ pour le cas de trois arguments.

Remarquons enfin que l'on déduira encore, si l'on veut, de ces mêmes formules (48), à l'aide d'une opération semblable, les formules analogues pour les fonctions hyperelliptiques habituellement considérées, c'est-à-dire celles définies par les équations (35)-(35bis), que nous avions posées en premier lieu.

En effet, si, en vue d'abréger les écritures, nous convenons, pour un instant, de représenter par le symbole ϖ l'une quelconque des deux fonctions φ et ψ, et semblablement par le symbole Π celle des deux fonctions Φ ou Ψ qui correspondra à celle-là en vertu des égalités (37), ces deux mêmes égalités donneront alors naissance, en les récrivant d'abord avec cette notation, puis en y faisant ensuite $\overline{u} - \overline{2\omega'} = u$ et $\overline{v} - \overline{2\omega''} = v$, aux deux formules de transformation, inverses l'une de l'autre,

$$(48^{\text{bis}}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varpi(\overline{u}, \overline{v}) = \Pi(\overline{u} - \overline{2\omega'}, \overline{v} - \overline{2\omega''}), \\ \Pi(u, v) = \varpi(u + \overline{2\omega'}, v + \overline{2\omega''}). \end{array}\right.$$

Cela posé, $\overline{u}$, $\overline{v}$ d'une part, et u, v d'autre part, étant dans ces deux formules des variables quelconques, établissons à présent, d'une façon générale, entre ces deux systèmes d'arguments les relations

$$\overline{u} = u + \overline{\omega'}, \qquad \overline{v} = v + \overline{\omega''}, \qquad \text{ou} \qquad u = \overline{u} - \overline{\omega'}, \qquad v = \overline{v} - \overline{\omega''},$$

puis spécifions encore par les indices 1 et 2, dans chacun de ces systèmes d'arguments, deux valeurs, complètement arbitraires quant à l'un des systèmes, et satisfaisant par hypothèse aux dites relations que nous venons d'écrire. La considération de semblables valeurs donnant alors, en leur appliquant successivement les deux formules de transformation précédentes (48bis),

$$\left\{\begin{aligned} \varpi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}) &= \varpi\left[(u_1+\overline{\omega'})+(u_2+\overline{\omega'}),\ (v_1+\overline{\omega''})+(v_2+\overline{\omega''})\right] \\ &= \varpi\ (u_1+u_2+\overline{2\omega'},\ v_1+v_2+\overline{2\omega''}) \\ &= \Pi\ (u_1+u_2,\ v_1+v_2), \\ \Pi(u,\ v) &= \varpi(u+\overline{2\omega'},\ v+\overline{2\omega''}) \\ &= \varpi\left[(u+\overline{\omega'})+\overline{\omega'},\ (v+\overline{\omega''})+\overline{\omega''}\right] = \varpi(\overline{u}+\overline{\omega'},\ \overline{v}+\overline{\omega''}), \end{aligned}\right.$$

les formules d'addition (48) qui sont des relations algébriques entre les six quantités (eu égard à la double signification convenue du symbole Π)

$$\Pi(u_1+u_2,\ v_1+v_2),\qquad \Pi(u_1,\ v_1),\qquad \Pi(u_2,\ v_2),$$

existeront donc aussi bien, en la même qualité, entre les six autres quantités, équivalentes à celles-là en vertu des deux dernières égalités que nous venons d'écrire,

$$\varpi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}),\qquad \varpi(\overline{u_1}+\overline{\omega'},\ \overline{v_1}+\overline{\omega''}),\qquad \varpi(\overline{u_2}+\overline{\omega'},\ \overline{v_2}+\overline{\omega''}).$$

Ce qui revient à dire que lesdites formules (48) constitueront en l'état un premier système algébrique dans lequel les valeurs des λ, μ, ν qui entrent dans les expressions des X, Y, Z seront respectivement :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \varphi(\overline{u_1}+\overline{\omega'},\ \overline{v_1}+\overline{\omega''}), & \lambda_2 &= \psi(\overline{u_1}+\overline{\omega'},\ \overline{v_1}+\overline{\omega''}), \\ \mu_1 &= \varphi(\overline{u_2}+\overline{\omega'},\ \overline{v_2}+\overline{\omega''}), & \mu_2 &= \psi(\overline{u_2}+\overline{\omega'},\ \overline{v_2}+\overline{\omega''}), \\ \nu_1 &= \psi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}), & \nu_2 &= \varphi(\overline{u_1}+\overline{u_2},\ \overline{v_1}+\overline{v_2}). \end{aligned}\right.$$

Ce système étant supposé écrit à cette place, faisons-y à présent, en premier lieu, $\overline{u}_2=0$, $\overline{v}_2=0$; nous obtiendrons ainsi un

second système algébrique qui sera encore le même système (48) dans lequel les λ, μ, ν auront alors les valeurs :

$$
\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\lambda_1 = \varphi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), & \lambda_2 = \psi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), \\
\mu_1 = \varphi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), & \mu_2 = \psi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), \\
\nu_1 = \psi(\overline{u_1}, \overline{v_1}), & \nu_2 = \varphi(\overline{u_1}, \overline{v_1}).
\end{array} \right.
$$

Enfin dans le même système spécifié en premier lieu tout à l'heure, introduisons semblablement l'hypothèse $\overline{u_1} = 0$, $\overline{v_1} = 0$; le nouveau système algébrique ainsi produit sera dès lors le système (48) dans lequel les λ, μ, ν tiendront lieu cette fois des troisièmes valeurs :

$$
\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\lambda_1 = \varphi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), & \lambda_2 = \psi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), \\
\mu_1 = \varphi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}). & \mu_2 = \psi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}), \\
\nu_1 = \psi(\overline{u_2}, \overline{v_2}), & \nu_2 = \varphi(\overline{u_2}, \overline{v_2}).
\end{array} \right.
$$

Les trois systèmes que nous venons ainsi de spécifier étant donc encore supposés ramenés à la forme entière que nous allons indiquer dans un instant, si à présent, entre ces six équations algébriques explicitement déterminées, l'on élimine à la fois, à l'aide des procédés classiques, les quatre quantités

$$
\left\{ \begin{array}{ll}
\varphi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), & \psi(\overline{u_1} + \overline{\omega'}, \overline{v_1} + \overline{\omega''}), \\
\varphi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}), & \psi(\overline{u_2} + \overline{\omega'}, \overline{v_2} + \overline{\omega''}),
\end{array} \right.
$$

il appert des tableaux (I), (II), (III) des expressions des λ, μ, ν qui entrent dans la composition de ces trois systèmes, que le résultat de ladite élimination sera bien deux équations algébriques entre les six quantités

$$
(48^{\text{ter}}) \quad \left\{ \begin{array}{llll}
\multicolumn{2}{l}{\varphi(\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v_1} + \overline{v_2}),} & \multicolumn{2}{l}{\psi(\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{v_1} + \overline{v_2}),} \\
\varphi(\overline{u_1}, \overline{v_1}), & \varphi(\overline{u_2}, \overline{v_2}), & \psi(\overline{u_1}, \overline{v_1}), & \psi(\overline{u_2}, \overline{v_2}),
\end{array} \right.
$$

et les deux constantes déterminées et uniques, au signe près (*),

$$\varphi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}), \qquad \psi(\overline{\omega'}, \overline{\omega''}),$$

et représentera par conséquent les formules d'addition demandées des fonctions primitivement considérées φ et ψ.

Ces formules d'ailleurs seront évidemment du même degré par rapport aux inconnues, c'est-à-dire aux deux quantités de la première ligne (48ter) que les formules (48) relatives à nos fonctions Φ et Ψ par rapport aux inconnues correspondantes (45), du moment que ces nouvelles inconnues, ne figurant que dans le seul tableau ci-dessus (I), n'entreront que dans un seul des trois systèmes d'équations entre lesquels aura été effectuée l'élimination d'où seront issues les dites formules (**).

(*) Bien que les deux quantités connexes $\overline{\omega'}$ et $\overline{\omega''}$ représentent par hypothèse, avons-nous dit, respectivement pour chacun des deux types de quadrature qui figurent dans les équations (35bis) ou (36bis), les intégrales rectilignes correspondant simultanément à *l'une quelconque* des quatre droites AB, AC, AD, AE (page 178) les deux fonctions en question ne sont cependant susceptibles que d'une seule détermination en valeur absolue ; car il est bien clair que si l'on envisage successivement deux droites différentes, les déterminations correspondantes des quantités $\overline{\omega'}$ et $\overline{\omega''}$, savoir $\overline{\omega'_1}$. $\overline{\omega''_1}$ et

$$\overline{\omega'_2} = \overline{\omega'_1} + (\overline{\omega'_2} - \overline{\omega'_1}), \qquad \overline{\omega''_2} = \overline{\omega''_1} + (\overline{\omega''_2} - \overline{\omega''_1})$$

ne différeront que par une demi-période du type de quadrature correspondant, (voir la note de la page ci-après 200), et par conséquent l'on aura toujours

$$\varphi(\overline{\omega'_2}, \overline{\omega''_2}) = \pm\varphi(\overline{\omega'_1}, \overline{\omega''_1}), \qquad \psi(\overline{\omega'_2}, \overline{\omega''_2}) = \pm\psi(\overline{\omega'_1}, \overline{\omega''_1}).$$

La même circonstance expliquera encore comment il se fait, dans les formules (37), que les premiers membres ne sont susceptibles que d'une seule détermination, en grandeur et en signe, malgré la présence dans les seconds membres des mêmes quantités à déterminations multiples $\overline{\omega'}$ et $\overline{\omega''}$.

(**) La même conclusion s'imposerait évidemment à l'égard des formules analogues à trois arguments de chaque sorte, soit pour les fonctions Φ et Ψ, soit pour les fonctions φ et ψ, et partant de là, tout aussi bien quant à celles relatives à un nombre n d'arguments, c'est-à-dire telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi(u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\ v_1 + v_2 + \cdots + v_n), \\ \varpi(\overline{u_1} + \overline{u_2} + \cdots + \overline{u_n},\ \overline{v_1} + \overline{v_2} + \cdots + \overline{v_n}), \end{array}\right.$$

que l'on en déduirait de proche en proche, au moyen d'une élimination semblable à celle que nous avons indiquée en premier lieu un peu plus haut (pp. 187-188), à l'occasion des fonctions Φ et Ψ.

8. Il importe donc de faire disparaître des formules primitives (48) les radicaux multiples sous lesquels se trouvent engagées les inconnues (45), afin de connaître quel sera le degré de ce système d'équations, lorsqu'elles auront été ainsi ramenées l'une et l'autre à une forme entière par rapport à chacune de ces inconnues, degré qui sera également, avons-nous dit, celui des formules analogues relatives aux autres fonctions φ et ψ.

A cet effet, développant ces deux équations, en convenant de faire désormais, pour abréger,

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{lll} p' = \mathrm{U} - (b^2 + c^2), & q' = \mathrm{U} - (c^2 + a^2), & r' = \mathrm{U} - (a^2 + b^2), \\ p'' = \mathrm{V} - b^2c^2, & q'' = \mathrm{V} - c^2a^2, & r'' = \mathrm{V} - a^2b^2, \end{array}\right.$$

puis faisant passer tous les termes entiers par rapport aux λ, μ, ν dans les seconds membres, nous mettrons ces équations sous la forme simple

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\mathrm{QR}} + \sqrt{\mathrm{RP}} + \sqrt{\mathrm{PQ}} + p'\sqrt{\mathrm{P}} + q'\sqrt{\mathrm{Q}} + r'\sqrt{\mathrm{R}} = \Omega', \\ a^2\sqrt{\mathrm{QR}} + b^2\sqrt{\mathrm{RP}} + c^2\sqrt{\mathrm{PQ}} + p''\sqrt{\mathrm{P}} + q''\sqrt{\mathrm{Q}} + r''\sqrt{\mathrm{R}} = \Omega'', \end{array}\right.$$

en faisant encore une fois, pour abréger les écritures,

$$(51)\quad \mathrm{P} = \mathrm{X}_1^2\mathrm{X}_2^2, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{Y}_1^2\mathrm{Y}_2^2, \qquad \mathrm{R} = \mathrm{Z}_1^2\mathrm{Z}_2^2,$$

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega' = \tfrac{1}{2}\big[(\mathrm{Y}_1^2\mathrm{Z}_2^2 + \mathrm{Z}_1^2\mathrm{Y}_2^2) + (\mathrm{Z}_1^2\mathrm{X}_2^2 + \mathrm{X}_1^2\mathrm{Z}_2^2) + (\mathrm{X}_1^2\mathrm{Y}_2^2 + \mathrm{Y}_1^2\mathrm{X}_2^2) \\ \qquad + p'(\mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2) + q'(\mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{Y}_2^2) + r'(\mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{Z}_2^2)\big], \\ \Omega'' = \tfrac{1}{2}\big[a^2(\mathrm{Y}_1^2\mathrm{Z}_2^2 + \mathrm{Z}_1^2\mathrm{Y}_2^2) + b^2(\mathrm{Z}_1^2\mathrm{X}_2^2 + \mathrm{X}_1^2\mathrm{Z}_2^2) + c^2(\mathrm{X}_1^2\mathrm{Y}_2^2 + \mathrm{Y}_1^2\mathrm{X}_2^2) \\ \qquad + p''(\mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2) + q''(\mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{Y}_2^2) + r''(\mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{Z}_2^2)\big]. \end{array}\right.$$

Cela fait, observons qu'on ne saurait appliquer ici pour cet objet le procédé que l'on emploie le plus habituellement dans les éléments en vue d'un but semblable, et consistant à éliminer successivement chacun des divers radicaux, en isolant l'un de ces radicaux comme seul terme dans un membre, puis élevant ensuite au carré, car les différents radicaux n'étant pas indépendants dans la question actuelle, quel que soit celui de ces six

radicaux que l'on fasse ainsi disparaître dans un membre, le même radical se reproduira toujours par cette opération dans l'autre membre; et le calcul se sera ainsi compliqué sans avoir fait un pas.

Voici donc, parmi beaucoup d'autres procédés analogues, celui qu'il conviendra d'employer, et qui conduira, croyons-nous, au résultat le plus avantageux, c'est-à-dire au degré le moins élevé pour le système des deux équations que nous voulons transformer.

Nous multiplierons les deux équations en question successivement par $\sqrt{P}, \sqrt{Q}, \sqrt{R}$, ce qui nous donnera les six équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{PQR} + P\sqrt{R} + P\sqrt{Q} + p'P + q'\sqrt{PQ} + r'\sqrt{RP} &= \Omega'.\sqrt{P}, \\ a^2\sqrt{PQR} + b^2P\sqrt{R} + c^2P\sqrt{Q} + p''P + q''\sqrt{PQ} + r''\sqrt{RP} &= \Omega''.\sqrt{P}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} Q\sqrt{R} + \sqrt{PQR} + Q\sqrt{P} + p'\sqrt{PQ} + q'Q + r'\sqrt{QR} &= \Omega'.\sqrt{Q}, \\ a^2Q\sqrt{R} + b^2\sqrt{PQR} + c^2Q\sqrt{P} + p''\sqrt{PQ} + q''Q + r'\sqrt{QR} &= \Omega''.\sqrt{Q}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} R\sqrt{Q} + R\sqrt{P} + \sqrt{PQR} + p'\sqrt{RP} + q'\sqrt{QR} + r'R &= \Omega'.\sqrt{R}, \\ a^2R\sqrt{Q} + b^2R\sqrt{P} + c^2\sqrt{PQR} + p''\sqrt{RP} + q''\sqrt{QR} + r''R &= \Omega''.\sqrt{R}, \end{aligned}\right.$$

équations que nous écrirons, ainsi que les proposées (50) elles-mêmes, en introduisant, pour plus de clarté, les huit variables fictives

$$(53) \quad \left\{\begin{array}{llll} \sqrt{QR}=x, & \sqrt{RP}=y, & \sqrt{PQ}=z, & \sqrt{PQR}=s, \\ \sqrt{P}=u, & \sqrt{Q}=v, & \sqrt{R}=w, & 1=t, \end{array}\right.$$

et ordonnant par rapport à ces variables, sous la forme des huit équations linéaires et homogènes

$$
(54)\quad \left\{
\begin{array}{l}
x + y + z + 0 - \Omega' t + p'u + q'v + r'w = 0, \\
a^2x + b^2y + c^2z + 0 - \Omega'' t + p''u + q''v + r''w = 0, \\
0 + r'y + q'z + s + p'\mathrm{P}t - \Omega' u + \mathrm{P}v + \mathrm{P}w = 0, \\
0 + r''y + q''z + a^2s + p''\mathrm{P}t - \Omega'' u + c^2\mathrm{P}v + b^2\mathrm{P}w = 0, \\
r'x + 0 + p'z + s + q'\mathrm{Q}t + \mathrm{Q}u - \Omega' v + \mathrm{Q}w = 0, \\
r''x + 0 + p''z + b^2s + q''\mathrm{Q}t + c^2\mathrm{Q}u - \Omega'' v + a^2\mathrm{Q}w = 0, \\
q'x + p'y + 0 + s + r'\mathrm{R}t + \mathrm{R}u + \mathrm{R}v - \Omega' w = 0, \\
q''x + p''y + 0 + c^2s + r''\mathrm{R}t + b^2\mathrm{R}u + a^2\mathrm{R}v - \Omega'' w = 0,
\end{array}
\right.
$$

entre lesquelles l'élimination des huit variables (53) fournira tout d'abord la première équation entière :

$$
(55)\quad \left|
\begin{array}{cccccccc}
1, & 1, & 1, & 0, & -\Omega', & p', & q', & r' \\
a^2, & b^2, & c^2, & 0, & -\Omega'', & p'', & q'', & r'' \\
0, & r', & q', & 1, & p'\mathrm{P}, & -\Omega', & \mathrm{P}, & \mathrm{P} \\
0, & r'', & q'', & a^2, & p''\mathrm{P}, & -\Omega'', & c^2\mathrm{P}, & b^2\mathrm{P} \\
r', & 0, & p', & 1, & q'\mathrm{Q}, & \mathrm{Q}, & -\Omega', & \mathrm{Q} \\
r'', & 0, & p'', & b^2, & q''\mathrm{Q}, & c^2\mathrm{Q}, & -\Omega'', & a^2\mathrm{Q} \\
q', & p', & 0, & 1, & r'\mathrm{R}, & \mathrm{R}, & \mathrm{R}, & -\Omega' \\
q'', & p'', & 0, & c^2, & r''\mathrm{R}, & b^2\mathrm{R}, & a^2\mathrm{R}, & -\Omega'
\end{array}
\right| = 0.
$$

Ce premier résultat étant acquis, et possédant ainsi déjà les huit équations (54), il suffira évidemment d'en avoir une autre semblable, également déduite des proposées, pour que l'élimination des mêmes variables entre ladite équation et sept quelconques empruntées au même système (54), nous donne de la même façon la seconde équation entière demandée.

Pour obtenir une telle équation, éliminons d'abord le premier radical $\sqrt{\mathrm{QR}}$ entre les deux équations proposées (50), ce qui donnera pour résultat

$$
(55^{\text{bis}})\qquad l^2\sqrt{\mathrm{RP}} - n^2\sqrt{\mathrm{PQ}} + p_1\sqrt{\mathrm{P}} + q_1\sqrt{\mathrm{Q}} + r_1\sqrt{\mathrm{R}} = \Omega_1,
$$

en employant de nouveau les notations des Chapitres II et VI, savoir

$$(56) \qquad l^2 = a^2 - b^2, \qquad m^2 = b^2 - c^2, \qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

et faisant, en outre, en ayant égard aux définitions (49) et (52),

$$(57) \qquad p_1 = a^2 p' - p'', \qquad q_1 = a^2 q' - q'', \qquad r_1 = a^2 r' - r'',$$

$$(58) \left\{ \begin{aligned} \Omega_1 = a^2\Omega' - \Omega'' = \tfrac{1}{2}\big[& l^2(Z_1^2 X_2^2 + X_1^2 Z_2^2) - n^2(X_1^2 Y_2^2 + Y_1^2 X_2^2) \\ & + p_1(X_1^2 + X_2^2) + q_1(Y_1^2 + Y_2^2) + r_1(Z_1^2 + Z_2^2)\big], \end{aligned} \right.$$

puis, cela fait, multiplions cette fois l'équation précédente (55bis) par le nouveau radical $\sqrt{QR}$, nous formerons ainsi l'équation

$$l^2 R\sqrt{PQ} - n^2 Q\sqrt{RP} + p_1\sqrt{PQR} + q_1 Q\sqrt{R} + r_1 R\sqrt{Q} = \Omega_1 . \sqrt{QR},$$

c'est-à-dire, avec nos mêmes variables (53), celle-ci

$$(59) \qquad -\Omega_1 x - n^2 Q y + l^2 R z + p_1 s + 0 + 0 + r_1 R v + q_1 Q w = 0,$$

laquelle, remplissant les conditions voulues, suffirait parfaitement à elle seule pour l'objet que nous avons dit tout à l'heure.

Toutefois, le résultat de la nouvelle élimination demandée, étant obtenu par le moyen de cette seule équation, ne présenterait plus la symétrie qui se trouve réalisée par l'équation déjà acquise (55), en raison de ce fait que, dans son calcul, c'est-à-dire relativement à l'ensemble des huit équations précédentes (54), les deux équations données (50) étaient intervenues sur un pied de complète égalité, condition qui ne se trouverait plus remplie actuellement si l'on se bornait, en vue de l'obtention d'un second déterminant analogue à (55), à substituer purement et simplement cette dernière équation (59) à l'une quelconque des précédentes (54).

Voici donc comment il faudra opérer, si l'on veut obtenir encore, pour le résultat de cette seconde opération, la même symétrie que présente le résultat trouvé pour la première (55).

Nous répéterons tout d'abord sur les équations proposées (50),



à l'égard de chacun des deux radicaux suivants $\sqrt{RP}$ et $\sqrt{PQ}$, les deux mêmes opérations que nous avons effectuées tout à l'heure à l'égard du radical $\sqrt{QR}$, c'est-à-dire qu'en les éliminant à tour de rôle entre ces deux équations, nous formerons successivement les deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} -l^2\sqrt{QR} + m^2\sqrt{PQ} + p_2\sqrt{P} + q_2\sqrt{Q} + r_2\sqrt{R} &= \Omega_2, \\ n^2\sqrt{QR} - m^2\sqrt{RP} + p_3\sqrt{P} + q_3\sqrt{Q} + r_3\sqrt{R} &= \Omega_3, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles nous faisons encore, pour abréger,

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} p_2 &= b^2p' - p'', & q_2 &= b^2q' - q'', & r_2 &= b^2r' - r'', \\ p_3 &= c^2p' - p'', & q_3 &= c^2q' - q'', & r_3 &= c^2r' - r'', \end{aligned}\right.$$

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_2 = b^2\Omega' \quad \Omega'' &= \tfrac{1}{2}\Big[m^2(X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2) - l^2(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) \\ &\quad + p_2(X_1^2 + X_2^2) + q_2(Y_1^2 + Y_2^2 + r_2(Z_1^2 + Z_2^2)\Big], \\ \Omega_3 = c^2\Omega' - \Omega'' &= \tfrac{1}{2}\Big[n^2(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) - m^2(Z_1^2X_2^2 + X_1^2Z_2^2) \\ &\quad + p_3(X_1^2 + X_2^2) + q_3(Y_1^2 + Y_2^2) + r_3(Z_1^2 + Z_2^2)\Big]\ ; \end{aligned}\right.$$

puis, cela fait, nous multiplierons les deux équations ainsi formées respectivement par les mêmes radicaux $\sqrt{RP}$ et $\sqrt{PQ}$, ce qui nous donnera de nouveau les deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} -l^2R\sqrt{PQ} + m^2P\sqrt{QR} + p_2P\sqrt{R} + q_2\sqrt{PQR} + r_2R\sqrt{P} &= \Omega_2.\sqrt{RP}, \\ n^2Q\sqrt{RP} - m^2P\sqrt{QR} + p_3P\sqrt{Q} + q_3Q\sqrt{P} + r_3\sqrt{PQR} &= \Omega_3\sqrt{PQ}, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, encore avec nos variables (53), celles-ci

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} m^2Px - \Omega_2y - l^2Rz + q_2s + 0 + r_2Ru + 0 + p_2Pw &= 0, \\ -m^2Px + n^2Qy - \Omega_3z + r_3s + 0 + q_3Qu + p_3Pv + 0 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Dès lors, l'équation que nous adopterons, d'une part, comme équation nouvelle à joindre ainsi aux huit précédemment acquises (54), sera celle obtenue par l'addition des trois ainsi formées (59)

et (62), c'est-à-dire la suivante

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} & -\Omega_1 x - \Omega_2 y - \Omega_3 z + ks + 0 \\ & + (q_3 Q + r_2 R)u + (r_1 R + p_3 P)v + (p_2 P + q_1 Q)w = 0, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle nous représentons encore par k le coefficient constant dont la valeur est, en tenant compte des définitions précédentes (57), (60), et (49),

$$\begin{aligned} k = p_1 + q_2 + r_3 &= a^2 p' + b^2 q' + c^2 r' - (p'' + q'' + r'') \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)U - 3V + (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2). \end{aligned}$$

D'autre part, en vue de maintenir, comme nous venons de le dire, l'égalité de traitement entre les deux équations (50) ou les deux premières (54), supposant que nous ayons remplacé la première par l'équation nouvelle qui précède, nous considérerons alors, au lieu et place de la seconde, celle obtenue en multipliant la première par la somme $a^2 + b^2 + c^2$ et retranchant la seconde, c'est-à-dire la suivante

$$(64)\quad (b^2+c^2)x + (c^2+a^2)y + (a^2+b^2)z + 0 - \Omega t + pu + qv + rw = 0,$$

en faisant de nouveau, par analogie avec les notations précédentes,

$$(65)\quad p = (a^2+b^2+c^2)p' - p'', \quad q = (a^2+b^2+c^2)q' - q'', \quad r = (a^2+b^2+c^2)r' - r'',$$

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= (a^2 + b^2 + c^2)\Omega' - \Omega'' \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(b^2+c^2)(Y_1^2Z_2^2 + Z_1^2Y_2^2) + (c^2+a^2)(Z_1^2X_2^2 + X_1^2Z_2^2) + (a^2+b^2)(X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2) \\ &\qquad + p(X_1^2 + X_2^2) + q(Y_1^2 + Y_2^2) + r(Z_1^2 + Z_2^2)\big]. \end{aligned} \right.$$

Et dès lors, substituant dans le système (54) les deux dernières équations ainsi formées (63) et (64) aux deux premières équations, il est clair que la seconde équation cherchée sera représentée par le nouveau déterminant qui réalisera bien cette fois les mêmes conditions de symétrie que le premier, savoir :

$$(67)\qquad \begin{vmatrix} -\Omega_1, & -\Omega_2, & -\Omega_3, & k, & 0, & q_3Q+r_2R, & r_1R+p_3P, & p_2P+q_1Q \\ b^2+c^2, & c^2+a^2, & a^2+b^2, & 0, & -\Omega, & p, & q, & r \\ 0, & r', & q', & 1, & p'P, & -\Omega', & P, & P \\ 0, & r'', & q'', & a^2, & p''P, & -\Omega'', & c^2P, & b^2P \\ r', & 0, & p', & 1', & q'Q, & Q, & -\Omega', & Q \\ r'', & 0, & p'', & b^2, & q''Q, & c^2Q, & -\Omega'', & a^2Q \\ q', & p', & 0, & 1, & r'R, & R, & R, & -\Omega' \\ q'', & p'', & 0, & c^2, & r''R, & b^2R, & a^2R, & -\Omega'' \end{vmatrix} = 0.$$

Le système de ces deux équations (55) et (67), complètement équivalent à celui des deux équations primitives (50) ou (48), représente donc sous la forme entière, les formules d'addition des fonctions Φ et Ψ définies par les équations (36)-(36bis).

Rien n'est plus aisé, en présence de ces résultats, que d'évaluer maintenant le degré de ces deux dernières formules, soit par rapport à l'ensemble des deux inconnues (45), soit par rapport à chacune d'elles séparément.

Pour la première, en effet, tout d'abord, les éléments de ce déterminant étant exclusivement des constantes dans les quatre premières colonnes, et dans les quatre autres au plus des fonctions linéaires de P, Q, R, et des Ω, ses différents termes seront donc au plus du quatrième degré par rapport aux mêmes quantités. Or, d'après les valeurs (44) et (44bis), les X^2, Y^2, Z^2 étant des fonctions linéaires des ν, c'est-à-dire de l'une ou de l'autre des inconnues en question, et par suite, en vertu des définitions (52), (58), (61), (66), et (51), tous les Ω, de même que P, Q, R, étant du second degré par rapport à ces deux inconnues à la fois, ou du premier par rapport à chacune d'elles séparément, il est manifeste que cette première équation (55) sera dès lors du quatrième degré par rapport à chaque inconnue séparément, ou du huitième degré par rapport à l'ensemble de ces deux inconnues.

Semblablement, pour le second déterminant (67), partant de

ce fait, qu'en mettant à part la première ligne, dans laquelle tous les éléments cette fois (sauf les 4ᵉ et 5ᵉ) sont linéaires par rapport à P, Q, R, et aux Ω, les différents éléments sont encore exclusivement des constantes pour les quatre premières colonnes, et au plus des fonctions linéaires des mêmes quantités pour les quatre autres ; il sera dès lors visible également que tous les déterminants mineurs du premier ordre de ce déterminant, correspondant à la suppression des différents éléments de la première ligne, seront encore, de même que le déterminant précédent (55), du quatrième degré par rapport aux susdites quantités, et que par conséquent le déterminant considéré lui-même sera, par rapport à elles, du cinquième degré, c'est-à-dire du même degré relativement à chacune des deux inconnues séparément, ou du dixième degré par rapport à leur ensemble.

C. Comme exemple d'emploi des formules (48), et en même temps à titre de vérification de ces formules, nous allons examiner en terminant le *criterium* suivant :

« Partant de ce fait, qu'en vertu même des définitions (36)
» et (36bis), l'égalité $x = y$, ou $\Phi(u, v) = \Psi(u, v)$ caractérisera
» les valeurs des variables indépendantes u et v du type $u = \overline{\Omega'}$,
» $v = \overline{\Omega''}$, c'est-à-dire celles qui seront respectivement les mêmes
» multiples exacts des périodes de chacun des deux types d'inté-
» grales qui figurent dans ces équations de définition (36bis) (*), il
» suit de là que si l'on pose, avec le mode de notation dont nous
» sommes convenus (p. 178, *au bas*),

(*) En effet, les valeurs initiales ainsi que les valeurs finales de la variable d'intégration étant supposées respectivement les mêmes pour les quatre intégrales qui entrent dans ces définitions (36bis), il est bien évident que, dans chaque équation séparément, les valeurs des deux intégrales qui y figurent ne pourront différer que par un multiple exact (ou une somme de multiples) des périodes du type de quadrature correspondant, lequel multiple (ou somme de multiples) sera forcément le même pour les deux équations, du moment que le chemin décrit par la variable considérée (x ou y) est le même par hypothèse dans ces deux équations.

$$(68)\left\{\begin{array}{lll} A'=\left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & B'=\left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & C'=\left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ A''=\left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & B''=\left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), & C''=\left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \end{array}\right.$$

» les six quantités 2A′, 2A″; 2B′, 2B″; 2C′, 2C″ rentrant alors
» deux à deux dans la catégorie que nous venons de dire (*), les
» formules en question (48) ou (50), en y faisant successivement

» d'abord $\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_2 = A', \\ v_1 = v_2 = A'', \end{array}\right.$ puis $\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_2 = B', \\ v_1 = v_2 = B'', \end{array}\right.$ puis enfin $\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_2 = C', \\ v_1 = v_2 = C'', \end{array}\right.$

(*) En effet, si l'on désigne, comme plus haut, par A, B, C, D, E les cinq points du plan qui sont les affixes des cinq racines de l'équation $F(\rho) = 0$ (racines dont une au moins est toujours réelle, cette équation étant de degré impair), d'une part, les quatre périodes de chacun des deux types d'intégrales considérés seront, si l'on veut, les doubles des intégrales rectilignes correspondantes prises suivant les quatre droites AB, AC, AD, AE. (Puiseux, *Recherches sur les Fonctions Algébriques*, § 58, *Journal de Liouville*, t. XV, 1850, pp. 463-465).

D'autre part, d'après la manière dont nous avons choisi les trois points marqués A, B, C (page 177), le triangle ABC ne renfermant dans son intérieur aucun point critique, et pouvant par suite être réduit, par une déformation continue, à un point unique sans franchir aucun point critique, chacune des deux intégrales $\int\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ et $\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$ prises le long du contour de ce triangle ABC est nulle (Ibid., § 11, p. 374, *au bas*), d'où il suit que l'on aura, avec les définitions (68), les égalités

$$\left\{\begin{array}{l} A'+B'+C' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)+\left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)+\left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)=0, \\ A''+B''+C'' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)+\left(\int_{-c^2}^{-a^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)+\left(\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right)=0, \end{array}\right.$$

et l'on en pourra tirer, par conséquent, les valeurs :

$$2A' = -2B' - 2C', \qquad 2A'' = -2B'' - 2C''.$$

Or, les quantités 2C′, 2C″ d'une part, et −2B′, −2B″ d'autre part, représentant, d'après les définitions précitées (68) et le mode de notation convenu, les intégrales rectilignes prises respectivement suivant les deux droites AB et AC, pourront, ainsi que nous l'avons dit en premier lieu dans cette note, être prises pour périodes des deux types d'intégrales envisagés, et les deux dernières égalités que nous venons d'écrire montreront alors que les quantités 2A′, 2A″ se composent des mêmes multiples de ces périodes : ce qui justifie dès lors le fait énoncé ci-dessus.

» devront dès lors, si elles sont exactes, faire ressortir les trois
» égalités

(69) $$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(2A', 2A'') = \Psi(2A', 2A''), & \Phi(2B', 2B'') = \Psi(2B', 2B''), \\ & \Phi(2C', 2C'') = \Psi(2C', 2C''). \end{array}\right.$$

Pour voir s'il en est ainsi, faisant donc, en premier lieu,

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_2 = A' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ v_1 = v_2 = A'' = \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \end{array}\right. (*)$$

il résultera des définitions (41), (42), et (43) que l'on aura par conséquent, dans la question actuelle

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = \mu_1 = \Phi(A', A'') = -c^2, & \lambda_2 = \mu_2 = \Psi(A', A'') = -b^2, \\ \nu_1 = \Psi(2A', 2A''), & \nu_2 = \Phi(2A', 2A''), \end{array}$$

(*) En effet, comme dans la note précédente, d'après l'hypothèse admise sur le choix de la constante ρ_0 (page 177, *au bas*), le triangle RBC ne pouvant renfermer non plus dans son intérieur aucun point critique, l'on aura assurément, pour la même raison que tout à l'heure, les deux égalités

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-c^2}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = 0, \\ \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) + \left(\int_{-c^2}^{\rho_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = 0, \end{array}\right.$$

d'où l'on tirera semblablement, en séparant en deux membres, et renversant les limites de l'une des intégrales dans chaque équation :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right), \\ \left(\int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) = \left(\int_{\rho_0}^{-c^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right) - \left(\int_{\rho_0}^{-b^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}\right). \end{array}\right.$$

et le calcul consistera par conséquent à s'assurer qu'en faisant $\lambda_1 = \mu_1 = -c^2$, $\lambda_2 = \mu_2 = -b^2$, les formules en question (30) ou (48) donneront bien la condition $\nu_1 = \nu_2$.

Or, pour ces mêmes valeurs de λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, les expressions (44), (44bis), et (31) devenant

$$(70)\quad \begin{cases} X_1 = \sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{a^2-b^2}(a^2+\nu_1)}, & Y_1 = \sqrt{\dfrac{b^2-c^2}{b^2-a^2}(a^2+\nu_1)}, \quad Z_1 = 0 \\ X_2 = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}(a^2+\nu_2)}, & Y_2 = 0, \quad Z_2 = \sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}(a^2+\nu_2)} \end{cases}$$

$$(71)\quad P = X_1^2 X_2^2 = (a^2+\nu_1)(a^2+\nu_2), \quad Q = Y_1^2 Y_2^2 = 0, \quad R = Z_1^2 Z_2^2 = 0,$$

la seconde équation du système proposé, en le prenant sous la forme (50), se réduira donc, dans le cas actuel, simplement à

$$(72)\qquad p''\sqrt{(a^2+\nu_1)(a^2+\nu_2)} = \Omega'',$$

Ω'' étant alors, d'après la définition (52), et en vertu des valeurs qui précèdent, l'expression

$$\Omega'' = \frac{1}{2}\Big[a^2\frac{m^2}{-l^2}(b^2+\nu_1)\cdot\frac{-m^2}{n^2}(c^2+\nu_2) + b^2\frac{-n^2}{l^2}(a^2+\nu_1)\cdot\frac{-m^2}{n^2}(c^2+\nu_2)$$
$$+ c^2\frac{m^2}{-l^2}(b^2+\nu_1)\cdot\frac{l^2}{-n^2}(a^2+\nu_2) + p''\Big\{\frac{-n^2}{l^2}(a^2+\nu_1) + \frac{l^2}{-n^2}(a^2+\nu_2)\Big\}$$
$$+ q''\frac{m^2}{-l^2}(b^2+\nu_1) + r''\frac{-m^2}{n^2}(c^2+\nu_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{2n^2l^2}\Big[a^2m^4(b^2+\nu_1)(c^2+\nu_2) + b^2n^2m^2(a^2+\nu_1)(c^2+\nu_2) + c^2m^2l^2(b^2+\nu_1)(a^2+\nu_2)$$
$$- p''\{n^4(a^2+\nu_1) + l^4(a^2+\nu_2)\} - q''m^2n^2(b^2+\nu_1) - r''l^2m^2(c^2+\nu_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{2n^2l^2}\Big[\text{[illegible]}\Big].$$

valeur que nous écrirons dès lors

$$\Omega'' = \frac{1}{2n^2l^2}\left(\mathcal{A}\nu_1\nu_2 + \mathcal{B}\nu_1 + \mathcal{C}\nu_2 + \mathcal{D}\right), \tag{73}$$

en y faisant,

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= a^2m^4 + b^2m^2n^2 + c^2l^2m^2,\\
\mathcal{B} &= a^2m^4.c^2 + b^2m^2n^2.c^2 + c^2l^2m^2.a^2 - (p''n^4 + q''m^2n^2),\\
\mathcal{C} &= a^2m^4.b^2 + b^2m^2n^2.a^2 + c^2l^2m^2.b^2 - (p''l^4 + r''l^2m^2),\\
\mathcal{D} &= a^2m^4.b^2c^2 + b^2m^2n^2\, c^2a^2 + c^2l^2m^2.a^2b^2 - p''(n^4 + l^4)\,a^2 - m^2\,(q''n^2b^2 + r''l^2c^2).
\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on tient compte des définitions (56) qui donnent

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0, \qquad a^2m^2 + b^2n^2 + c^2l^2 = 0, \tag{74}$$

ainsi que de celles (49), l'on trouvera sans peine pour la valeur des trois premiers de ces coefficients :

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{A} &= m^2\,(a^2m^2 + b^2n^2 + c^2l^2) = 0,\\
\mathcal{B} &= m^2\left[(m^2 + l^2)\,c^2a^2 + n^2b^2c^2 - q''n^2\right] - p''n^4\\
&= m^2\left[- n^2.c^2a^2 + n^2b^2c^2 - (\mathrm{V} - c^2a^2)\,n^2\right] - p''n^4\\
&= - m^2n^2(\mathrm{V} - b^2c^2) - p''n^4 = - m^2n^2.p'' - p''n^4 = - n^2(m^2 + n^2)p'' = n^2l^2.p'',\\
\mathcal{C} &= m^2\left[(m^2 + n^2)\,a^2b^2 + l^2b^2c^2 - r''l^2\right] - p''l^4\\
&= m^2\left[- l^2a^2b^2 + l^2b^2c^2 - (\mathrm{V} - a^2b^2)\,l^2\right] - p''l^4\\
&= - m^2l^2\,(\mathrm{V} - b^2c^2) - p''l^4 = - m^2l^2.p'' - p''l^4 = - l^2(m^2 + l^2).p'' = l^2n^2.p''.
\end{aligned}\right. \tag{75}$$

Semblablement, pour le dernier coefficient $\mathcal{D}$, remarquant que les mêmes définitions (56) et (49) donnent ensemble, eu égard aux relations ci-dessus (74), l'égalité

$$\begin{aligned}
&a^2m^2p'' + b^2n^2q'' + c^2l^2r''\\
&= a^2m^2\,(\mathrm{V} - b^2c^2) + b^2n^2\,(\mathrm{V} - c^2a^2) + c^2l^2\,(\mathrm{V} - a^2b^2)\\
&= (a^2m^2 + b^2n^2 + c^2l^2)\,\mathrm{V} - (m^2 + l^2 + n^2)\,a^2b^2c^2 = 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$b^2n^2q'' + c^2l^2r'' = -a^2m^2p'',$$

l'on trouvera donc aussi aisément, pour la valeur de ce coefficient $\mathfrak{D}$,

$$\mathfrak{D} = m^2(m^2 + n^2 + l^2)\,a^2b^2c^2 - p''(n^4 + l^4)\,a^2 + m^2.a^2m^2p''$$
$$= \left[-(n^4+l^4)+m^4\right].a^2p'' = \left[-n^4 - l^4 + (n^2+l^2)^2\right]a^2p'' = 2n^2l^2.a^2p''.$$

Cette dernière valeur étant jointe aux précédentes (75), l'on obtiendra donc, pour l'expression (73), celle-ci

$$\Omega'' = \frac{1}{2n^2l^2}(n^2l^2p''.\nu_1 + l^2n^2p''.\nu_2 + 2n^2l^2.a^2p'') = \tfrac{1}{2}p''(\nu_1 + \nu_2 + 2a^2);$$

et dès lors, en reportant cette valeur au second membre de l'équation ci-dessus (72), celle-ci deviendra, en la multipliant alors par le facteur constant $\frac{2}{p''}$,

$$2\sqrt{(a^2 + \nu_1)(a^2 + \nu_2)} = \nu_1 + \nu_2 + 2a^2,$$

ou, en élevant au carré et développant,

$$4\left[a^4 + (\nu_1 + \nu_2)a^2 + \nu_1\nu_2\right] = (\nu_1 + \nu_2)^2 + 4(\nu_1+\nu_2)\,a^2 + 4a^4,$$

et enfin, en réduisant,

$$4\nu_1\nu_2 = (\nu_1 + \nu_2)^2 \qquad \text{ou} \qquad (\nu_1 - \nu_2)^2 = 0,$$

et l'on trouve bien ainsi, comme on devait la rencontrer, la condition $\nu_1 = \nu_2$, c'est-à-dire la première des conditions imposées *a priori* (69), les deux suivantes devant ressortir évidemment du même calcul par la seule permutation des trois constantes a^2, b^2, c^2 : ce qui justifie pleinement l'exactitude de la théorie et des diverses formules établies dans ce second paragraphe.

III

Une autre vérification péremptoire, plus élémentaire sinon plus simple, consistera également, si l'on veut, à s'assurer qu'avec une variable de moins, on arrivera par cette voie précisément aux formules connues d'addition des fonctions elliptiques.

Nous croyons devoir indiquer encore le développement de ce dernier calcul, qui constituera dès lors une démonstration nouvelle de ces formules déduite exclusivement des théories exposées dans la Note III.

Adoptant comme point de départ, à la place des six équations (1) et (2), ou (4) et (5), de ladite Note, représentant celles (20) du Chapitre III, les trois suivantes

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} &P\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2 = 1, \\ &P\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 + Q\left(\frac{dv}{d\mu}\right)^2 = 1, \end{aligned}\right. \qquad P\frac{du}{d\lambda}\frac{dv}{d\lambda} + Q\frac{du}{d\mu}\frac{dv}{d\mu} = 0,$$

dans lesquelles, en faisant

$$(77)\qquad \varphi(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho),$$

P et Q désigneront alors simplement les expressions

$$(78)\qquad P = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \mu}, \qquad Q = \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda},$$

puis, nous proposant encore comme but la recherche de la solution la plus générale de ce système (76), et reprenant à cet effet exactement la même série de considérations, que pour le problème plus général traité dans la Note III, nous ferons encore dépendre cette recherche de la solution la plus générale de l'une des équations de gauche du dit système (76), qui pourra être

écrite, eu égard aux définitions précédentes de P et Q, en introduisant encore une indéterminée U,

$$\varphi(\lambda)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2-(\lambda+U)-\left[\varphi(\mu)\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2-(\mu+U)\right]=0,$$

et qui, étant vérifiée par conséquent en faisant à la fois

$$\varphi(\lambda)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2-(\lambda+U)=0, \qquad \varphi(\mu)\left(\frac{du}{d\mu}\right)^2-(\mu+U)=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(79) \qquad \frac{du}{d\lambda}=\sqrt{\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}}, \qquad \frac{du}{d\mu}=\sqrt{\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}},$$

admettra, par conséquent, d'après le procédé de Jacobi, pour intégrale complète, l'équation

$$(79^{bis}) \qquad u=\int\sqrt{\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}}\,d\lambda+\int\sqrt{\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}}\,d\mu+V;$$

d'où il suit que l'intégrale générale de la même équation (76) s'obtiendra en faisant $V=\psi(U)$, et éliminant l'arbitraire U entre la précédente et celle que l'on en déduira, dans cette hypothèse, par la différentiation en U, savoir

$$(80) \qquad \int\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda+U)}}+\int\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(\mu+U)}}=-2\psi'(U).$$

Cela posé, l'équation de Lamé relative à la même inconnue u, laquelle est unique dans le cas actuel de deux variables indépendantes λ et μ seulement, savoir

$$2(\lambda-\mu)\frac{d^2u}{d\lambda d\mu}+\frac{du}{d\lambda}-\frac{du}{d\mu}=0,$$

équation que l'on démontrerait, sans peine, de la même façon

que pour le cas de trois variables indépendantes, être une conséquence différentielle des trois équations du premier ordre proposées (76), étant récrite avec les notations admises précédemment, fournira semblablement les deux équations

$$2(\lambda-\mu)\frac{dM}{d\lambda}+\Lambda-M=0, \qquad 2(\lambda-\mu)\frac{d\Lambda}{d\mu}+\Lambda-M=0,$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$(81) \qquad \frac{d.\Lambda^2}{d\mu}=\frac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda}, \qquad \frac{d.M^2}{d\lambda}=\frac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu}.$$

dans lesquelles Λ et M représentent par hypothèse les valeurs ci-dessus (79), et où l'on a, par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} &\Lambda^2=\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}, \qquad && M^2=\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}, \\ &\frac{d.\Lambda^2}{d\mu}=\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{dU}{d\mu}, \qquad && \frac{d.M^2}{d\lambda}=\frac{1}{\varphi(\mu)}\frac{dU}{d\lambda}. \end{aligned}\right.$$

La comparaison de ces dernières valeurs avec les précédentes (81) conduira donc aux deux équations

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{dU}{d\mu}=\frac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda}, \qquad \frac{1}{\varphi(\mu)}\frac{dU}{d\lambda}=\frac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu},$$

c'est-à-dire aux deux expressions

$$\frac{dU}{d\lambda}=\varphi(\mu)\frac{M(M-\Lambda)}{\lambda-\mu}, \qquad \frac{dU}{d\mu}=\varphi(\lambda)\frac{\Lambda(\Lambda-M)}{\mu-\lambda},$$

et par suite à l'équation différentielle totale qui déterminera U

$$dU=-\frac{\Lambda-M}{\lambda-\mu}\left(\varphi(\mu)M.d\lambda+\varphi(\lambda)\Lambda.d\mu\right),$$

c'est-à-dire, explicitement, eu égard aux valeurs (79) de A et M,

$$dU = \frac{-1}{\lambda-\mu}\left(\sqrt{\frac{\lambda+U}{\varphi(\lambda)}}-\sqrt{\frac{\mu+U}{\varphi(\mu)}}\right)\left(\sqrt{\varphi(\mu)(\mu+U)}.d\lambda+\sqrt{\varphi(\lambda)(\lambda+U)}.d\mu\right),$$

équation dont on démontrera sans peine, à l'aide des mêmes procédés, que l'intégrale générale peut être présentée sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(81^{bis})\qquad U = (\alpha X + 6Y)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2 6^2) - (\alpha^2 + 6^2)(\lambda + \mu),$$

ou bien

$$(82)\qquad -U(\alpha^2 + 6^2) = (6X - \alpha Y)^2 - (b^2\alpha^2 + a^2 6^2),$$

α et 6 étant deux constantes supposées liées par la relation

$$(82^{bis})\qquad \alpha^2 + 6^2 = 1,$$

et X et Y désignant cette fois, pour abréger, les expressions

$$(83)\qquad X = \sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{a^2-b^2}},\qquad Y = \sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{b^2-a^2}}.$$

Partant de là, et attribuant dorénavant à la fonction U la valeur constante $U = c^2$, auquel cas les deux variables λ et μ seront liées entre elles, au lieu des deux équations (80) et (82), par celles-ci qui seront dès lors équivalentes, l'une sous forme transcendante, l'autre sous forme algébrique, savoir

$$(84)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)(c^2+\lambda)}}+\int\frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)(c^2+\mu)}} = \text{const.},\\ (6X-\alpha Y)^2-(b^2\alpha^2+a^2 6^2)+c^2(\alpha^2+6^2)=0; \end{array}\right.$$

puis faisant encore, comme dans les deux paragraphes précédents,

$$(84^{bis})\qquad f(\rho) = (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho) = \varphi(\rho)(c^2+\rho),$$

et introduisant enfin de nouveau, en vue de profiter des résultats

de calculs antérieurs, les notations (56) et les relations (74) qui en découlent, notations qui permettront d'écrire les deux équations précédentes (84) sous la forme

$$(85)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{\rho_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = 0, \\ (6X - \alpha Y)^2 - m^2\alpha^2 + n^2 6^2 = 0, \end{cases}$$

en introduisant dans la première, comme constante d'intégration, la limite inférieure ρ_0 des deux intégrales ; cela étant fait, disons-nous, nous considérerons deux systèmes de valeurs de λ et μ satisfaisant simultanément, pour les mêmes valeurs des arbitraires d'intégration α, 6, ou ρ_0, à l'une et à l'autre des deux équations équivalentes que nous venons d'écrire, et n'étant d'ailleurs astreints qu'à cette seule et unique condition, systèmes que nous dénoterons encore, ainsi que toutes les quantités qui s'y rapporteront, par les indices 1 et 2 : ce qui revient à dire que nous aurons alors, par hypothèse, les quatre égalités

$$(86)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{\rho_0}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = 0, & \displaystyle\int_{\rho_0}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{\rho_0}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = 0, \\ (6X_1 - \alpha Y_1)^2 - m^2\alpha^2 + n^2 6^2 = 0, & (6X_2 - \alpha Y_2)^2 - m^2\alpha^2 + n^2 6^2 = 0, \end{cases}$$

et les deux équations résultant de l'élimination, d'une part de l'arbitraire ρ_0 entre les deux premières équations, et d'autre part des arbitraires $\alpha, 6$ entre les deux dernières qui sont homogènes par rapport à ces deux quantités, exprimeront encore évidemment deux relations équivalentes entre les deux systèmes de valeurs considérés λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2.

La première des deux résultantes que nous venons de spécifier s'obtiendra immédiatement en retranchant simplement l'une de l'autre les deux équations de la première ligne (86), et pourra s'écrire en conséquence

$$(87)\qquad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = 0.$$

Quant à l'autre résultante, on l'obtiendra sans peine également en observant que la seconde des deux équations (85) montrant que la différence $6X - \alpha Y$ est une quantité constante, fonction de α et 6, on aura donc, dans l'hypothèse admise, l'équation

$$6X_1 - \alpha Y_1 = 6X_2 - \alpha Y_2 \quad \text{ou} \quad 6(X_1 - X_2) = \alpha(Y_1 - Y_2),$$

ou encore celle-ci

$$\frac{\alpha}{X_1 - X_2} = \frac{6}{Y_1 - Y_2}, \tag{88}$$

qui pourra remplacer l'une des deux équations de la seconde ligne (86), et que dès lors, si on la substitue à celle de droite par exemple, le résultat de l'élimination de α, 6 entre cette même (88) et la première de la seconde ligne (86) sera évidemment

$$\left[X_1(Y_1 - Y_2) - Y_1(X_1 - X_2)\right]^2 - m^2(X_1 - X_2)^2 + n^2(Y_1 - Y_2)^2 = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(X_1Y_2 - Y_1X_2)^2 - m^2(X_1 - X_2)^2 + n^2(Y_1 - Y_2)^2 = 0. \tag{89}$$

Or les deux équations ainsi obtenues (87) et (89), considérées simultanément, contiennent bien, comme nous allons le faire voir à présent, les formules connues d'addition des fonctions elliptiques de première espèce.

Pour le montrer, définissant d'une part la fonction $x = \operatorname{sn} z$ par l'équation transcendante

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} = z, \tag{90}$$

et, partant de là, les deux fonctions connexes $\operatorname{cn} z$ et $\operatorname{dn} z$ par les relations algébriques

$$\operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z = 1, \qquad \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1, \tag{91}$$

avec la condition que pour $z = 0$ l'on ait à la fois $\operatorname{cn} 0 = 1$, et

dn 0 = 1, puis faisant $\lambda_1 = -a^2$, la première de ces équations, à savoir celle (87), pourra être écrite

$$\int_{-a^2}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{-a^2}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} - \int_{-a^2}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = 0;$$

et dès lors, si l'on pose

$$(92) \qquad \int_{-a^2}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \varphi, \qquad \int_{-a^2}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \psi,$$

elle se réduira à

$$(93) \qquad \int_{-a^2}^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \varphi + \psi.$$

Or, comme en partant des seules définitions (90) et (91), l'équation

$$(93^{bis}) \qquad \int_{-a^2}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \omega$$

donne, d'après un calcul déjà présenté deux fois dans cet Ouvrage (voir Chap. II, pp. 114-115, et Chap. IV, note de la page 309), les valeurs

$$(93^{ter}) \quad a^2+\lambda = l^2 \operatorname{sn}^2 g\omega, \qquad b^2+\lambda = -l^2 \operatorname{cn}^2 g\omega, \qquad c^2+\lambda = n^2 \operatorname{dn}^2 g\omega,$$

dans lesquelles on suppose

$$(94) \qquad g = \frac{in}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}, \qquad k = \frac{il}{n} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

les trois équations ci-dessus (92) et (93) donneront donc, avec la même hypothèse,

$$\left\{ \begin{array}{lll} a^2+\lambda_2 = l^2 \operatorname{sn}^2 g\varphi, & a^2+\mu_2 = l^2 \operatorname{sn}^2 g\psi, & a^2+\mu_1 = l^2 \operatorname{sn}^2 g(\varphi+\psi), \\ b^2+\lambda_2 = -l^2 \operatorname{cn}^2 g\varphi, & b^2+\mu_2 = -l^2 \operatorname{cn}^2 g\psi, & b^2+\mu_1 = -l^2 \operatorname{cn}^2 g(\varphi+\psi), \end{array} \right.$$

ou plus simplement, en faisant dorénavant $g\varphi = u$ et $g\psi = v$,

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2+\lambda_2 = l^2\mathrm{sn}^2 u, & a^2+\mu_2 = l^2\mathrm{sn}^2 v, & a^2+\mu_1 = l^2\mathrm{sn}^2(u+v), \\ b^2+\lambda_2 = -l^2\mathrm{cn}^2 u, & b^2+\mu_2 = -l^2\mathrm{cn}^2 v, & b^2+\mu_1 = -l^2\mathrm{cn}^2(u+v), \end{array}\right.$$

valeurs qui, étant remises, en même temps que l'hypothèse $\lambda_1 = -a^2$, dans les formules de définition (83), fourniront alors les expressions

$$\left\{\begin{array}{ll} X_1^2 = \dfrac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\mu_1)}{a^2-b^2} = 0, & Y_1^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\mu_1)}{b^2-a^2} = -l^2\mathrm{cn}^2(u+v), \\ X_2^2 = \dfrac{(a^2+\lambda_2)(a^2+\mu_2)}{a^2-b^2} = l^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v, & Y_2^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_2)(b^2+\mu_2)}{b^2-a^2} = -l^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v, \end{array}\right.$$

ou, en extrayant les racines, quant aux Y, celles-ci

$$Y_1 = il\,\mathrm{cn}\,(u+v), \qquad Y_2 = il\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v,$$

d'où l'on conclura encore la suivante :

$$Y_1Y_2 = -l^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,(u+v).$$

Avec ces différentes expressions, l'équation (89) qui se réduit déjà, par suite de la valeur $X_1 = 0$, à celle-ci

$$Y_1^2X_2^2 - m^2X_2^2 + n^2(Y_1^2 - 2Y_1Y_2 + Y_2^2) = 0,$$

ou

$$Y_1^2(X_2^2 + n^2) - 2n^2\,Y_1Y_2 + n^2Y_2^2 - m^2X_2^2 = 0,$$

devient par conséquent, dans le cas actuel,

$$-l^2\mathrm{cn}^2(u+v).(l^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v + n^2) + 2n^2.l^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)$$
$$- n^2.l^2\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v - m^2.l^2\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v = 0,$$

ou, en divisant par $-n^2l^2$,

$$\left(1 + \frac{l^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v\right).\mathrm{cn}^2(u+v) - 2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v.\mathrm{cn}\,(u+v)$$
$$+ \mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v = 0,$$

équation qui, en introduisant alors le module k défini par la seconde équation (94), et son complémentaire k_1 défini par celle-ci

$$k_1^2 = 1 - k^2 = 1 + \frac{l^2}{n^2} = \frac{n^2 + l^2}{n^2} = -\frac{m^2}{n^2},$$

pourra être écrite plus simplement

$$(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v).\operatorname{cn}^2(u+v) - 2\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v.\operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = 0,$$

et dont les deux racines représentent évidemment les valeurs de $\operatorname{cn}(u+v)$ et $\operatorname{cn}(u-v)$, du moment que ses coefficients ne changent pas lorsque l'on y change v en $-v$.

Sous cette forme, son discriminant étant alors

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)(\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v) \\
&= \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - (\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v.\operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v - k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v + k^2 k_1^2 \operatorname{sn}^4 u \operatorname{sn}^4 v) \\
&= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \left[k^2 \{1 - (\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v) + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v\} + k_1^2 - k^2 k_1^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v\right] \\
&= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \left[k^2 + k_1^2 - k^2(\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v) + k^2(1 - k_1^2)\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v\right] \\
&= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \left[1 - k^2(\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v) + k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v\right] \\
&= \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v.(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v) = \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v,
\end{aligned}$$

ces racines seront, par conséquent,

$$\operatorname{cn}(u \mp v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \pm \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

et pour établir la corrélation des doubles signes dans les deux membres, il suffira d'observer, que si l'on prenait le signe supérieur dans le premier membre en même temps que le signe inférieur dans le second, pour la valeur particulière $u = v = K$, le premier membre se réduirait à la valeur positive $\operatorname{cn} 0 = 1$, tandis que le second serait la valeur négative $-\frac{\operatorname{sn}^2 K \operatorname{dn}^2 K}{1 - k^2} = -1$. Il faut donc prendre à la fois le signe supérieur ou le signe infé-

rieur dans les deux membres, c'est-à-dire que l'on aura définitivement

$$(95)\quad \left\{ \mathrm{cn}\,(u+v) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \qquad \begin{aligned} \mathrm{N} &= \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v, \\ \mathrm{D} &= 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v, \end{aligned} \right.$$

et l'on en conclura par suite, en vertu de la première équation de définition (91), cette autre égalité

$$(96)\qquad \mathrm{sn}^2(u+v) = 1 - \mathrm{cn}^2(u+v) = 1 - \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{D}^2} = \frac{\mathrm{D}^2 - \mathrm{N}^2}{\mathrm{D}^2}.$$

Or, le dénominateur D pouvant être écrit, vu sa symétrie en u et v, indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes (*)

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{D} &= 1 - \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 v) = \mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v, \\ \mathrm{D} &= 1 - \mathrm{sn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u) = \mathrm{cn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u, \end{aligned} \right.$$

on trouvera donc, en multipliant l'une par l'autre ces deux expressions,

$$\mathrm{D}^2 = (\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v)(\mathrm{cn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u),$$

et par suite, en développant cette dernière valeur, et tenant compte de celle (95) de N,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 - \mathrm{N}^2 &= \mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v.\mathrm{cn}^2 v + \mathrm{cn}^2 u.\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v.\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u \\ &\quad - (\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v - 2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 v) \\ &= \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 v\,\mathrm{dn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u + 2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v \\ &= (\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)^2, \end{aligned}$$

d'où, en reportant enfin au dernier membre de l'égalité (96) et extrayant alors les racines,

$$\mathrm{sn}\,(u+v) = \pm\,\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v},$$

(*) Nous empruntons cet ingénieux artifice au *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. JORDAN (Tome II, § 369, pp. 371-372).

l'ambiguïté de signe du second membre étant tranchée, cette fois, par ce fait que pour $v = 0$, cette égalité se réduit à $\operatorname{sn} u = \pm \operatorname{sn} u$, ce qui exclut le signe inférieur, et donne définitivement la valeur

$$(97) \qquad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{N'}{D}, \qquad N' = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

d'où l'on conclura encore, en vertu de la seconde équation de définition (91),

$$(98) \qquad \operatorname{dn}^2(u+v) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u+v) = 1 - k^2 \frac{N'^2}{D^2} = \frac{D^2 - k^2 N'^2}{D^2}.$$

Or, si l'on observe, ainsi que nous l'avons fait dans notre Chapitre III [page 243, équation (183)], que le même dénominateur D (95) peut encore être écrit à nouveau sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\begin{cases} D = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u\,(1 - \operatorname{sn}^2 v) = \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v, \\ D = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v\,(1 - \operatorname{sn}^2 u) = \operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u, \end{cases}$$

on aura donc, comme tout à l'heure, en multipliant encore ces deux expressions entre elles,

$$D^2 = (\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v)(\operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u),$$

et par suite, en développant, et tenant compte de la valeur (97) de N',

$$\begin{aligned} D^2 - k^2 N'^2 &= \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v + k^2(\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v . \operatorname{dn}^2 v + \operatorname{dn}^2 u . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u) + k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \\ &\quad - k^2(\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v + 2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u) \\ &= \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v - 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v + k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v \\ &= (\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v)^2, \end{aligned}$$

d'où, en reportant enfin au dernier membre des égalités (98), et extrayant encore les racines, cette nouvelle égalité

$$\operatorname{dn}(u+v) = \pm \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

l'ambiguïté de signe étant de nouveau tranchée par le fait que

pour $v = 0$, elle se réduit à $\operatorname{dn} u = \pm \operatorname{dn} u$, ce qui exclut encore le signe inférieur, en sorte que l'on a définitivement la troisième formule

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{N''}{D}, \qquad N'' = \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v,$$

qui parfait complètement la vérification que nous avions entreprise.

La méthode développée dans le paragraphe précédent, pour trouver les formules d'addition des fonctions hyperelliptiques, étant appliquée de point en point au cas plus simple des fonctions elliptiques de première espèce, nous a donc bien redonné exactement, comme nous voulions le vérifier, les formules analogues connues relatives à ces dernières fonctions.

IV

Il nous faut montrer encore, à propos du même cas simple des fonctions elliptiques, que la théorie et les méthodes exposées dans cette Note conduisent également bien aux formules connues d'addition des fonctions de deuxième et de troisième espèce.

Pour retrouver celles-là, il sera nécessaire de pousser jusqu'au bout la solution du problème posé au commencement du paragraphe III précédent, c'est-à-dire la détermination, par le moyen des trois équations (76), de l'inconnue u en fonction des variables indépendantes λ et μ, expression qui ne devait pas intervenir elle-même dans nos calculs développés tout à l'heure à l'occasion des fonctions de première espèce.

A cet effet, calquant nos procédés de recherche sur ceux indiqués dans le second paragraphe de la Note III, de l'expression (81bis) de la fonction U nous conclurons tout d'abord la valeur

$$\begin{aligned}\lambda + U &= \lambda + \left[(\alpha X + \beta Y)^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2)(\lambda + \mu)\right] \\ &= (\alpha X + \beta Y)^2 - \left[a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\mu\right] \\ &= \left[X^2 - (a^2 + \mu)\right]\alpha^2 + \left[Y^2 - (b^2 + \mu)\right]\beta^2 + 2\alpha\beta XY,\end{aligned}$$

et comme les définitions (83) de X et Y donnent actuellement

$$a^2 + \mu = \frac{(a^2 - b^2)X^2}{a^2 + \lambda}, \qquad b^2 + \mu = \frac{(b^2 - a^2)Y^2}{b^2 + \lambda},$$

l'expression précédente se mettra aisément sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda + U &= \left[X^2 - \frac{(a^2 - b^2)X^2}{a^2 + \lambda}\right]\alpha^2 + \left[Y^2 - \frac{(b^2 - a^2)Y^2}{b^2 + \lambda}\right]6^2 + 2\alpha 6XY \\ &= \left[a^2 + \lambda - (a^2 - b^2)\right]\frac{\alpha^2 X^2}{a^2 + \lambda} + \left[b^2 + \lambda - (b^2 - a^2)\right]\frac{6^2 Y^2}{b^2 + \lambda} + 2\alpha 6XY \\ &= (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\left[\frac{\alpha^2 X^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{6^2 Y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + 2\frac{\alpha X}{a^2 + \lambda}\frac{6Y}{b^2 + \lambda}\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la définition (77) du symbole $\varphi(\rho)$, que l'on aura les deux valeurs

$$\lambda + U = \varphi(\lambda)\left(\frac{\alpha X}{a^2 + \lambda} + \frac{6Y}{b^2 + \lambda}\right)^2, \qquad \mu + U = \varphi(\mu)\left(\frac{\alpha X}{a^2 + \mu} + \frac{6Y}{b^2 + \mu}\right)^2,$$

avec lesquelles les deux dérivées (79) de u auront dès lors pour expressions, en prenant le même signe pour toutes les deux :

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{\alpha X}{a^2 + \lambda} + \frac{6Y}{b^2 + \lambda}, \qquad \frac{du}{d\mu} = \frac{\alpha X}{a^2 + \mu} + \frac{6Y}{b^2 + \mu}.$$

Or, la différentiation des expressions (83) donnant les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{d\lambda} &= \frac{1}{2}\frac{X}{a^2 + \lambda}, & \frac{dY}{d\lambda} &= \frac{1}{2}\frac{Y}{b^2 + \lambda}, \\ \frac{dX}{d\mu} &= \frac{1}{2}\frac{X}{a^2 + \mu}, & \frac{dY}{d\mu} &= \frac{1}{2}\frac{Y}{b^2 + \mu}, \end{aligned}\right.$$

les expressions que nous venons d'obtenir pour les dérivées de u pourront donc s'écrire

$$\frac{du}{d\lambda} = 2\left(\alpha\frac{dX}{d\lambda} + 6\frac{dY}{d\lambda}\right), \qquad \frac{du}{d\mu} = 2\left(\alpha\frac{dX}{d\mu} + 6\frac{dY}{d\mu}\right),$$



et donneront, d'abord pour la différentielle de u,

$$du = 2\left[\alpha\left(\frac{dX}{d\lambda}d\lambda + \frac{dX}{d\mu}d\mu\right) + \beta\left(\frac{dY}{d\lambda}d\lambda + \frac{dY}{d\mu}d\mu\right)\right]$$
$$= 2(\alpha\, dX + \beta\, dY),$$

puis de là, en intégrant,

$$(99) \qquad u = 2(\alpha X + \beta Y) + \text{const.},$$

expression qui, étant comparée à celle (6) du cas général, fait voir que le coefficient constant d a, dans le cas particulier correspondant à nos hypothèses, la valeur $d = \frac{1}{2}$.

Ce résultat étant acquis, supposons à présent que nous attribuions de nouveau à la fonction U la valeur constante $U = c^2$: alors, d'une part, l'équation (80) se transformera encore dans la première équation (84), qui pourra être écrite à l'aide du symbole $f(\rho)$ (84bis), sous forme condensée, pour $\rho = \lambda, \mu$

$$(100) \qquad \sum_\rho \int^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = W,$$

et, d'autre part, l'équation (79bis) devenant alors, avec le même mode de notation,

$$u = \sum_\rho \int^\rho \sqrt{\frac{\rho + c^2}{\varphi(\rho)}}\, d\rho + V, \quad \text{ou} \quad u - V = \sum_\rho \int^\rho \frac{\rho + c^2}{\sqrt{\varphi(\rho)(\rho + c^2)}}\, d\rho$$

pourra s'écrire également, à l'aide du même symbole $f(\rho)$,

$$(101) \qquad \sum_\rho \int^\rho \frac{\rho + c^2}{\sqrt{f(\rho)}}\, d\rho = u - V.$$

Et dès lors, si on l'ajoute à la précédente (100) multipliée par $a^2 - c^2$, l'on voit, comme, pour le cas général de trois variables indépendantes, à propos des équations (3), (4), (5), et (6), que l'ensemble de ces deux équations (100) et (101) pourra être remplacé par les deux suivantes

$$(102) \qquad \sum_\rho \int^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = W, \qquad \sum_\rho \int^\rho \frac{\rho + a^2}{\sqrt{f(\rho)}}\, d\rho = u + \text{const.}.$$

qui pourront encore être considérées comme l'intégrale sous forme transcendante du système différentiel

$$(103) \qquad \sum_\rho \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = 0, \qquad \sum_\rho \frac{\rho + a^2}{\sqrt{f(\rho)}} d\rho = du,$$

pendant que l'équation (99) ci-dessus et la seconde équation (84) ou (85), savoir

$$(104) \qquad (6X - \alpha Y)^2 - m^2\alpha^2 + n^2 6^2 = 0,$$

représentant l'équation (82) ou (81bis) pour l'hypothèse $\dot{U} = c^2$, constitueront pareillement l'intégrale algébrique du même système.

Or, cet énoncé, pour le cas simple actuel, du théorème d'Abel sous la première forme où nous l'avons obtenu, renferme implicitement, comme on va le voir, les formules d'addition des fonctions elliptiques de deuxième et de troisième espèces.

A. En effet, si prenant $\rho_0 = -a^2$ pour limite inférieure des intégrales, et adoptant μ pour variable indépendante, nous convenons de désigner par λ_0 la valeur de λ correspondante à la valeur initiale de μ, $\mu_0 = \rho_0 = -a^2$, quantité dont la valeur s'obtiendra dès lors en introduisant cette hypothèse dans l'équation (104), et si, en même temps, nous supposons nulle la valeur initiale u_0 de u correspondante à la même valeur $\mu = \mu_0$ [ce qui est évidemment permis, u étant dans cette question une simple variable auxiliaire définie par la seconde équation différentielle (103)], les deux équations (102) seront alors explicitement, en adoptant cette valeur initiale de λ comme constante d'intégration :

$$(105) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-a^2}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{-a^2}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{\sqrt{f(\lambda_0)}}, \\ &\int_{-a^2}^{\lambda} \frac{\lambda + a^2}{\sqrt{f(\lambda)}} d\lambda + \int_{-a^2}^{\mu} \frac{\mu + a^2}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu = \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0 + a^2}{\sqrt{f(\lambda_0)}} d\lambda_0 + u. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on établit d'une façon générale, entre les deux variables ρ et ω, la relation

$$(106)\qquad \int_{-a^2}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \frac{1}{g}\omega = \frac{2}{in}\omega, \qquad k = \frac{il}{n},$$

le coefficient g et le module k étant ainsi, par hypothèse, précisément les valeurs (94), c'est-à-dire, plus simplement, si l'on écrit ρ au lieu de λ et $\frac{\omega}{g}$ à la place de ω dans l'équation (93[bis]), les valeurs (93[ter]), qui en sont la conséquence, devenant alors

$$(107)\qquad a^2 + \rho = l^2 \operatorname{sn}^2\omega, \qquad b^2 + \rho = -l^2 \operatorname{cn}^2\omega, \qquad c^2 + \rho = n^2 \operatorname{dn}^2\omega,$$

il suit de là que, si l'on introduit, à la place de λ, μ, et λ_0, trois nouvelles variables φ, ψ, et φ_0 définies respectivement par les trois relations de la forme en question (106), savoir

$$(108)\qquad \int_{-a^2}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \frac{2}{in}\varphi, \qquad \int_{-a^2}^{-\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \frac{2}{in}\psi, \qquad \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{\sqrt{f(\lambda_0)}} = \frac{2}{in}\lambda_0,$$

l'on aura, en premier lieu, simultanément les valeurs

$$(109)\qquad \begin{cases} a^2 + \lambda = l^2 \operatorname{sn}^2\varphi, & b^2 + \lambda = -l^2 \operatorname{cn}^2\varphi, & c^2 + \lambda = n^2 \operatorname{dn}^2\varphi, \\ a^2 + \mu = l^2 \operatorname{sn}^2\psi, & b^2 + \mu = -l^2 \operatorname{cn}^2\psi, & c^2 + \lambda = n^2 \operatorname{dn}^2\psi, \\ a^2 + \lambda_0 = l^2 \operatorname{sn}^2\varphi_0, & b^2 + \lambda_0 = -l^2 \operatorname{cn}^2\varphi_0, & c^2 + \lambda_0 = n^2 \operatorname{dn}^2\varphi_0, \end{cases}$$

et, partant de là, les deux équations ci-dessus (105) se transformeront dans les suivantes

$$(110)\qquad \begin{cases} \dfrac{2}{in}\varphi + \dfrac{2}{in}\psi = \dfrac{2}{in}\varphi_0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_0 = \varphi + \psi, \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_0^{\varphi} l^2 \operatorname{sn}^2\varphi \cdot \frac{2}{in} d\varphi + \int_0^{\psi} l^2 \operatorname{sn}^2\psi \cdot \frac{2}{in} d\psi = \int_0^{\lambda_0} l^2 \operatorname{sn}^2\varphi_0 \cdot \frac{2}{in} d\varphi_0 + u, \end{cases}$$

dont la seconde deviendra, étant divisée par $2in$,

$$\int_0^{\varphi} \frac{l^2}{-n^2} \operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi + \int_0^{\psi} \frac{l^2}{-n^2} \operatorname{sn}^2 \psi \, d\psi = \int_0^{\lambda_0} \frac{l^2}{-n^2} \operatorname{sn}^2 \varphi_0 \, d\varphi_0 + \frac{1}{2in} u,$$

et pourra, par conséquent, en tenant compte de la première en même temps que de la valeur (106) admise pour le module k, être écrite, à l'aide du type introduit par Jacobi pour la fonction de deuxième espèce,

$$\text{(111)} \qquad Z(\varphi) + Z(\psi) = Z(\varphi + \psi) + \frac{1}{2in} u.$$

Enfin, pour calculer le dernier terme de cette égalité, qui reste désormais seul inconnu, il suffira évidemment d'avoir recours au procédé que nous employons dans le premier paragraphe de cette Note, et consistant à introduire comme constante d'intégration, à la place des constantes α, β liées entre elles par la relation (82bis), la valeur initiale λ_0 de λ pour $\mu = \mu_0 = -a^2$, en déterminant dès lors ces constantes α, β par les deux équations qui tiennent lieu pour le cas actuel des équations (29) dudit paragraphe,

$$\text{(112)} \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \qquad (\beta X_0 - \alpha Y_0)^2 = m^2\alpha^2 - n^2\beta^2,$$

et remettant alors les valeurs ainsi obtenues dans l'équation

$$\text{(113)} \qquad u = 2\left[\alpha(X - X_0) + \beta(Y - Y_0)\right],$$

qui représente l'équation ci-dessus (99), en y introduisant l'hypothèse $u_0 = 0$ que nous avons admise un peu plus haut (p. 219).

Effectuant donc ce calcul, nous trouverons d'abord pour expression des quantités X_0, Y_0, en ayant égard successivement aux définitions (83) de X, Y, puis aux valeurs de la dernière ligne (109), et enfin à la première équation de droite (110),

$$\text{(114)} \quad \begin{cases} X_0 = \sqrt{\dfrac{(a^2+\lambda_0)(a^2+\mu_0)}{a^2 - b^2}} = 0, \\[2ex] Y_0 = \sqrt{\dfrac{(b^2+\lambda_0)(b^2+\mu_0)}{b^2 - a^2}} = \sqrt{b^2 + \lambda_0} = \sqrt{-l^2 \operatorname{cn}^2 \varphi_0} = il \operatorname{cn}(\varphi + \psi); \end{cases}$$

et dès lors, les deux équations précédentes (112) se réduisant, en vertu de la première de ces valeurs, à

$$(115)\qquad \alpha^2+\beta^2=1,\qquad \alpha^2(Y_0^2-m^2)+n^2\beta^2=0,$$

d'où, en éliminant β, puis ayant égard à la première relation (74),

$$\alpha^2(Y_0^2-m^2-n^2)=-n^2,\qquad \alpha^2=\frac{-n^2}{Y_0^2-(m^2+n^2)}=\frac{-n^2}{Y_0^2+l^2},$$

ces mêmes équations donneront donc, en tenant compte de la seconde valeur (114) ainsi que de celle (106) du module k,

$$\left\{\begin{aligned}\alpha^2&=\frac{-n^2}{-l^2\,\mathrm{cn}^2(\varphi+\psi)+l^2}=\frac{1}{\frac{l^2}{-n^2}\left[1-\mathrm{cn}^2(\varphi+\psi)\right]}=\frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)},\\ \beta^2&=1-\alpha^2=1-\frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)}=\frac{-\left[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\right]}{k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)}=\frac{-\mathrm{dn}^2(\varphi+\psi)}{k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire finalement les deux valeurs très simples

$$(116)\qquad \alpha=\frac{1}{k\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi)},\qquad \beta=\frac{i\,\mathrm{dn}(\varphi+\psi)}{k\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi)}.$$

D'autre part, les expressions (83) de X et Y devenant en même temps, par la substitution des valeurs des deux premières lignes (109),

$$(117)\quad\left\{\begin{aligned}X&=\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{l^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,.\,l^2\,\mathrm{sn}^2\psi}{l^2}}=l\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi,\\ Y&=\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{b^2-a^2}}=\sqrt{\frac{(-l^2\,\mathrm{cn}^2\varphi)(-l^2\,\mathrm{cn}^2\psi)}{-l^2}}=il\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi,\end{aligned}\right.$$

l'expression (113) qu'il s'agit de calculer deviendra donc, par la substitution des trois groupes de valeurs (116), (117), et (114)

ainsi obtenus,

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} u &= 2\left[\alpha(X - X_0) + 6(Y - Y_0)\right] \\ &= \frac{2}{k\,\mathrm{sn}(\varphi + \psi)}\left[l\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi + i\,\mathrm{dn}(\varphi + \psi)\,\{il\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi - il\,\mathrm{cn}(\varphi + \psi)\}\right] \\ &= \frac{2l.\mathrm{N}}{k\,\mathrm{sn}(\varphi + \psi)}, \end{aligned}\right.$$

en faisant pour un instant

$$\mathrm{N} = \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi - \mathrm{dn}(\varphi + \psi)\left[\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi - \mathrm{cn}(\varphi + \psi)\right],$$

quantité qui deviendra elle-même successivement, par le moyen de transformations évidentes,

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi - \mathrm{dn}(\varphi + \psi)\left[\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi - \frac{\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi - \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\psi}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{sn}^2\psi}\right] \\ &= \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi - \frac{\mathrm{dn}(\varphi + \psi)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{sn}^2\psi}\left[\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{sn}^2\psi)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - (\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi - \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{dn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\psi)\right] \\ &= \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\left[1 - \mathrm{dn}(\varphi + \psi)\,\frac{\mathrm{dn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\psi - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\psi}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{sn}^2\psi}\right] \\ &= \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\left[1 - \mathrm{dn}^2(\varphi + \psi)\right] = \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi.k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi + \psi), \end{aligned}$$

et dont la valeur, étant reportée dans le dernier membre des égalités précédentes (118) en même temps que la valeur (106) de k, fournira donc, pour la valeur cherchée de u, l'expression

$$(119)\qquad u = \frac{2l\ \mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi.k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi + \psi)}{\frac{il}{n}\,\mathrm{sn}(\varphi + \psi)} = -2ink^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}(\varphi + \psi),$$

laquelle enfin étant remise à son tour au second membre de l'égalité trouvée tout à l'heure (111), la transformera elle-même

dans la suivante

$$Z(\varphi) + Z(\psi) = Z(\varphi + \psi) - k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi + \psi),$$

ou

$$(120) \qquad Z(\varphi + \psi) = Z(\varphi) + Z(\psi) + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi + \psi),$$

qui est bien la formule d'addition donnée par Jacobi pour la fonction de deuxième espèce.

B. Semblablement, pour retrouver la formule analogue relative à la fonction elliptique de troisième espèce, il suffira d'appliquer à l'intégrale empruntée à cette catégorie $\int \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} d\rho$ le même théorème d'Abel, supposé pris cette fois sous la seconde forme où nous le présentons dans le paragraphe I de cette Note, en effectuant pour cela de point en point sur ce type particulier d'intégrale toute la série des opérations et des calculs que nous indiquons successivement dans la démonstration du théorème en question.

En effet, supposant toujours, comme tout à l'heure, les trois variables λ, μ, et u liées entre elles par le système différentiel (103), et, par conséquent, en quantités finies, par la double forme d'intégrale consistant, sous forme transcendante dans les deux équations (102), et sous forme algébrique dans les deux équations (104) et (99), la quadrature précitée

$$\int \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} d\rho = \int \frac{\rho - r + a^2 + r}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \int \frac{a^2 + r}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}$$

donnera donc, en ajoutant les deux identités semblables pour $\rho = \lambda, \mu$, puis tenant compte de la première équation (102), naissance à l'égalité

$$(121) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_\rho \int \frac{\rho + a^2}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} d\rho &= \sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \sum_\rho (a^2 + r) \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} \\ &= W + (a^2 + r) \sum_\rho \int \frac{d\rho}{(\rho - r)\sqrt{f(\rho)}} + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

qui représente évidemment dans la question actuelle la formule (23) de notre paragraphe I, et dans laquelle la somme qui figure au second membre étant précisément, avec une variable de moins, celle-là même qui est écrite entre parenthèses au dernier terme de ladite formule (23), sera donc fournie encore par la formule (25bis) réduite à la même hypothèse de deux variables λ et μ seulement, c'est-à-dire dans laquelle $F(\rho)$ étant supposée remplacée par $f(\rho)$, les coefficients G_r, H_r, K_r seront toujours, d'après l'équation de définition (25), ceux de l'équation en u obtenue en égalant à zéro la fonction $\mathcal{F}(r)$, ou ce qui revient au même la fonction $-\mathcal{F}(r)$, dont l'expression sera, dans le cas actuel, d'après l'équation sans numéro qui précède l'équation (25),

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{F}(r) &= (a^2 + r)(b^2 + r)\left[\frac{(A'u + A'')^2}{a^2 + r} + \frac{(B'u + B'')^2}{b^2 + r} - 1\right] \\
&= (b^2 + r)(A'u + A'')^2 + (a^2 + r)(B'u + B'')^2 - (a^2 + r)(b^2 + r) \\
&= \left[(b^2 + r)A'^2 + (a^2 + r)B'^2\right]u^2 + 2\left[(b^2 + r)A'A'' + (a^2 + r)B'B''\right]u \\
&\quad + (b^2 + r)A''^2 + (a^2 + r)B''^2 - \varphi(r),
\end{aligned}
$$

eu égard à la définition (77) du symbole $\varphi(\rho)$. C'est-à-dire, par conséquent, que ces coefficients seront ici respectivement les quantités

$$
(122) \qquad \left\{
\begin{aligned}
G_r &= (b^2 + r)A'^2 + (a^2 + r)B'^2, \\
H_r &= (b^2 + r)A'A'' + (a^2 + r)B'B'', \\
K_r &= (b^2 + r)A''^2 + (a^2 + r)B''^2 - \varphi(r),
\end{aligned}
\right.
$$

et avec ces expressions, les racines p_r et q_r étant toujours

$$
(123) \qquad p_r = \frac{1}{G_r}\left[-H_r + \sqrt{H_r^2 - G_rK_r}\right], \qquad q_r = \frac{1}{G_r}\left[-H_r - \sqrt{H_r^2 - G_rK_r}\right],
$$

la formule précitée (25bis), dans laquelle, avons-nous dit, $F(\rho)$ doit être remplacée par $f(\rho)$ et le coefficient d par $\frac{1}{2}$ (page 218), donnera alors, en prenant l'intégrale entre les limites $\rho_0 = -a^2$

et ρ, eu égard à l'hypothèse admise antérieurement $u_0 = 0$ (page 219),

$$(124)\qquad \sum_{\rho}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{(\rho-r)\sqrt{f(\rho)}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{H_r^2 - G_rK_r}}\left[\log\frac{u-p_r}{u-q_r} - \log\frac{p_r}{q_r}\right]$$

Cela posé, il sera facile, dans ce cas simple, de déterminer les constantes A', B', A'', B'', qui figurent dans les expressions (122), car, si l'on a égard à la valeur (114) $X_0 = 0$, l'équation (104) donnant, en y faisant $\mu = \mu_0 = -a^2$,

$$(125)\qquad -\alpha Y_0 = m^2\alpha^2 - n^2\beta^2,$$

la même équation étant récrite, en même temps que l'équation (113), en tenant compte de ces valeurs, ainsi qu'il suit

$$\alpha X + \beta Y = \frac{1}{2}u + \beta Y_0, \qquad \beta X - \alpha Y = -\alpha Y_0,$$

ces deux équations donneront, eu égard à la condition (82bis),

$$X = \alpha\left(\frac{1}{2}u + \beta Y_0\right) - \alpha\beta Y_0, \qquad Y = \alpha^2 Y_0 + \beta\left(\frac{1}{2}u + \beta Y_0\right),$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant, les expressions

$$X = \frac{1}{2}\alpha u, \qquad Y = \frac{1}{2}\beta u + Y_0,$$

qui, rapprochées des formules (21), assignent aux coefficients en question, pour le cas actuel, les valeurs

$$A' = \frac{1}{2}\alpha, \qquad A'' = 0, \qquad B' = \frac{1}{2}\beta, \qquad B'' = Y_0,$$

en vertu desquelles les expressions ci-dessus (122) des coefficients de l'équation envisagée deviennent

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned} &G_r = \frac{1}{4}\left[(b^2 + r)\alpha^2 + (a^2 + r)\beta^2\right] = \frac{1}{4}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 + r),\\ &H_r = (a^2 + r)\cdot\frac{1}{2}\beta Y_0, \qquad K_r = (a^2 + r)Y_0^2 - \varphi(r),\end{aligned}\right.$$

et donneront dès lors successivement

$$\begin{cases} G_rK_r = \frac{1}{4}\left[(b^2+r)\alpha^2+(a^2+r)\beta^2\right]\left[(a^2+r)Y_0^2-\varphi(r)\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left[(a^2+r)(b^2+r)\alpha^2Y_0^2+(a^2+r)^2\beta^2Y_0^2\right]-G_r\varphi(r), \\ H_r^2-G_rK_r = (a^2+r)^2.\frac{1}{4}\beta^2Y_0^2-\left[\frac{1}{4}(a^2+r)^2\beta^2Y_0^2+\varphi(r)\left(\frac{1}{4}\alpha^2Y_0^2-G_r\right)\right] \\ \quad = \varphi(r)\left(G_r-\frac{1}{4}\alpha^2Y_0^2\right), \end{cases}$$

c'est-à-dire, en ayant égard, d'abord à la valeur (125) et à l'expression de la première quantité (126), puis aux définitions (56),

$$\begin{aligned} H_r^2-G_rK_r &= \varphi(r)\left[\frac{1}{4}(b^2\alpha^2+a^2\beta^2+r)-\frac{1}{4}(m^2\alpha^2-n^2\beta^2)\right] \\ &= \varphi(r)\left[\tfrac{1}{4}b^2-\tfrac{1}{4}(b^2-c^2)\right]\alpha^2+\left[\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}(c^2-a^2)\right]\beta^2+r\Big] \\ &= \frac{1}{4}\varphi(r)\left[c^2(\alpha^2+\beta^2)+r\right]=\frac{1}{4}(a^2+r)(b^2+r)(c^2+r)=\frac{1}{4}f(r). \end{aligned}$$

Partant donc de cette valeur, les deux racines p_r et q_r (123) étant alors

$$p_r=\frac{1}{G_r}\left[-H_r+\frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right], \qquad q_r=\frac{1}{G_r}\left[-H_r-\frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right]$$

le second facteur, entre crochets, de l'expression (124) qu'il s'agit de calculer sera

$$\begin{aligned} \log\frac{u-p_r}{u-q_r}-\log\frac{p_r}{q_r} &= \log\frac{(u-p_r)q_r}{(u-q_r)p_r}=\log\frac{q_ru-\dfrac{K_r}{G_r}}{p_ru-\dfrac{K_r}{G_r}} \\ &= \log\frac{G_rq_r.u-K_r}{G_rp_r.u-K_r}=\log\frac{-\left[H_r+\frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right]u-K_r}{-\left[H_r-\frac{1}{2}\sqrt{f(r)}\right]u-K_r} \\ &= \log\frac{2(H_ru+K_r)+\sqrt{f(r)}.u}{2(H_ru+K_r)-\sqrt{f(r)}.u}, \end{aligned}$$

et par conséquent l'expression en question deviendra elle-même la suivante :

$$(127)\qquad \sum_\rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{(\rho-r)\sqrt{f(\rho)}} = \frac{-1}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r) + \sqrt{f(r)}\, u}{2(\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r) - \sqrt{f(r)}\, u}.$$

Ce résultat étant obtenu, la formule (121), qui constitue le point de départ de notre calcul, en y supposant introduite cette dernière expression, deviendra elle-même la suivante

$$(128)\qquad \sum_\rho \int^{\rho} \frac{\rho + a^2}{(\rho-r)\sqrt{f(\rho)}}\, d\rho = \mathrm{W} - \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(\mathrm{H}_r u + \mathrm{K}_r) - \sqrt{f(r)}.u} + \text{const.},$$

qui représentera, pour le cas actuel, la formule (26) de notre paragraphe I, et dès lors il suffira d'y remplacer la variable u par sa valeur présente,

$$(129)\qquad u = 2\left[\alpha \mathrm{X} + 6(\mathrm{Y} - \mathrm{Y}_0)\right]$$

pour avoir la formule (28) du même paragraphe relative au cas particulier que nous examinons.

Cette substitution étant supposée réalisée, il faudra ensuite, pour obtenir définitivement la formule (32) relative au même cas, qui exprimera pour ce cas le théorème d'Abel sous la seconde forme où nous l'avons présenté, il faudra, disons-nous, effectuer successivement les deux opérations que nous avons spécifiées aux pages 170 et 172, et cela dans un ordre quelconque d'ailleurs, car il est bien clair, d'après l'exposé de notre théorie, que le résultat final sera dans les deux hypothèses absolument le même.

En commençant donc ici par la seconde qui consiste à éliminer la constante additive du résultat ci-dessus (128), et prenant dans ce but toutes les intégrales à partir de la limite inférieure $\rho_0 = -a^2$, il est clair que le résultat (128) fournira, sous forme

explicite, la nouvelle égalité

$$(130)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-a^2}^{\lambda} \frac{\lambda + a^2}{\lambda - r} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} + \int_{-a^2}^{\mu} \frac{\mu + a^2}{\mu - r} \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}} - \int_{-a^2}^{\lambda_0} \frac{\lambda_0 + a^2}{\lambda_0 - r} \frac{d\lambda_0}{\sqrt{f(\lambda_0)}} \\ &\qquad = - \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u}, \end{aligned} \right.$$

du moment que le second membre que nous venons d'écrire représente lui-même, à un facteur constant près, l'intégrale définie (127), dont les limites sont précisément $\rho_0 = -a^2$ et ρ.

Puis, cela fait, l'on devra accomplir également sur ce dernier résultat la première opération susmentionnée, c'est-à-dire y remplacer les constantes d'intégration α et 6 par leurs valeurs en fonction de la valeur initiale λ_0 fournies par le système des deux équations (112) ou (115), substitution qu'il faudra effectuer tant dans l'expression précédente (129) de u que dans celles (126) de H_r et K_r, du moment que ces constantes α et 6 y interviennent également.

Cela étant, d'une part, en vue de profiter pour ce dernier calcul des résultats déjà obtenus tout à l'heure dans notre recherche relative à la fonction de deuxième espèce, nous introduirons de nouveau, comme alors, à la place des variables λ, μ, et λ_0, les nouvelles variables φ, ψ, et φ_0 définies par les équations (108), auquel cas, la première équation (102) ou (105) se changeant alors dans l'équation de droite de la première ligne (110), les valeurs de λ, μ, et λ_0 en fonction de ces variables seront de nouveau celles fournies par les équations de gauche (109) où φ_0 représentera la somme $\varphi + \psi$, et donneront alors, après remplacement de α, 6 par leurs valeurs en fonction de φ_0, tenant lieu désormais de λ_0, c'est-à-dire par leurs valeurs (116), définitivement pour expression de u celle exprimée par le dernier membre des égalités (119), savoir :

$$(131)\qquad u = -2ink^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \psi \operatorname{sn} (\varphi + \psi).$$

D'autre part, en vue d'arriver pour la fonction de troisième espèce à la formule correspondant exactement à celle (120) obtenue tout à l'heure pour la fonction de seconde espèce, en même temps que nous effectuerons lesdits changements de variables et la substitution de cette dernière valeur de u qui en sera la conséquence, partant alors de ce fait que le type de quadrature envisagé peut être mis sous la forme

$$(132)\quad \int \frac{\rho + a^2}{\rho - r}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int \frac{\rho + a^2}{\rho + a^2 - (a^2 + r)}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int \frac{\dfrac{a^2+\rho}{a^2+r}}{\dfrac{a^2+\rho}{a^2+r} - 1}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}.$$

nous changerons également de constante donnée en introduisant à la place de r le *paramètre* h défini par l'équation de même forme (sauf une constante additive) que la première (107) qui lie ρ et ω,

$$(133)\qquad a^2 + r = l^2 \operatorname{sn}^2(h - iK') = \frac{l^2}{k^2 \operatorname{sn}^2 h} = \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h},$$

laquelle donnera immédiatement, eu égard aux définitions (56) et à la valeur (106) de k, les trois expressions

$$(134)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}^2 h = \dfrac{-n^2}{a^2+r} = \dfrac{a^2-c^2}{a^2+r}, & h = \operatorname{Arg\,sn}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{a^2+r}}, \\ \operatorname{cn}^2 h = 1 - \operatorname{sn}^2 h = 1 + \dfrac{n^2}{a^2+r} = \dfrac{a^2+r+(c^2-a^2)}{a^2+r} = \dfrac{c^2+r}{a^2+r}, \\ \operatorname{dn}^2 h = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 h = 1 + \dfrac{l^2}{n^2}\dfrac{-n^2}{a^2+r} = \dfrac{a^2+r-(a^2-b^2)}{a^2+r} = \dfrac{b^2+r}{a^2+r}, \end{cases}$$

puis, en tenant compte de la première égalité (107), pour toute variable ω supposée liée à ρ par une relation telle que (106),

$$\frac{a^2+\rho}{a^2+r} = \frac{l^2\operatorname{sn}^2\omega}{-n^2}\operatorname{sn}^2 h = \left(-\frac{l^2}{n^2}\right)\operatorname{sn}^2\omega \operatorname{sn}^2 h = k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2\omega.$$

Et dès lors, si l'on prend ω pour variable à la place de ρ, en

remettant cette dernière valeur sous le signe d'intégration au dernier membre des égalités précédentes (132), et prenant les intégrales entre les limites correspondantes, $\rho_0 = -a^2$ et ρ d'une part, et 0 et ω d'autre part, le type de quadrature proposé se trouvera par là transformé dans le suivant

$$\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\rho + a^2}{\rho - r} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \int_0^{\omega} \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega}{k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega - 1} \frac{2}{in} d\omega$$

$$= \frac{-2}{in} \frac{\operatorname{sn} h}{\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h} \int_0^{\omega} \frac{k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega} \operatorname{sn}^2 \omega \, d\omega$$

$$= \frac{-2}{in} \frac{\frac{in}{\sqrt{a^2 + r}}}{\sqrt{\frac{c^2 + r}{a^2 + r}} \sqrt{\frac{b^2 + r}{a^2 + r}}} \Pi(\omega, h) = -2 \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \Pi(\omega, h),$$

c'est-à-dire, à un facteur constant près, dans la fonction de troisième espèce correspondante au type que nous avons considéré plus haut pour la fonction de deuxième espèce.

Appliquant en conséquence cette dernière formule à chacune des intégrales qui composent le premier membre de l'égalité (130) obtenue tout à l'heure, et dont les différentes variables, savoir λ, μ, et λ_0 sont liées par hypothèse aux nouvelles variables φ, ψ, et φ_0 par les trois équations (108) qui sont chacune de la forme admise tout à l'heure entre ρ et ω, cette égalité deviendra donc, en changeant les signes des deux membres,

$$2 \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \left[\Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) - \Pi(\varphi_0, h) \right] = \frac{a^2 + r}{\sqrt{f(r)}} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u},$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{\sqrt{f(r)}}{2(a^2 + r)}$, et tenant compte de la valeur $\varphi_0 = \varphi + \psi$,

$$(135) \quad \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) - \Pi(\varphi + \psi, h) = \frac{1}{2} \log \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u};$$

et dès lors, l'expression de u étant, avons-nous dit, celle (131), pour posséder la formule d'addition de cette fonction Π, il suffira désormais d'effectuer, dans l'expression de chacune des trois quantités $f(r)$, H_r, K_r, les mêmes substitutions de constantes que nous avons déjà opérées tout à l'heure en vue d'arriver à cette dernière égalité.

Pour la première tout d'abord, les trois égalités (134) donnant

$$\left\{\begin{aligned} a^2 + r &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}, & b^2 + r &= (a^2 + r)\operatorname{dn}^2 h = \frac{-n^2 \operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}, \\ &\text{e} & c^2 + r &= (a^2 + r)\operatorname{cn}^2 h = \frac{-n^2 \operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}, \end{aligned}\right.$$

l'on en conclura immédiatement les valeurs

$$(136)\quad f(r) = \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}\cdot\frac{-n^2 \operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}\,\frac{-n^2 \operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h} = \frac{-n^6 \operatorname{cn}^2 h \operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^6 h}, \qquad \sqrt{f(r)} = \frac{in^3 \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn} h},$$

puis, pour la seconde et la troisième, la seconde ligne des expressions (126) donnera semblablement, en ayant égard aux valeurs (116) et (114) de α, β, et Y_0, ainsi qu'à celle (106) du module k,

$$\left\{\begin{aligned} H_r &= (a^2 + r).\tfrac{1}{2}\beta Y_0 = \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{i \operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{k \operatorname{sn}(\varphi+\psi)}.\, il \operatorname{cn}(\varphi+\psi) \\ &= \frac{ln^2}{2k}\,\frac{\operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{\operatorname{sn}(\varphi+\psi)}\,\frac{1}{\operatorname{sn}^2 h}, \\ K_r &= (a^2 + r)\,Y_0^2 - \varphi(r) = (a^2 + r)\left[Y_0^2 - (b^2 + r)\right] \\ &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^2 h}\left[-l^2 \operatorname{cn}^2(\varphi+\psi) + \frac{n^2 \operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{sn}^2 h}\right] \\ &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^4 h}\left[-l^2 \{1 - \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\} \operatorname{sn}^2 h + n^2\left(1 + \frac{l^2}{n^2}\operatorname{sn}^2 h\right)\right] \\ &= \frac{-n^2}{\operatorname{sn}^4 h}\left[n^2 + l^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right] = \frac{-n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right], \end{aligned}\right.$$

et l'on conclura dès lors de ces valeurs, ainsi que de la précédente (136) de $\sqrt{f(r)}$, et de celle (131) de u,

$$\sqrt{f(r)}.u = \frac{in^3 \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{sn}^3 h}.(-2in)\,k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi)$$

$$= \frac{2n^4}{\operatorname{sn}^3 h} k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi).\operatorname{cn} h \operatorname{dn} h,$$

$$H_r u + K_r = \frac{ln^2}{2k}\frac{\operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi)}{\operatorname{sn}(\varphi+\psi)}\frac{1}{\operatorname{sn}^2 h}.(-2in)\,k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi)$$

$$-\frac{n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right]$$

$$= \frac{n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[-\frac{1}{2k}.2\frac{il}{n}k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi).\operatorname{sn}^2 h\right.$$

$$\left.-\left\{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\operatorname{sn}^2 h\right\}\right]$$

$$= \frac{-n^4}{\operatorname{sn}^4 h}\left[1 + k^2\left\{\operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi) - \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\right\}\operatorname{sn}^2 h\right].$$

En remettant donc à présent ces valeurs dans l'expression du rapport qui figure sous le signe logarithme au second membre de la formule obtenue tout à l'heure (135), cette expression se transformera par là dans la suivante

$$(137).\quad \frac{2(H_r u + K_r) + \sqrt{f(r)}.u}{2(H_r u + K_r) - \sqrt{f(r)}.u} = \frac{A \operatorname{sn}^2 h + B - C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{A \operatorname{sn}^2 h + B + C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h},$$

dans laquelle nous faisons, pour abréger,

$$(138)\quad \left\{\begin{array}{ll} A = k^2\left[\operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{cn}(\varphi+\psi)\operatorname{dn}(\varphi+\psi) - \operatorname{sn}^2(\varphi+\psi)\right], & \\ B = 1, & C = k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi), \end{array}\right.$$

et par conséquent ladite formule (135) deviendra elle-même

$$\Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) - \Pi(\varphi+\psi, h) = \frac{1}{2}\log\frac{A \operatorname{sn}^2 h + B - C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h}{A \operatorname{sn}^2 h + B + C \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h},$$

ou, en échangeant les deux derniers termes, et intervertissant les deux membres,

$$(139)\quad \Pi(\varphi+\psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2}\log\frac{A\,\mathrm{sn}^2 h + B + C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{A\,\mathrm{sn}^2 h + B - C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}.$$

Or, la première et la troisième des valeurs (138) donnant

$$\begin{aligned}A\,\mathrm{sn}\,h \pm C\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h &= k^2\left[\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,.\,\mathrm{cn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{dn}(\varphi+\psi) - \mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\right]\mathrm{sn}\,h\\ &\qquad \pm k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h\\ &= -k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,.\,\mathrm{sn}\,h + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\left[\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{dn}(\varphi+\psi) \pm \mathrm{sn}(\varphi+\psi)\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h\right],\end{aligned}$$

l'on trouvera donc, en ayant égard de même à la seconde,

$$\begin{aligned}B + \mathrm{sn}\,h\,(A\,\mathrm{sn}\,h \pm C\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h) &= 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\\ &\quad + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,.\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\right]\mathrm{sn}\left[h \pm (\varphi+\psi)\right],\end{aligned}$$

d'où l'on conclura dès lors, en distinguant les signes, pour les deux termes du rapport envisagé tout à l'heure (137), les valeurs

$$\left\{\begin{aligned}&A\,\mathrm{sn}^2 h + B + C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h\\ &\qquad = \left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\right]\left[1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi+h)\right],\\ &A\,\mathrm{sn}^2 h + B - C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h\\ &\qquad = \left[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi+\psi)\,\mathrm{sn}^2 h\right]\left[1 - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi-h)\right],\end{aligned}\right.$$

et par conséquent, pour le rapport inverse qui figure dans la formule (139), la valeur suivante

$$\frac{A\,\mathrm{sn}^2 h + B + C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{A\,\mathrm{sn}^2 h + B - C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h} = \frac{1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi+h)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi-h)},$$

laquelle, étant remise à son tour au second membre de ladite formule trouvée en dernier lieu (139), la transformera alors définitivement dans celle-ci

$$(140)\quad \Pi(\varphi+\psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi+h)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi-h)}.$$

qui est bien encore la formule connue d'addition des arguments pour la fonction elliptique de troisième espèce considérée sous le type introduit par Jacobi (*).

Remarquons, avant de quitter ce sujet, qu'il nous eût suffi à la rigueur d'établir cette dernière formule seule pour posséder du même coup l'autre formule relative à la fonction de deuxième espèce; car si, prenant ladite formule sous sa forme précédente (139), nous faisons, en tenant compte de la valeur (138) $B=1$,

$$(141)\qquad \frac{C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{A\,\mathrm{sn}^2 h+B}=z,\qquad \text{d'où}\qquad \lim\left(\frac{z}{h}\right)_{h=0}=\frac{C}{B}\lim\left(\frac{\mathrm{sn}\,h}{h}\right)_{h=0}=C;$$

le dernier terme de ladite formule (139) pourra dans ce cas être remplacé par le développement connu, savoir

$$\frac{1}{2}\log\frac{(A\,\mathrm{sn}^2 h+B)+C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{(A\,\mathrm{sn}^2 h+B)-C\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{cn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots,$$

et la formule elle-même s'écrivant alors, en la divisant par h,

$$\frac{1}{h}\Pi(\varphi+\psi,\,h)=\frac{1}{h}\Pi(\varphi,\,h)+\frac{1}{h}\Pi(\psi,h)+\frac{z}{h}\left(1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}+\dots\right);$$

il résulte immédiatement de la définition même des deux symboles Π et Z, qu'en faisant tendre h, et par conséquent aussi z, vers zéro, puis passant à la limite, cette même formule deviendra, eu égard à la valeur de droite (141) et à celle (138) de C,

$$(142)\qquad Z(\varphi+\psi)=Z(\varphi)+Z(\psi)+k^2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}\,\psi\,\mathrm{sn}(\varphi+\psi),$$

ainsi que nous l'avons trouvé en premier lieu par un calcul direct.

Toutefois, l'économie d'écritures que nous eussions faite ainsi se fût réduite en réalité à fort peu de chose, tous les calculs qui

---

(*) Voir, par exemple, Briot et Bouquet, *Théorie des Fonctions Elliptiques*, § 325, (2de Édition; page 514, *en haut*).

nous ont servi à établir cette dernière formule étant également nécessaires pour la démonstration de la précédente (140), en sorte qu'ils eussent dû quand même prendre place dans nos développements.

Mais, si nous n'eussions ainsi presque rien gagné comme étendue des écritures, notre exposition eût, d'autre part, certainement perdu sous le rapport de la clarté et de la facilité de la lecture, le fractionnement, entre deux propositions distinctes et successives, des développements assez compliqués qu'eût nécessités la démonstration isolée de la formule (140) ayant incontestablement pour effet de soulager l'esprit du Lecteur, en permettant à son attention un repos au milieu de la route, et de faciliter ainsi la vue nette et distincte de tous les éléments de la démonstration, ainsi que de l'enchaînement logique des raisonnements et des calculs. C'est pourquoi nous avons cru préférable d'établir séparément chacune de ces deux formules connexes (142) et (140).

V

Enfin, relativement à la fonction de troisième espèce, nous pourrons encore démontrer facilement, à l'aide de ce dernier résultat et des calculs qui nous ont servi à l'établir, trois autres formules importantes qui se rattachent étroitement à celles qui font l'objet et le but des développements ci-dessus.

Pour la première, partant de cette remarque déjà faite en son lieu (page 230) que les équations de définition posées entre les les variables ou paramètres successivement introduits, savoir ρ et ω d'une part, ou r et h de l'autre, étaient exactement de même forme sauf une constante additive, nous envisagerons la différence symétrique (au signe près) en ρ et r, de deux intégrales de troisième espèce d'un type peu différent de celui considéré plus haut, savoir

$$(143) \qquad \Delta = \int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{d\rho}{\rho - r} - \int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r - \rho}.$$

Ces deux intégrales s'échangeant, comme l'on voit, l'une dans l'autre par la permutation de ρ et r, il suffira donc, pour avoir l'expression de chacune en ω et h, d'en calculer une seule, la seconde, par exemple, qui s'obtient très aisément de la façon suivante.

La première équation (133), qui définit le paramère h, étant de même forme que la première (107) que l'on peut adopter pareillement pour définition de la variable ω, entraine dès lors évidemment deux autres semblables aux deux suivantes (107), c'est-à-dire que l'on aura simultanément les égalités

$$(144)\qquad a^2+r=l^2\operatorname{sn}^2(h-iK'),\quad b^2+r=-l^2\operatorname{cn}^2(h-iK'),\quad c^2+r=n^2\operatorname{dn}^2(h-iK'),$$

d'où l'on tirera dès lors, comme précédemment, les valeurs

$$f(r)=(a^2+r)(b^2+r)(c^2+r)=l^2\operatorname{sn}^2(h-iK').(il)^2\operatorname{cn}^2(h-iK').n^2\operatorname{dn}^2(h-iK'),$$

$$\sqrt{f(r)}=l^2.in.\operatorname{sn}(h-iK')\operatorname{cn}(h-iK')\operatorname{dn}(h-iK'),$$

$$(145)\qquad dr=l^2.2\operatorname{sn}(h-iK')\operatorname{cn}(h-iK')\operatorname{dn}(h-iK').dh,\qquad \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}=\frac{2}{in}dh,$$

expressions complètement parallèles à celles résultant de la même façon des égalités (107), savoir :

$$f(\rho)=(a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho)=l^2\operatorname{sn}^2\omega.(il)^2\operatorname{cn}^2\omega.\operatorname{dn}^2\omega,$$

$$\sqrt{f(\rho)}=l^2.in.\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega,$$

$$(146)\qquad d\rho=l^2.2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega.d\omega,\qquad \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}=\frac{2}{in}d\omega.$$

Ces préliminaires étant admis, il résultera immédiatement de ces valeurs jointes à la deuxième (133), pour la seconde des intégrales qui composent la différence envisagée tout à l'heure (143), l'expression

$$\int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r-\rho} = \int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{(a^2+r)-(a^2+\rho)} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$$

$$= \int_{iK'}^{h} \frac{l^2 . in . \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\dfrac{l^2}{k^2 \operatorname{sn}^2 h} - l^2 \operatorname{sn}^2 \omega} \cdot \frac{2}{in} dh = 2 \int_{iK'}^{h} \frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega . \operatorname{sn}^2 h}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2 h} dh$$

$$= 2\left[\Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega)\right],$$

et dès lors les équations précédentes (**144**) se déduisant de celles antérieures (**107**) en y permutant ω et $h - iK'$ en même temps que ρ et r, changement qui transforme

$$\Pi(h, \omega) = \Pi\left[(h - iK') + iK', \omega\right]$$

en $\Pi(\omega + iK', h - iK')$, l'on obtiendra donc, par cette simple permutation, la valeur de l'autre intégrale, qui sera

$$\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{d\rho}{\rho - r} = 2\left[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')\right],$$

et par suite, en la remettant, ainsi que la précédente, dans l'expression de la différence envisagée (**143**), l'on trouvera, pour sa valeur, la suivante

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = 2\left[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')\right] \\ - 2\left[\Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega)\right], \end{aligned} \right.$$

qui peut être notablement simplifiée ainsi qu'il suit, à l'aide de la formule d'addition obtenue tout à l'heure (**140**).

En effet, cette formule pouvant être écrite aussi bien, en divisant par $\operatorname{sn}\psi$ chacun des termes de la fraction soumise au signe logarithme,

$$\Pi(\varphi + \psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2} \log \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sn}\psi} + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h \operatorname{sn}\left[h + (\varphi + \psi)\right]}{\dfrac{1}{\operatorname{sn}\psi} + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h \operatorname{sn}\left[h - (\varphi + \psi)\right]},$$

elle donnera donc, pour $\psi = \pm iK'$ ou $\operatorname{sn}\psi = \operatorname{sn}(\pm iK') = \pm\infty$,

$$\Pi(\varphi \pm iK', h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\pm iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}[h + (\varphi \pm iK')]}{\operatorname{sn}[h - (\varphi \pm iK')]},$$

et par conséquent, si l'on distingue les deux signes, en se rappelant que

$$\operatorname{sn}(z - iK') = \operatorname{sn}[(z + iK') - 2iK'] = \operatorname{sn}(z + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} z},$$

et observant que la fonction Π est évidemment une fonction impaire, l'on aura donc les deux formules subsidiaires

$$\begin{cases} \Pi(\varphi + iK', h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h - \varphi)}{\operatorname{sn}(h + \varphi)}, \\ \Pi(\varphi - iK', h) = \Pi(\varphi, h) - \Pi(iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h - \varphi)}{\operatorname{sn}(h + \varphi)}, \end{cases}$$

qui donneront respectivement, la première en y changeant φ en ω et h en $h - iK'$,

$$\Pi(\omega + iK', h - iK') = \Pi(\omega, h - iK') + \Pi(iK', h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}[(h - iK') - \omega]}{\operatorname{sn}[(h - iK') + \omega]},$$

$$= \Pi(\omega, h - iK') + \Pi(iK', h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h + \omega)}{\operatorname{sn}(h - \omega)},$$

d'où, en multipliant par 2,

$$(148) \quad \begin{cases} 2[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')] \\ \qquad = 2\Pi(\omega, h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}^2(h + \omega)}{\operatorname{sn}^2(h - \omega)}, \end{cases}$$

et de même la seconde, en y écrivant simplement h à la place de φ et ω à la place de h,

$$\Pi(h - iK', \omega) = \Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(\omega - h)}{\operatorname{sn}(\omega + h)}.$$

$$\int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r-\rho} = \int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{(a^2+r)-(a^2+\rho)} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}$$

$$= \int_{iK'}^{h} \frac{l^2 . in . \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\dfrac{l^2}{k^2 \operatorname{sn}^2 h} - l^2 \operatorname{sn}^2 \omega} \cdot \frac{2}{in} dh = 2 \int_{iK'}^{h} \frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega . \operatorname{sn}^2 h}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{sn}^2 h} dh$$

$$= 2\left[\Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega)\right],$$

et dès lors les équations précédentes (144) se déduisant de celles antérieures (107) en y permutant ω et $h - iK'$ en même temps que ρ et r, changement qui transforme

$$\Pi(h, \omega) = \Pi\left[(h - iK') + iK', \omega\right]$$

en $\Pi(\omega + iK', h - iK')$, l'on obtiendra donc, par cette simple permutation, la valeur de l'autre intégrale, qui sera

$$\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{d\rho}{\rho - r} = 2\left[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')\right],$$

et par suite, en la remettant, ainsi que la précédente, dans l'expression de la différence envisagée (143), l'on trouvera, pour sa valeur, la suivante

$$(147) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = 2\left[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')\right] \\ - 2\left[\Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega)\right], \end{aligned} \right.$$

qui peut être notablement simplifiée ainsi qu'il suit, à l'aide de la formule d'addition obtenue tout à l'heure (140).

En effet, cette formule pouvant être écrite aussi bien, en divisant par $\operatorname{sn}\psi$ chacun des termes de la fraction soumise au signe logarithme,

$$\Pi(\varphi + \psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{2} \log \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sn}\psi} + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h \operatorname{sn}\left[h + (\varphi + \psi)\right]}{\dfrac{1}{\operatorname{sn}\psi} + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn} h \operatorname{sn}\left[h - (\varphi + \psi)\right]},$$

elle donnera donc, pour $\psi = \pm iK'$ ou $\operatorname{sn}\psi = \operatorname{sn}(\pm iK') = \pm\infty$,

$$\Pi(\varphi \pm iK', h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\pm iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}[h + (\varphi \pm iK')]}{\operatorname{sn}[h - (\varphi \pm iK')]},$$

et par conséquent, si l'on distingue les deux signes, en se rappelant que

$$\operatorname{sn}(z - iK') = \operatorname{sn}[(z + iK') - 2iK'] = \operatorname{sn}(z + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} z},$$

et observant que la fonction Π est évidemment une fonction impaire, l'on aura donc les deux formules subsidiaires

$$\left\{\begin{aligned} \Pi(\varphi + iK', h) &= \Pi(\varphi, h) + \Pi(iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h-\varphi)}{\operatorname{sn}(h+\varphi)}, \\ \Pi(\varphi - iK', h) &= \Pi(\varphi, h) - \Pi(iK', h) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h-\varphi)}{\operatorname{sn}(h+\varphi)}, \end{aligned}\right.$$

qui donneront respectivement, la première en y changeant φ en ω et h en $h - iK'$,

$$\begin{aligned} \Pi(\omega + iK', h - iK') &= \Pi(\omega, h - iK') + \Pi(iK', h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}[(h - iK') - \omega]}{\operatorname{sn}[(h - iK') + \omega]}, \\ &= \Pi(\omega, h - iK') + \Pi(iK', h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(h+\omega)}{\operatorname{sn}(h-\omega)}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par 2,

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned} &2[\Pi(\omega + iK', h - iK') - \Pi(iK', h - iK')] \\ &\qquad = 2\Pi(\omega, h - iK') + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}^2(h+\omega)}{\operatorname{sn}^2(h-\omega)}, \end{aligned}\right.$$

et de même la seconde, en y écrivant simplement h à la place de φ et ω à la place de h,

$$\Pi(h - iK', \omega) = \Pi(h, \omega) - \Pi(iK', \omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(\omega - h)}{\operatorname{sn}(\omega + h)}.$$

d'où, en multipliant encore par 2,

$$2\left[\Pi(h,\omega) - \Pi(iK',\omega)\right] = 2\,\Pi(h - iK',\omega) + \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{sn}^2(\omega + h)}{\mathrm{sn}^2(\omega - h)},$$

expression qui, étant retranchée de la précédente (148), fournira donc enfin, les termes logarithmiques se détruisant alors, pour la différence (147), qu'il s'agissait de calculer, la valeur très simple :

$$(149) \qquad \Delta = 2\left[\Pi(\omega, h - iK') - \Pi(h - iK'), \omega)\right].$$

Cette première expression étant ainsi obtenue, nous allons à présent en calculer une seconde, en appliquant à la même différence, considérée sous la forme proposée (143), une transformation remarquable, indiquée par Jacobi pour les intégrales hyperelliptiques en général, et consistant à mettre chacune de celles qui la composent sous la forme d'uneintégrale double.

A cet effet, partant de cette remarque que notre fonction f s'annule pour la limite inférieure $-a^2$ commune aux deux intégrales en question, l'on pourra donc écrire la première, par exemple, successivement sous les différentes formes :

$$\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\sqrt{f(r)}}{\sqrt{f(\rho)}}\frac{d\rho}{\rho - r} = \int_{-a^2}^{\rho}\left[\frac{\sqrt{f(r)}}{\rho - r} - \frac{\sqrt{f(-a^2)}}{\rho - (-a^2)}\right]\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}$$

$$= \int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\left[\frac{\sqrt{f(r)}}{\rho - r}\right]_{r=-a^2}^{r} = \int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\int_{-a^2}^{r}\frac{\frac{f'(r)}{2\sqrt{f(r)}}(\rho - r) + \sqrt{f(r)}}{(\rho - r)^2}\,dr$$

$$= \int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\int_{-a^2}^{r}\frac{f'(r)(\rho - r) + 2f(r)}{2(\rho - r)^2}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}}.$$

Et dès lors, la seconde intégrale, étant écrite d'une façon semblable, en permutant simplement r et ρ dans ce dernier résultat, ainsi qu'il suit

$$\int_{-a^2}^{r} \frac{\sqrt{f(\rho)}}{\sqrt{f(r)}} \frac{dr}{r-\rho} = \int_{-a^2}^{r} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \int_{-a^2}^{\rho} \frac{f'(\rho)(r-\rho)+2f(\rho)}{2(r-\rho)^2} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},$$

leur différence Δ pourra maintenant, les limites étant les mêmes pour chaque variable dans ces deux expressions, être présentée sous la forme de l'intégrale double

$$\Delta = \int_{-a^2}^{\rho} \int_{-a^2}^{r} \Theta \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}}, \tag{150}$$

en désignant, pour abréger, par Θ l'expression rationnelle et symétrique (au signe près) en ρ et r,

$$\Theta = \frac{[f'(\rho) + f'(r)](\rho - r) - 2[f(\rho) - f(r)]}{2(\rho - r)^2}, \tag{151}$$

laquelle se simplifie très aisément de la manière suivante.

Faisant encore, comme dans notre Chapitre V (page 372),

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(\rho) = \rho^3 + A\rho^2 + B\rho + C, & f'(\rho) = 3\rho^2 + 2A\rho + B, \\ f(r) = r^3 + Ar^2 + Br + C, & f'(r) = 3r^2 + 2Ar + B, \end{array} \right.$$

l'on en conclura successivement

$$\begin{aligned} f(\rho) - f(r) &= \rho^3 - r^3 + A(\rho^2 - r^2) + B(\rho - r) \\ &= (\rho - r)\left[(\rho^2 + r\rho + r^2) + A(\rho + r) + B\right], \end{aligned}$$

$$f'(\rho) + f'(r) = 3(\rho^2 + r^2) + 2A(\rho + r) + 2B,$$

$$[f'(\rho) + f'(r)](\rho - r) - 2[f(\rho) - f(r)]$$

$$= (\rho - r)\left[\{3(\rho^2+r^2)+2A(\rho+r)+2B\} - 2\{(\rho^2+r\rho+r^2) + A(\rho + r) + B\}\right]$$

$$= (\rho - r).(\rho - r)^2,$$

et par conséquent, pour la quantité Θ (151), la valeur simple

$$\Theta = \frac{(\rho - r).(\rho - r)^2}{2(\rho - r)^2} = \frac{\rho - r}{2} = \frac{1}{2}\left[(a^2 + \rho) - (a^2 + r)\right],$$

laquelle étant remise dans l'expression précédente (150) de Δ la transformera elle-même dans la suivante

$$(152)\left\{\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}\int_{-a^2}^{\rho}\int_{-a^2}^{r}\left[(a^2 + \rho) - (a^2 + r)\right]\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\,\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-a^2}^{\rho}(a^2 + \rho)\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}.\int_{-a^2}^{r}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} - \int_{-a^2}^{r}(a^2 + r)\frac{dr}{\sqrt{f(r)}}.\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}\right], \end{aligned}\right.$$

qu'il ne reste plus dès lors qu'à exprimer à son tour en ω et h à la place de ρ et r.

Or, cette dernière opération est encore très facile avec nos notations et les résultats des calculs développés ci-dessus.

En effet, les expressions parallèles (146) et (145) d'une part, et (107) et (144) de l'autre, donnant immédiatement, en premier lieu,

$$\int_{-a^2}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \frac{2}{in}\,\omega, \qquad \int_{-a^2}^{r}\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} = \frac{2}{in}(h - iK'),$$

puis, en second lieu, eu égard à la valeur (106) du module k, comme lors des équations (110) et (111),

$$\begin{aligned} \int_{-a^2}^{\rho}(a^2 + \rho)\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} &= \int_{0}^{\omega} l^2\,\mathrm{sn}^2\omega.\,\frac{2}{in}\,d\omega = 2in\int_{0}^{\omega}\frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2\omega\, d\omega \\ &= 2in\int_{0}^{\omega}k^2\,\mathrm{sn}^2\omega\, d\omega = 2in\,\mathrm{Z}(\omega), \end{aligned}$$

et d'autre part, en faisant pour un instant $h - iK' = h'$,

$$\begin{aligned} \int_{-a^2}^{r}(a^2 + r)\frac{dr}{\sqrt{f(r)}} &= \int_{K'}^{h} l^2\,\mathrm{sn}^2(h - iK').\,\frac{2}{in}\,dh = 2in\int_{0}^{h'}\frac{l^2}{-n^2}\,\mathrm{sn}^2 h'\, dh' \\ &= 2in\,\mathrm{Z}(h') = 2in\,\mathrm{Z}(h - iK'), \end{aligned}$$

il résultera donc de ces dernières valeurs, pour la différence en question (152), la nouvelle expression

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[2inZ(\omega).\frac{2}{in}(h-iK') - 2inZ(h-iK').\frac{2}{in}\omega\right]$$

$$= 2\left[(h-iK')Z(\omega) - \omega Z(h-iK')\right],$$

laquelle étant comparée à celle (149) déjà obtenue précédemment pour la même quantité, fournira par conséquent l'égalité

$$2\left[\Pi(\omega, h-iK') - \Pi(h-iK', \omega)\right] = 2\left[(h-iK')Z(\omega) - \omega Z(h-iK')\right],$$

ou, plus simplement, en écrivant h à la place de $h - iK'$, celle-ci

(153) $$\Pi(\omega, h) - \Pi(h, \omega) = hZ(\omega) - \omega Z(h),$$

qui est la formule connue de l'échange de l'argument et du paramètre.

De cette formule et des précédentes (140) et (142), nous pourrons alors en tirer une nouvelle, parallèle en quelque sorte à celle (140), et relative cette fois à l'addition des paramètres.

En effet, celle que nous venons d'établir à l'instant, nous donnant, en y écrivant $p + q$ à la place de h,

$$\Pi(\omega, p+q) - \Pi(p+q, \omega) = (p+q)Z(\omega) - \omega Z(p+q),$$

si nous y appliquons, d'abord au second terme de chaque membre les formules d'addition (140) et (142), puis, cela fait, aux premiers termes du second membre la même formule d'échange (153), nous aurons donc ainsi la double égalité

$$\Pi(\omega, p+q) - \left[\Pi(p, \omega) + \Pi(q, \omega) + \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(p+q+\omega)}{1 - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(p+q-\omega)}\right]$$

$$= (p+q)Z(\omega) - \omega\left[Z(p) + Z(q) + k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q)\right]$$

$$= \left[\Pi(\omega, p) - \Pi(p, \omega)\right] + \left[\Pi(\omega, q) - \Pi(q, \omega)\right] - \omega\, k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q),$$

